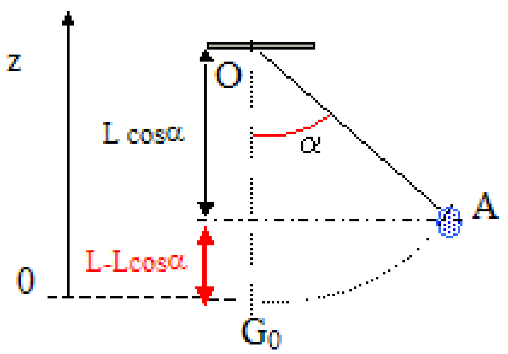
الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة محمد الصديق بن يحي جيجل

قسم الفيزياء

# ميكانيك النقطة المادية




الأستاذ تيلبي عبد الناصر

**2015/2014**

## الفهرس

**المقدمة**..................................................................................4

**الفصل الأول:** الارتيابات و الحساب الشعاعي.......................................5

- النظام الدولي للوحدات
- طريقة تحليل الأبعاد
- حساب الارتيابات
- الحساب الشعاعي

**الفصل الثاني:** حركة النقطة المادية.................................................16

- شعاع الموضع
- الفاصلة المنحنية
- شعاع السرعة
- شعاع التسارع

**الفصل الثالث:** الحركة النسبية........................................................30

- قانون تركيب السرعات
- قانون تركيب التسارعات

**الفصل الرابع:** ديناميك النقطة المادية..............................................37

- مبدأ العطالة
- جمل الاسناد العطالية
- الكتلة و كمية الحركة
- مبدأ انحفاظ كمية الحركة
- المبدأ الأساسي للتحريك
- مبدأ الفعل و رد الفعل
- دراسة بعص القوى
- نظرية العزم الحركي
- قوى الاحتكاك بين الأجسام الصلبة
- تطبيق المبدأ الأساسي للتحريك في جملة اسناد غير عطالية

**الفصل الخامس:** الطاقة و العمل.....................................................53

- العمل

- نظرية الطاقة الحركية
- القوى المحافظة
- عمل القوى المحافظة
- نظرية الطاقة الكامنة
- أمثلة عن القوى المحافظة
- نظرية الطاقة الميكانكية
- اشتقاق قوانين الحركة من مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية
- مناقشة منحنيات الطاقة الكامنة

**المراجع**..............................................................................68

# المقدمة

بتوفيق من الله عز و جل، تم إنجاز هذه المطبوعة البيداغوجية التي تحتوي على الدروس و المحضارات، التي قدمت لطلبة السنة أولى علوم دقيقة، تكنولوجيا، بيولوجيا و أخيرا طلبة السنة أولى علوم المادة في النظام الجديد، ليسانس، ماستر، دكتورة، و هذا خلال عقد من الزمن.

المطبوعة مقسمة إلى خمس فصول:

نظرا لكون دراسة الفيزياء تعتمد كثيرا على المفاهيم الرياضية و خاصة منها الحساب الشعاعي، فقد خصص الفصل الأول لحساب الإرتيابات و الحساب الشعاعي.

الفصل الثاني يتناول دراسة حركة النقطة المادية، دراسة وصفية هندسية تهتم بحساب المقادير الحركية للمتحرك و وصف مساره، دون التطرق إلى مسببات الحركة.

نظرا لكون للحركة و السكون مفهوما نسبيا، فقد خصص الفصل الثالث لدراسة الحركة النسبية و كيفية حساب قوانين الحركة لما ننتقل من جملة إلى أخرى.

أما الفصل الرابع فقد قدم فيه قوانين الديناميك على أساس مبادئ إسحاق نيوتن الثلاثة بالاضافة لدراسة بعض القوى مثل قوة الاحتكاك بين الأجسام الصلبة.

الفصل الخامس و الأخير، فخصص لتقديم طريقة ثانية لإيجاد قوانين الحركة، باستخدام مفهومي العمل و الطاقة. في هذا الفصل تم عرض كيفية تطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية لإيجاد نفس القوانين المتحصل عليها باستعمال المبدأ الأساسي للتحريك. كما تم التطرق كذلك لشرح كيفية استغلال منحنيات الطاقة الكامنة لاستنتاج بعض مميزات الحركة.

في الأخير، أتوجه بالشكر لكل من ساهم، من بعيد أو قريب، في إنجاز هذه المطبوعة، و أتمنى أن تنفع كثيرا طلابنا الكرام.

الأستاذ تيلبي عبد الناصر
قسم الفيزياء
جامعة جيجل
ماي2015

# الفصل الأول

## *الارتيابات و الحساب الشعاعي*

كلمة الفيزياء أصلها يوناني و تعني الطبيعة (la nature) أو فلسفة الطبيعة. علم الفيزياء يهتم بدراسة الظواهر الطبيعية و دراسة تفاعلات عناصر الطبيعة فيما بينها. في بداية الأمر كان الانسان يعتمد على الحواس لتفسير الظواهر الطبيعية، حاسة الرؤية أستعملها لتفسير الظواهر الضوئية، حاسة اللمس لشرح الظواهر الحرارية، أما السمع فاستعمل للأمواج الصوتية و هكذا.....
كانت الحركيات أهم الظواهر الطبيعية التي يمكن مشاهدتها بصفة مباشرة، و لهذا ظهر في بداية الأمر علم الميكانيك كفرع متميز من علم الفيزياء.

كل ظاهرة فيزيائية يمكن التعبير عنها بمقدار فيزيائي و هذا المقدار يمكن أن يكون سلمي أو شعاعي حسب طبيعة الظاهرة. فمثلا لوصف حركة الأجسام نستعمل مقادير شعاعية مثل شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ أو شعاع السرعة $\vec{v}$ ، كما يمكن استخدام مقادير سلمية مثل $E = h\nu$ للتعبير عن طاقة الفوتونات.

- <u>المقادير الأساسية المستعملة في الفيزياء</u>:

لوصف الفضاء نحتاج إلى المقدار الطول (La longueur) و نرمز له ب L، للتعبير عن حركة الأجسام نحتاج للمقدارين الطول L و الزمن (Le temps) T. في الديناميك و بالاضافة إلى الطول L و الزمن T نحتاج للمقدار الكتلة (La masse) M، أما في الكهرباء فبالاضافة إلى المقادير السابقة الذكر فإننا نحتاج للمقدار شدة التيار (Intensité du courant) I، وهي المقادير الأساسية التي نستخدمها لوصف أي ظاهرة فيزيائية.

- <u>النظام الدولي للوحدات</u>:

يحتوي النظام الدولي للوحدات (Système international d’unités) و الذي نرمز له ب SI على مجموعة من الوحدات الأساسية و أخرى مشتقة منها و يستخدم لتسهيل عملية الحساب.

| Grandeur | Symbole de la grandeur | Unités SI | Symbole associé à l’unité |
|---|---|---|---|
| Masse | M | Kilogramme | kg |
| Temps | T | Seconde | s |
| Longueur | L | Mètre | m |
| Température | Θ | Kelvin | K |
| Intensité électrique | I | Ampère | A |
| Quantité de matière | N | Mole | mol |
| Intensité lumineuse | J | Candela | cd |

- <u>معادلة الأبعاد:</u>

ليكن G مقدار فيزيائي (Une grandeur physique)، معادلة الأبعاد للمقدار G تكتب على الشكل التالي:

$$[G] = M^{\alpha}\, L^{\beta}\, T^{\eta}\, I^{\delta} \qquad \text{..................(1.1)}$$

المعاملات $\alpha$،β،η،δ تتغير من مقدار إلى أخر.

مثال: باستخدام طريقة تحليل الأبعاد أوجد دور نواس بسيط $\tau$ إذا علمت أنه دالة للطول $\ell$ و الجاذبية $g$ .

نكتب $\tau$ على الشكل $\tau = f(g,\ell) = K\,\ell^{\alpha} g^{\beta}$ ، حيث K ثابت بدون وحدة، معادلة الأبعاد ل $\tau$ هي $[\tau] = [K][\ell]^{\alpha}\,[g]^{\beta}$ فنتحصل على ما يلي:

$$T = 1L^{\alpha}\,\frac{L^{\beta}}{T^{2\beta}} = L^{\alpha+\beta}\,T^{-2\beta}$$

بالمطابقة نتحصل على جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 1 = -2\beta \\ 0 = \alpha + \beta^{2} \end{cases} \quad \text{أي أن} \quad \begin{cases} \beta = -1/2 \\ \alpha = +1/2 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \tau = K\ell^{1/2} g^{-1/2} = K\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

يكفي أن نأخذ $K = 2\pi$ للحصول على نفس عبارة دور نواس بسيط، التي نتحصل عليها بحل المعادلة التفاضلية التي يعطيها المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,.$$

**<u>النتيجة</u>:** طريقة تحليل الأبعاد جد مهمة لأنها تسمح لنا بإيجاد بعض قوانين الفيزياء بطرق مبسطة و كذلك تسمح لنا من التأكد من تجانس العلاقات.

- <u>الارتيابات:</u>

كل نتيجة قياس تجريبي تحتوي على خطأ أو إرتياب و لو كان صغيرا، و نتيجة أي قياس ليس لها أي قيمة علمية إذا لم نحدد عليها قيمة الإرتياب.

ليكن G مقدار فيزيائي (Grandeur physique) نعرف له قيمتين: القيمة الدقيقة (Valeur exacte) و نرمز لهاب $G_e$ و القيمة المقاسة ( valeur mesurée) و نرمز لها ب $G_m$ ، الآن إنطلاقا من القيمتين السابقتين نعرف ما يلي:

- الخطأ المطلق: $\delta G = G_m - G_e$ .

- الإرتياب المطلق: وهي أكبر قيمة يأخذها الخطأ المطلق $\Delta G = Max|\delta G|$ .

عندئذ تكون الكتابة العلمية للمقدار G على الشكل التالي:

$$G_e = G_m \pm \Delta G \quad \text{......................(1.2)}$$

- الخطأ النسبي: يعرف بالنسبة $\frac{\delta G}{G_e}$ .

- الإرتياب النسبي: يعرف بالنسبة $\frac{\Delta G}{G_e}$ .

- حساب الإرتيابات:

في الحالة العامة لا تحسب المقادير بصفة مباشرة، بل بواسطة مقادير أخرى، مثلا إذا أردنا معرفة فرق الكمون بين طرفي ناقل أومي $U$ فإننا نحتاج إلى قيمة شدة التيار الذي يسري فيه $I$ و كذلك معرفة مقاومته $R$ ، عندئذ يمكن حساب فرق الكمون باستخدام قانون أوم: $U = RI$ . السؤال المطروح هو كيف نحسب الارتياب على $U$ بمعرفة الارتياب على كل من $R$ و $I$؟

1- طريقة التفاضل الكلي:

ليكن المقدار $x$ دالة للمقدارين $y$ و $z$ ، $x = f(y,z)$ . التفاضل الكلي ل $x$ هو:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \text{..................(1.3)}$$

الأن نستخدم كون التفاضل صغير بحيث يمكن تعويضه بالخطأ المطلق، اذن: $dx \approx \delta x$ ، $dy \approx \delta y$ ، $dz \approx \delta z$ و العلاقة (1.3) تأخذ الشكل التالي:

$$\delta x = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \quad \text{..................(1.4)}$$

العلاقة (1.4) تمثل الخطأ المطلق على المقدار $x$ ، وكون الإرتياب المطلق هي أكبر قيمة يأخذها الخطأ المطلق، اذن $\Delta x$ سوف يعطى ب:

$$\Delta x = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z \qquad \text{(1.5)}$$

العلاقة (1.5) تسمح لنا بحساب الارتياب المطلق على المقدار $x$ بمعرفة الإرتياب على كل من $y$ و $z$ . لو نعود إلى مثال الناقل الأومي فإننا نجد أن:

$$\Delta U = R\Delta I + I\Delta R$$

2- نظرية الإتيابات المطلقة:

"الإرتياب المطلق لمجموع جبري من المقادير يساوي مجموع الارتيابات المطلقة لكل المقادير".

أي إذا كان $X = a + b - c$ ، فإن $\Delta X = \Delta a + \Delta b + \Delta c$ .........(1.6)

فعلا لدينا:

$$X = a + b - c \leftarrow \delta X = \delta a + \delta b - \delta c \leftarrow \Delta X = \Delta a + \Delta b + \Delta c .$$

3- نظرية الإرتياب النسبي:

" الإرتياب النسبي لحاصل قسمة أو جداء عدة مقادير يساوي مجموع الإرتيابات النسبية لكل المقادير".

أي إذا كان $x = \frac{ab}{c}$ فإن $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$ ...................(1.7)

بإدخال اللوغاريتم على عبارة المقدار $x$ نتحصل على:

$$Ln x = Ln a + Ln b - Ln c$$

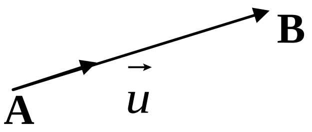
بالاشتقاق نجد:

$$\frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} - \frac{dc}{c} \leftarrow \frac{\delta x}{x} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta c}{c} \leftarrow \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} .$$

- <u>الحساب الشعاعي:</u>

<u>تعريف</u>: الشعاع عبارة عن قطعة مستقيمة موجهة، معرف بالإتجاه و الطويلة.

لتكن القطعة المستقيمة AB ذات الطول $\ell$ و نقوم بتوجيهها مثلا من A نحو B، نتحصل إذا على الشعاع $\overrightarrow{AB}$




$\overrightarrow{AB} = \ell\,\vec{u}$ ، $\vec{u}$ يمثل شعاع الوحدة المتجه من A نحو B.

<u>المركبات السلمية:</u>

ليكن لدينا معلم متعامد و متجانس مزود بالأساس $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، أي شعاع $\vec{V}$ بالنسبة للمعلم R يكتب على الشكل:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\vec{k} \quad \text{.....................(1.8)}$$

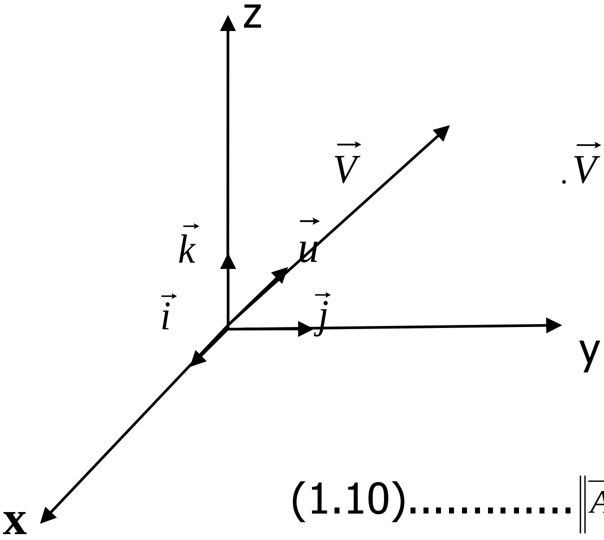
$(V_x, V_y, V_z)$ تسمى المركبات السلمية للشعاع $\vec{V}$.

طويلة الشعاع تعطى ب: $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}$ .............(1.9)

<u>شعاع الواحدة:</u>

أي شعاع $\vec{V}$ يكتب على الشكل

$\vec{V} = \|V\|\vec{u}$ ، $\vec{u}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\vec{V}$.

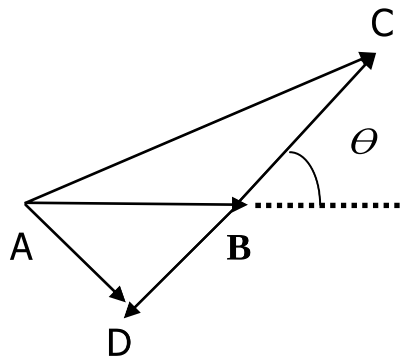



- <u>جمع الأشعة:</u>

مجموع شعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ و طويلته تعطى ب:

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB}.\overline{BC}\cos\theta} \quad \text{............(1.10)}$$

حيث $\theta$ هي الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$، مع التذكير أن جمع الأشعة هي عملية تبديلية ، $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$.




- <u>الفرق بين الأشعة</u>:

مثل الجمع، الفرق بين شعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$
هو الشعاع $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$
و طويلته تعطى بـ:

$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}.\ \overline{BC}\cos\theta} \quad ........................(1.11)$$

عكس الجمع،الفرق بين الأشعة هي عملية غير تبديلية، $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=-\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)$ .

- <u>الجداء السلمي</u>:

عكس الجمع و الفرق بين الأشعة، أين كانت نتيجة العملية عبارة عن شعاع، الجداء السلمي بين شعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و الذي نرمز له ب $\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2$ يعطينا مقدار سلمي يعطى ب:

$$\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2=\left\|\vec{V}_1\right\|.\left\|\vec{V}_2\right\|\cos\theta \quad ........................... (1.12)$$

حيث $\theta$ تمثل الزاوية المحصورة بين الشعاعين.

- العبارة التحليلية للجداء السلمي:

ليكن $\vec{V}_1(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{V}_2(x_2,y_2,z_2)$ إذن:

$$\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\bullet\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)$$

$$\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \quad ......................(1.13)$$

للحصول على النتيجة الأخيرة (العلاقة 1.13) استخدمنا خواص الجداء السلمي بين أشعة الوحدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ و هي:

$$\begin{cases}\vec{i}\bullet\vec{i}=\vec{j}\bullet\vec{j}=\vec{k}\bullet\vec{k}=1\\ \vec{i}\bullet\vec{j}=\vec{i}\bullet\vec{k}=\vec{j}\bullet\vec{k}=0\end{cases} \quad ..................................(1.14)$$

انطلاقا من العلاقتين (1.12) و (1.13) نستنتج قيمة الزاوية المحصورة بين الشعاعين:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \quad \text{(1.15)....................}$$

- الجداء السلمي تبديلي، أي $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \bullet \vec{V}_1$.
- الجداء السلمي توزيعي على الجمع، $\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 + \vec{V}_3\right) = \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right) + \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3\right)$

<u>مثال</u>: اذا علمت أن $\vec{V}_1(1,0,-1)$ و $\vec{V}_2(2,1,-1)$، أحسب $\|\vec{V}_1\|$ و $\|\vec{V}_2\|$ و أستنتج قيمة الزاوية المحصورة بينهما.

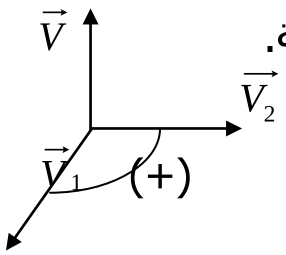
$$\begin{cases} \|\vec{V}_1\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2} \\ \|\vec{V}_2\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \end{cases}$$

و منه: $\cos\theta = \frac{2+0+1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، إذن $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

- <u>الجداء الشعاعي</u>:

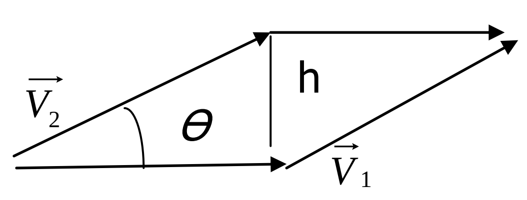
الجداء الشعاعي بين شعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و الذي نرمز له ب $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ يعرف على أنه الشعاع $\vec{V}$ حيث $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ له الخصائص التالية:

- $\vec{V} \perp \vec{V}_1$ و $\vec{V} \perp \vec{V}_2$، أي أن $\vec{V}$ عمودي على المستوي الذي يحتوي على الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.
- إتجاه $\vec{V}$ هو إتجاه البرغي (Le vis) عكس عقارب الساعة.




- طويلته تعطى ب: $\|\vec{V}\| = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|\sin\theta$ ..........(1.16)

<u>ملاحظة</u>: طويلة الجداء الشعاعي تمثل مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.



فعلا لدينا $\sin\theta=\frac{h}{\left\|\vec{V_2}\right\|}\leftarrow \left\|\vec{V}\right\|=\left\|\vec{V_1}\right\|h$ وهي تمثل مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V_2}$.

- الجداء الشعاعي غير تبديلي، $\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=-\left(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_1\right)$.

- الجداء الشعاعي توزيعي على الجمع، $\vec{V}_1\wedge\left(\vec{V}_2+\vec{V}_3\right)=\left(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\right)+\left(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_3\right)$.

- خواص الجداء الشعاعي بين أشعة الوحدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ :

$$\begin{cases}\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}\\ \vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}\end{cases}\qquad ......................(1.17)$$

العبارة التحليلية للجداء الشعاعي:

ليكن $\vec{V}_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ و $\vec{V}_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ اذن:

$$\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{j}\right)\wedge\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)$$

$$\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=\left(y_1z_2-z_1y_2\right)\vec{i}+\left(z_1x_2-x_1z_2\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)\vec{k}\qquad .........(1.18)$$

للحصول على العبارة الأخيرة أستخدمنا كون الجداء الشعاعي توزيعي على الجمع و كذلك خواص الجداء الشعاعي بين أشعة الوحدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

يمكن الحصول على نفس العبارة السابقة (1.18) و ذلك باستخدام طريقة المحدد:

$$\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=\left(y_1z_2-z_1y_2\right)\vec{i}-\left(x_1z_2-z_1x_2\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)\vec{k}$$

و هي نفس العبارة التي تحصلنا عليها سابقا باستخدام الطريقة المباشرة.

مثال: إذا علمت أن $\vec{V}_1(1,3,-4)$ و $\vec{V}_2(5,1,2)$، باستخدام الجداء الشعاعي بين الشعاعين أستنتج قيمة الزاوية المحصورة بينهما.

لدينا: $\left\|\vec{V}\right\|=\left\|\vec{V}_1\right\|\left\|\vec{V}_2\right\|\sin\theta$ و منه $\sin\theta=\frac{\left\|\vec{V}\right\|}{\left\|\vec{V_1}\right\|\left\|\vec{V_2}\right\|}$

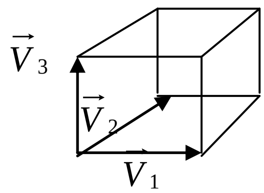
$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 10\,\vec{i} - 22\,\vec{j} - 14\,\vec{k}$$

و منه $\left\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right\| = \sqrt{780}$ ، $\left\|\vec{V}_1\right\| = \sqrt{26}$ و $\left\|\vec{V}_2\right\| = \sqrt{30}$ $\leftarrow$ $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{780}}{\sqrt{26}\,\sqrt{30}} = 1$ $\leftarrow$ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ .

أي أن $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$ ، يمكن أن نتأكد من أن $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = 0$.

- <u>الجداء المختلط</u>:

نعرف الجداء المختلط لثلاث أشعة $\vec{V}_1$ ،$\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$ ، و الذي نرمز له ب $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right)$ على أنه العدد الحقيقي الناتج من الجداء السلمي بين الشعاع الناتج من الجداء الشعاعي بين الشعاعين $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$ و الشعاع $\vec{V}_3$:




$$\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right) = \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) \bullet \vec{V}_3 \quad ......(1.19)$$

ملاحظة: لقد رأينا أن $\left\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right\|$ تمثل مساحة متوازي الأضلاع المرسوم على الشعاعين $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$ ، إذن من السهل أن نستنتج أن $\left|\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) \bullet \vec{V}_3\right|$ تمثل حجم متوازي المستطيلات المرسوم على الأشعة الثلاثة $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right)$ .

العبارة التحليلية للجداء السلمي:

لدينا مما سبق العلاقة (1.18)

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left(y_1 z_2 - z_1 y_2\right)\vec{i} + \left(z_1 x_2 - x_1 z_2\right)\vec{j} + \left(x_1 y_2 - y_1 x_2\right)\vec{k}$ ، و منه:

$$\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) \bullet \vec{V}_3 = \left(y_1 z_2 - z_1 y_2\right)x_3 + \left(z_1 x_2 - x_1 z_2\right)y_3 + \left(x_1 y_2 - y_1 x_2\right)z_3 \quad .......(1.20)$$

يمكن الحصول على نفس العبارة باستخدام طريقة المحدد:

$$\vec{V}_3 \bullet \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left(y_1 z_2 - z_1 y_2\right)x_3 - \left(x_1 z_2 - z_1 x_2\right)y_3 + \left(x_1 y_2 - y_1 x_2\right)z_3$$

وهي نفس العبارة التي تحصلنا عليها بالطريقة المباشرة.

- الجداء الشعاعي المضاعف:

الجداء الشعاعي المضاعف بين لثلاث أشعة $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right)$ هو الشعاع $\vec{D}$ :

$$\vec{D} = \vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$$

يمكن أن نبرهن أن الشعاع $\vec{D}$ يساوي:

$$\vec{D} = \vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right) = \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3\right)\vec{V}_2 - \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)\vec{V}_3 \quad \text{.................(1.21)}$$

للبرهان على ذلك يمكن استخدام تفسيرات هندسية أو مطابقة مركبات الشعاعيين $\vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$ و $\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3\right)\vec{V}_2 - \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)\vec{V}_3$ من المساواة (1.21).

- اشتقاق الأشعة:

لتكن الدالة الشعاعية $\vec{V}(t)$ للمتغير $t$ معرفة ب:

$$\vec{V}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

$(x(t), y(t), z(t))$ دوال حقيقية تتعلق بالمتغير $t$. نعرف مشتق الدالة $\vec{V}(t)$ بالنسبة للمتغير $t$ ب:

$$\vec{V}'(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} \quad \text{............................(1.22)}$$

مركبات الدالة المشتق هي مشتقات المركبات:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \quad \text{............................ (1.23)}$$

خواص الاشتقاق:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=\frac{d\vec{V}_1}{dt}+\frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda\vec{V}\right)=\frac{d\lambda}{dt}\vec{V}+\lambda\frac{d\vec{V}}{dt}$$

(1.24)........................ $$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2\right)=\frac{d\vec{V}_1}{dt}\bullet\vec{V}_2+\vec{V}_1\bullet\frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\right)=\frac{d\vec{V}_1}{dt}\wedge\vec{V}_2+\vec{V}_1\wedge\frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

# الفصل الثاني

## *حركة النقطة المادية*

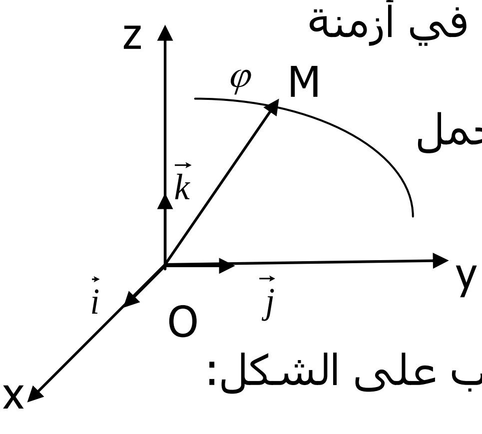
الحركيات هي فرع من علم الميكانيك، يهتم بدراسة حركة الأجسام دراسة وصفية هندسية دون التطرق الى مسسببات الحركة.
نقول عن جسم انه متحرك إذا تغير موضعه في الفضاء مع مرور الزمن.
الفضاء الذي نستخدمه في الميكانيك الكلاسيكي هو فضاء إقليدس ذو ثلاث أبعاد و نأخذ المتر كوحدة لقياس المسافات، و نعتبر الزمن متغير موجب و متزايد و تستعمل الثانية كوحدة لقياسه.
هدف الحركيات هو تحديد الوضعية و تعيين مسار المتحرك في أي لحظة زمنية، و لتحقيق ذلك هناك طريقتين: طريقة شعاع الموضع و طريقة الفاصلة المنحنية.

- <u>شعاع الموضع</u>:

ليكن لدينا متحرك تنسب حركته بالنسبة للمعلم $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، و لتكن M وضعية المتحرك في اللحظة الزمنية t، يعرف شعاع الموضع للمتحرك في اللحظة t على أنه الشعاع الرابط بين مبدأ المعلم$R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ و وضعية المتحرك في نفس اللحظة t، أي الشعاع:

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM} \quad \text{.........................} \quad (2.1)$$

المعادلة (2.1) تمثل قانون الحركة لأنها تسمح لنا بتحديد وضعية المتحرك في أي لحظة زمنية كانت و ذلك بمعرفة $\vec{r}(t)$ كدالة للزمن.




أما المجال الهندسي المحدد بنهايات أشعة الوضع في أزمنة مختلفة فهو يمثل مسار المتحرك $\varphi$.
الآن سوف نرى عبارة شعاع الموضع في مختلف جمل الإحداثيات.

1- الإحداثيات الديكارتية $(x,y,z)$ :
شعاع الموضع في جملة الاحداثيات الديكارتية يكتب على الشكل:

$$\overrightarrow{OM}\left(t\right)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k} \quad \text{....................} \quad (2.2)$$

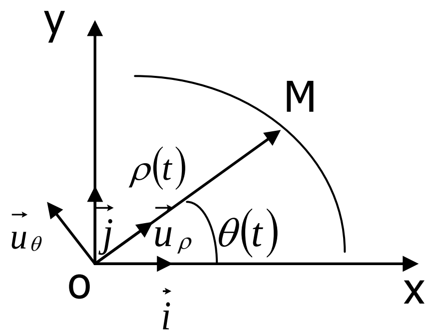
حيث $(x,y,z)$ عبارة عن دوال حقيقية للزمن و مجال تغيرها هو:

$$\begin{cases} -\infty \prec x \prec +\infty \\ -\infty \prec y \prec +\infty \\ -\infty \prec z \prec +\infty \end{cases}$$

طويلة شعاع الموضع هي: $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2}$ ............(2.3)

والأساس الذي يستخدم في جملة الاحداثيات الديكارتية يتشكل من أشعة الوحدة $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

2- الإحداثيات القطبية $(\rho, \theta)$:




شعاع الموضع في جملة الاحداثيات القطبية يعطى ب:

$\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho$ ........... ( 2.4)

- $\rho$ يمثل طويلة شعاع الموضع، $0 \le \rho \prec +\infty$.

- $\theta$ هي الزاوية القطبية، وهي الزاوية المحصورة بين شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ و المحور ox، حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ .

- $\vec{u}_\rho$ هو شعاع الوحدة المحمول على شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ و اتجاهه هو اتجاه تزايد $\rho$.

- $\vec{u}_\theta$ يعرف على أنه: $\vec{u}_\theta = \dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$ و اتجاهه هو اتجاه تزايد الزاوية القطبية $\theta$.

- الأساس المستخدم في جملة الاحداثيات القطبية يتشكل من أشعة الوحدة $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta\right)$.

- علاقات التحويل:

يمكن الانتقال من جملة الاحداثيات الديكارتية إلى القطبية و العكس عن طريق علاقات التحويل الآتية:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \text{.............(2.5)}$$

أما فيما يخص الإنتقال من أساس إلى آخر فيعطى ب:

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases} \quad \text{.............................} \ (2.6)$$

التي يمكن وضعها على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\theta \end{pmatrix} = \overline{M} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \ \text{مع} \ \overline{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\overline{M}$ تسمى مصفوفة الإنتقال من الأساس $(\vec{i},\vec{j})$ إلى الأساس $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$ .

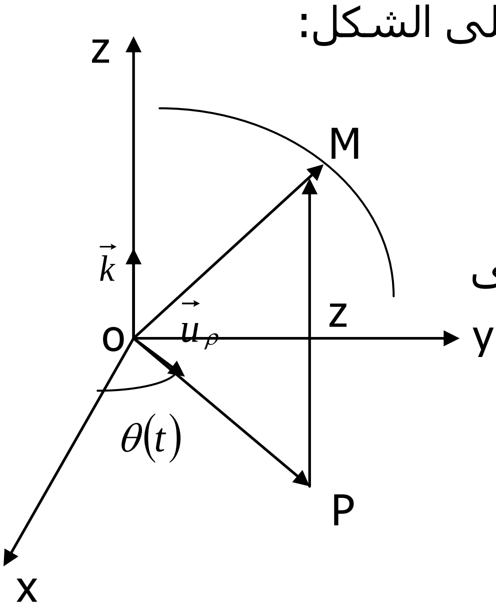
أما التحويل العكسي فيعطى ب:

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\theta \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \overline{\overline{M}} \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\theta \end{pmatrix} \ \text{مع} \ \overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\overline{\overline{M}}$ تسمى مصفوفة الإنتقال من الأساس $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$ إلى الأساس $(\vec{i},\vec{j})$ .

## 3-الإحداثيات الأسطوانية $(\rho,\theta,z)$ :

في الإحداثيات الأسطوانية شعاع الموضع يكتب على الشكل:




$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{OM} &= \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \end{aligned} \quad \text{.................} \ (2.7)$$

حيث الشعاع $\overrightarrow{OP}$ يمثل مسقط شعاع الموضع على المستوي (xoy) و الشعاع $\overrightarrow{PM}$ يمثل مسقط شعاع الموضع على المحور oz.

<u>ملاحظة</u>: الإحداثيات القطبية هي حالة خاصة من الإحداثيات الأسطوانية لما z=0.

- الأساس المستخدم في جملة الإحداثيات الأسطوانية يتشكل من أشعة الوحدة $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{k})$ .

علاقات التحويل:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\theta=\dfrac{y}{x} \\ z=z \end{cases} \quad \text{..............(2.8)}$$

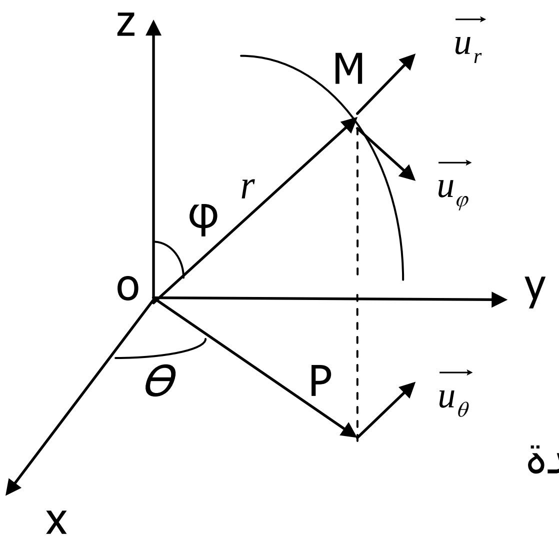
أما فيما يخص علاقات التحويل بين أشعة الوحدة المشكلة للأساسين فهي:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\theta \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

و التحويل العكسي

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\theta \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

4- الإحداثيات الكروية $(r,\theta,\varphi)$ **:**




شعاع الموضع في جملة الإحداثيات الكروية يعطى ب:

$$\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_r \quad \text{.................. (2.9)}$$

- $r$ طويلة شعاع الموضع، $\overrightarrow{u_r}$ يمثل شعاع الوحدة المحمول على $\overrightarrow{OM}$.
- النقطة P هي مسقط M على المستوي (xoy).
- $\theta$ هي الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overrightarrow{OP}$ و المحور ox.
- $\varphi$ هي الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ و المحور oz.

- علاقات التحويل:

من السهل أن نبين أن:

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases} \quad \text{و التحويل العكسي} \quad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ tg\,\theta=\dfrac{y}{x} \\ \cos\,\varphi=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases} \quad \text{..............(2.10)}$$

بتعويض $(x,y,z)$ في عبارة شعاع الموضع في جملة الإحداثيات الديكارتية (العلاقة (2.2)) و بالمطابقة مع العلاقة (2.9) نستنتج أن:

$\vec{u}_r = \sin\phi\cos\theta\,\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k}$، اتجاه $\vec{u}_r$ هو اتجاه تزايد $r$.

$\vec{u}_\theta$ هو شعاع الوحدة المعرف في جملة الإحداثيات القطبية و يعطى ب:

$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$، اتجاه $\vec{u}_\theta$ هو اتجاه تزايد $\theta$.

أما الشعاع $\vec{u}_\varphi$ (اتجاهه هو اتجاه تزايد $\varphi$) فنعرفه بـ:

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r$$

$$\vec{u}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{j} - \sin\varphi\,\vec{k}$$

* بين أن:

$$\begin{cases} \|\vec{u}_r\| = \|\vec{u}_\theta\| = \|\vec{u}_\varphi\| = 1 \\ \vec{u}_r \bullet \vec{u}_\theta = \vec{u}_r \bullet \vec{u}_\varphi = \vec{u}_\theta \bullet \vec{u}_\varphi = 0 \end{cases}$$

إذن أشعة الوحدة $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ تشكل الأساس المستخدم في جملة الإحداثيات الكروية.

نذكر أن:

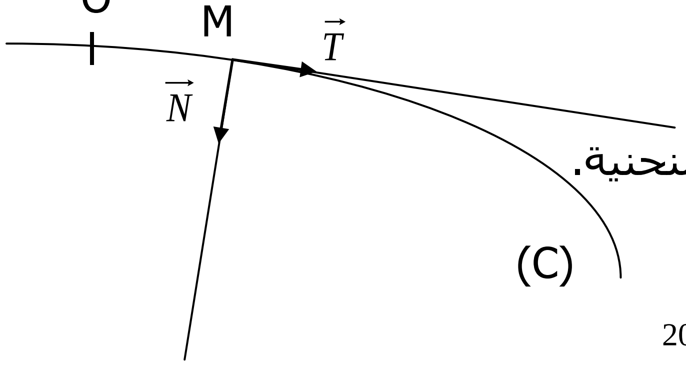
$$\left\{0 \le r \prec +\infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

مصفوفة الإنتقال من أساس إلى آخر هي:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

* أوجد مصفوفة الإتقال العكسي.

• <u>الفاصلة المنحنية</u>:




الطريقة الثانية لوصف حركة المتحرك هي استخدام ما يسمى بالفاصلة المنحنية.
ليكن لدينا مسار متحرك (C) و نحدد عليه بداية للحساب و لتكن

النقطة O، M هي وضعية المتحرك في اللحظة t. تتحدد و ضعية المتحرك في أية لحظة زمنية بإعطاء طول القوس $\overset{\frown}{OM}$ .

طول القوس $\overset{\frown}{OM}$ يسمى الفاصلة المنحنية و نرمز لها ب S، $S=S(t)=\overset{\frown}{OM}$.

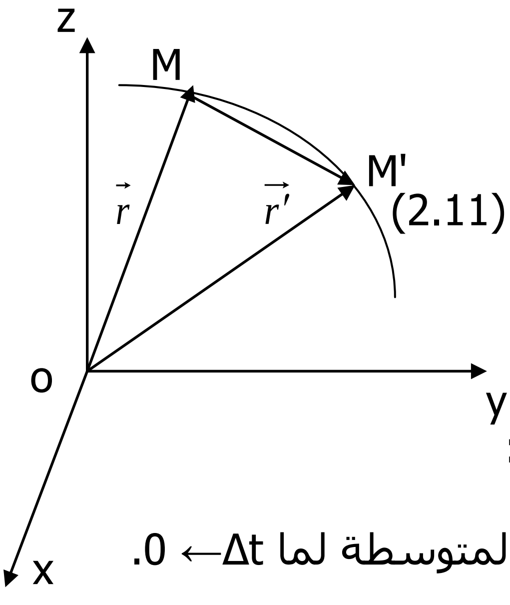
- المعلم الذاتي(معلم FRENET) للفاصلة المنحنية:

مبدأ المعلم هي النقطة M، أي وضعية المتحرك في اللحظة t، له ثلاث محاور:

- المحور المماسي للمسار وشعاع وحدته $\vec{T}$، اتجاه $\vec{T}$ هو اتجاه تزايد الفاصلة المنحنية S.
- المحور الناظمي للمسار و شعاع وحدته $\vec{N}$، اتجاه $\vec{N}$ هو اتجاه تقعر المسار.
- العمود المزدوج و هو عمودي على المحورين السابقين، و شعاع وحدته $\vec{B}=\vec{T}\wedge\vec{N}$.

• <u>التمثل الشعاعي لشعاع السرعة:</u>

لتكن M و ضعية المتحرك في اللحظة t و M' و ضعيته في اللحظة t'=t+Δt، نعرف السرعة المتوسطة (La vitesse moyenne) للمتحرك و التي نرمز لها ب $\vec{v}_{moy}$ بـ:




$$\vec{v}_{moy}=\frac{\vec{r'}-\vec{r}}{t'-t}=\frac{\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} \quad \text{(2.11)......}$$

<u>السرعة اللحظية</u>(La vitesse instantanée):

تعرف السرعة اللحظية على أنها نهاية السرعة المتوسطة لما Δt→ 0.

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_{moy}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r'}-\vec{r}}{t'-t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{(2.12)................}$$

"السرعة اللحظية $\vec{v}(t)$ تساوي المشتقة الأولى لشعاع الموضع $\vec{r}(t)$ بالنسبة للزمن".

<u>ملاحظة</u>: لما $\Delta t\to 0$, الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ يصبح مماسيا للمسار و لهذا السرعة اللحظية تكون دوما مما سية للمسار.

1-الإحداثيات الديكارتية:

$$\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

(2.13)........................

$$\vec{v}(t)=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\,\vec{j}+\dot{z}\,\vec{k}$$

*يجب التنبيه أن أشعة الوحدة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ثابتة (ثابتة الطويلة و الإتجاه) و لهذا مشتقاتها بالنسبة للزمن تساوي الشعاع المعدوم، $\frac{d\,\vec{i}}{dt}=\frac{d\,\vec{j}}{dt}=\frac{d\,\vec{k}}{dt}=\vec{0}$ ، أما طويلة شعاع السرعة فهي:

(2.14).......................... $\|\vec{v}\|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$

2-الإحداثيات القطبية:

$$\overrightarrow{OM}(t)=\rho\vec{u}_\rho$$

$$\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+\rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

عكس أشعة الوحدة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، شعاع الوحدة $\vec{u}_\rho$ متغير الإتجاه و لهذا مشتقه بالنسبة للزمن لا يساوي الشعاع المعدوم. $\overrightarrow{u_\rho}$ يتعلق بالزمن عن طريق الزاوية القطبية Ɵ، ولهذا نشتق بالنسبة ل Ɵ ثم نضرب في مشتق Ɵ بالنسبة للزمن.

$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}=\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ ومنه السرعة اللحظية تأخذ الشكل التالي:

(2.15).............................. $\vec{v}=\dot{\rho}\vec{u}_\rho+\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

و الطويلة: (2.16)......................... $\|\vec{v}\|=\sqrt{\dot{\rho}^2+(\rho\dot{\theta})^2}$

3-الإحداثيات الأسطوانية:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho\vec{u}_\rho + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

(2.17)...................... $$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\vartheta + \dot{z}\vec{k}$$

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\theta}\right)^2 + \dot{z}^2}$$

4-الإحداثيات الكروية:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

نفس الملاحظة $\vec{u}_r$ ليس ثابت بل يتعلق بالزمن و تكون عبارته بدلالة الزاويتين Θ و φ،إذن:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\sin\varphi\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$$

و منه تصبح عبارة السرعة:

(2.18)............................... $$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\sin\varphi\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$$

و الطويلة: (2.19)............................. $$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\sin\varphi\right)^2 + \left(r\dot{\varphi}\right)^2}$$

5- الإحداثيات المنحنية:

لإيجاد عبارة السرعة بدلالة الفاصلة المنحنية، ندخل طول القوس $\overset{\frown}{MM'}$ في عبارة السرعة (العلاقة 2.12):

$$\vec{v} == \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}} \times \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t}$$

- القوس $\overset{\frown}{MM'}$ يمثل التغير في الفاصلة المنحنية بين اللحظتين الزمنيتين t و 't، أي $\overset{\frown}{MM'}=S(t')-S(t)=\Delta S$.

- لما Δt→0، النقطة 'M تقترب من النقطة M، أي يصبح ليس هناك فرق بين طول القوس $\overset{\frown}{MM'}$ و طويلة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$، $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\| \approx \overset{\frown}{MM'}$.

إذن $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \times \frac{\overrightarrow{MM'}}{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|} = \frac{dS}{dt} \times \frac{\overrightarrow{MM'}}{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|}$ و رأينا سابقا أنه لما Δt→0 الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ يصبح مماسيا للمسار، إذن $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|}$ يمثل شعاع الوحدة المماسي $\vec{T}$.

السرعة إذن تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{gathered} \vec{v} = \frac{dS}{dt}\vec{T} = \dot{S}\vec{T} \\ \|\vec{v}\| = \dot{S} \end{gathered} \quad \text{(2.20)}$$

- <u>التمثيل الشعاعي لشعاع التسارع</u>:

إذا كانت $\vec{v}(t)$ تمثل سرعة المتحرك في اللحظة t و $\vec{v}'(t')$ سرعته في اللحظة t'=t+Δt، نعرف التسارع المتوسط $\vec{a}(t)_{moy}$ على أنه النسبة:

$$\vec{a}(t)_{moy} = \frac{\vec{v}'(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} \quad \text{(2.21)}$$

و التسارع اللحظي بـ :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}(t)_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad \text{(2.22)}$$

"التسارع اللحظي $\vec{a}(t)$ يساوي المشتقة الأولى بالنسبة للزمن لشعاع السرعة $\vec{v}$ أو المشتقة الثانية بالنسبة للزمن لشعاع الموضع $\vec{r}$ ".

1-الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{v}(t) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \qquad \text{(2.23)}$$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

2-الإحداثيات القطبية:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \qquad \text{(2.24)}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}\right)^2 + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)^2}$$

3-الإحداثيات الأسطوانية:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \qquad \text{(2.25)}$$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2}$$

4-الإحداثيات الكروية:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\sin\varphi\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{u}_r + \left(\dot{r}\dot{\theta}\sin\varphi + r\ddot{\theta}\sin\varphi + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\vec{u}_\theta +$$

$$r\dot{\theta}\sin\varphi\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \left(\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$$

لحساب المشتقات $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$ و $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$ نستخدم نفس الطريقة التي أستعملناها لحساب $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$، بعد الجمع و التبسيط نتحصل على العبارة الأتية لشعاع التسارع:

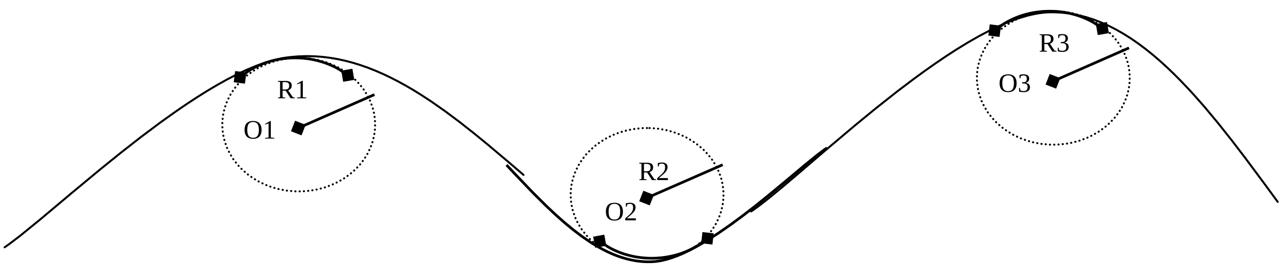
$$\vec{a} = \begin{cases} \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2 \sin^2\varphi\right)\vec{u}_r \\ + \left(2\dot{r}\dot{\theta}\sin\varphi + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi + r\ddot{\theta}\sin\varphi\right)\vec{u}_\theta \\ + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} - r\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi \end{cases} \quad \text{.................(2.26)}$$

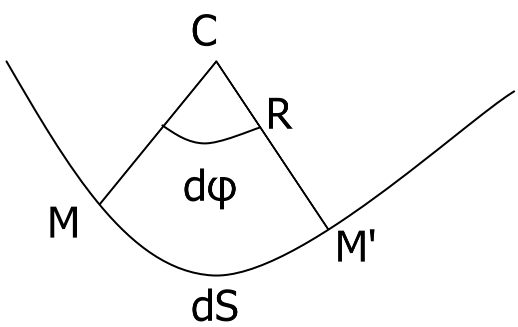
5-الإحداثيات المنحنية:

$$\vec{v} = \frac{dS}{dt}\vec{T} = \dot{S}\vec{T}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{S}\vec{T} + \dot{S}\,\frac{d\vec{T}}{dt}$$

لحساب المشتق $\frac{d\vec{T}}{dt}$ نقدم الملاحظة الآتية: "كل منحنى في المستوي يمكن تجزئته الى عدة أقواس عنصرية، حيث كل قوس يمكن اعتباره كجزء من محيط دائرة ذات مركز معين $C_i$ و نصف قطر $R_i$ محدد".




إذا كانت M وضعية المتحرك في اللحظة t و 'M وضعيته في اللحظة 't، اذن نعتبر القوس $\overset{\frown}{MM'}$ كجزء من الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها R، و يحصر الزاوية $d\varphi$.

*حساب $\frac{d\vec{T}}{dt}$ :

$$\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{d\vec{T}}{dSd\varphi}\times\frac{dSd\varphi}{dt}=\frac{dS}{dt}\times\frac{d\varphi}{ds}\times\frac{d\vec{T}}{d\varphi}$$

لدينا $\frac{d\varphi}{dS}=\frac{1}{R}$ $dS=Rd\varphi\rightarrow$ ، الشعاع $\vec{T}$ ثابت الطويلة $\leftarrow$ $\frac{d\vec{T}}{d\varphi}$ هو شعاع عمودي

على $\vec{T}$، إذن نضع $\frac{d\vec{T}}{d\varphi}=\vec{N}$ ومنه يصبح لدينا:

$\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{\dot{S}}{R}\vec{N}$ وعليه تصبح عبارة التسارع على الشكل التالي:

$$\vec{a}(t)=\ddot{S}\vec{T}+\frac{\dot{S}^2}{R}\vec{N}=a_T\vec{T}+a_N\vec{N}$$

$$a_T=\ddot{S}=\frac{d\|\vec{v}\|}{dt},a_N=\frac{\dot{S}^2}{R}=\frac{\|\vec{v}\|^2}{R} \qquad \text{(2.27)........................}$$

نسمي $a_T$ و $a_N$ المركبتين المماسية و الناظمية لشعاع التسارع على الترتيب.

مثال تطبيقي:

تعطى إحداثيات نقطة مادية تتحرك في المستوي (xoy) بـ:

$a_0$ و ω عبارة عن ثوابت موجبة، Ө تمثل الزاوية القطبية.

$$\begin{cases} x=a_0\sin 2\theta \\ y=a_0(1-\cos 2\theta) \\ \theta=\omega t \end{cases}$$

1- برهن أن $\rho$ يمكن كتابته على الشكل $\rho=2a_0\sin\theta$ .

2- أحسب المركبات القطبية لشعاع السرعة $\vec{v}$ و استنتج $\|\vec{v}\|$ .

3- أوجد عبارة الفاصلة المنحنية S بدلالة الزمن t، علما أنه في اللحظة الابتدائية t=0 كانتS=0.

4- أحسب المركبات القطبية لشعاع التسارع $\vec{a}$ و استنتج $\|\vec{a}\|$ .

5- أحسب $a_T$ و $a_N$ واستنتج نصف قطر انحناء المسار R، ماذا يمكن القول عن طبيعة الحركة؟.

6- أوجد معادلة المسار في جملة الإحداثيات الديكارتية و أرسمه.

*الحل:

1- لدينا $x=\rho\cos\theta \to \rho=\dfrac{x}{\cos\theta}=\dfrac{2a_0\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}=2a_0\sin\theta$

2- $\vec{v}=\dot{\rho}\vec{u}_\rho+\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta=2a_0\omega\left(\cos\theta\vec{u}_\rho+\sin\theta\vec{u}_\theta\right)$

إذن $\|\vec{v}\|=2a_0\omega=cte$

$$\|\vec{v}\|=\dot{S}=\frac{dS}{dt}\to dS=\|\vec{v}\|dt$$

3- لدينا
$$\int_0^S dS=\int_0^t\|\vec{v}\|dt=2a_0\omega\int_0^t dt$$
$$S(t)=2a_0\omega t=2a_0\theta$$

4- $\vec{a}(t)=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho+\left(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta=4a_0\omega^2\left(-\sin\theta\vec{u}_\rho+\cos\theta\vec{u}_\theta\right)$

و منه $\|\vec{a}\|=4a_0\omega^2=cte$

5- $a_T=\dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt}=\dfrac{d}{dt}(2a_0\omega)=0$ و منه $\vec{a}=a_N\overrightarrow{N}\to a_N=\|\vec{a}\|=4a_0\omega^2$

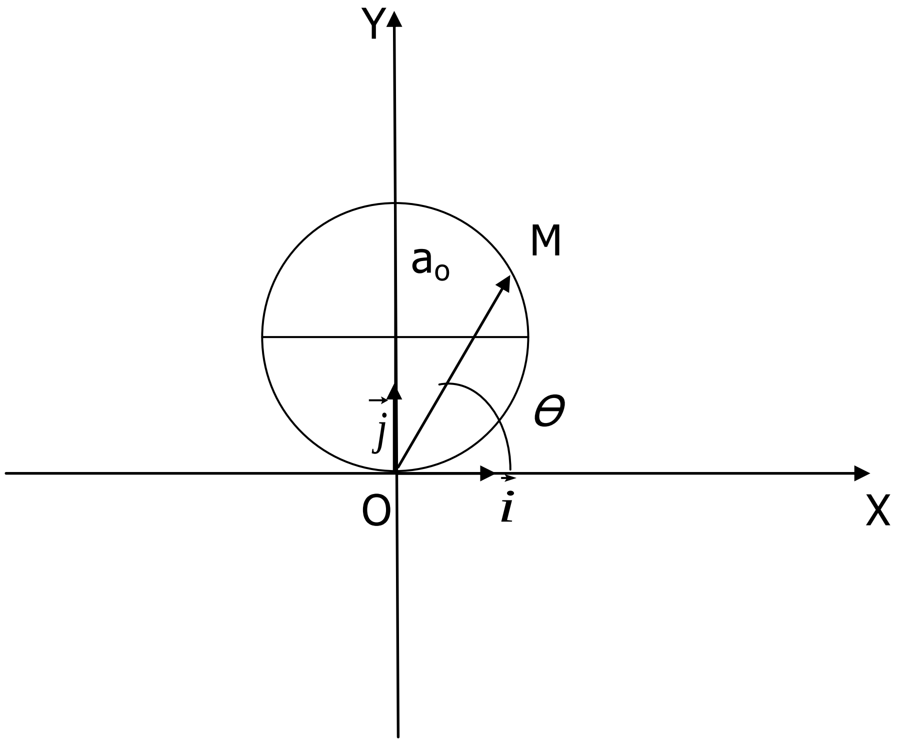
من العلاقة: $a_N=\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R}$ نستنتج عبارة R، $R=\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{a_N}=\dfrac{(2a_0\omega)^2}{4a_0\omega^2}=a_0=cte$ .

بما أن نصف قطر انحناء المسار ثابت و طويلة شعاع السرعة ثابتة فإن الحركة دائرية منتظمة.

6- إنطلاقا من عبارة $\rho$ (السؤال الأول):

$$\rho=2a_0\sin\theta=2a_0\frac{y}{\rho}$$
$$\rho^2=2a_0y=x^2+y^2$$
$$x^2+y^2-2a_0y=0$$
$$x^2+\left(y-a_0\right)^2=a_0{}^2$$

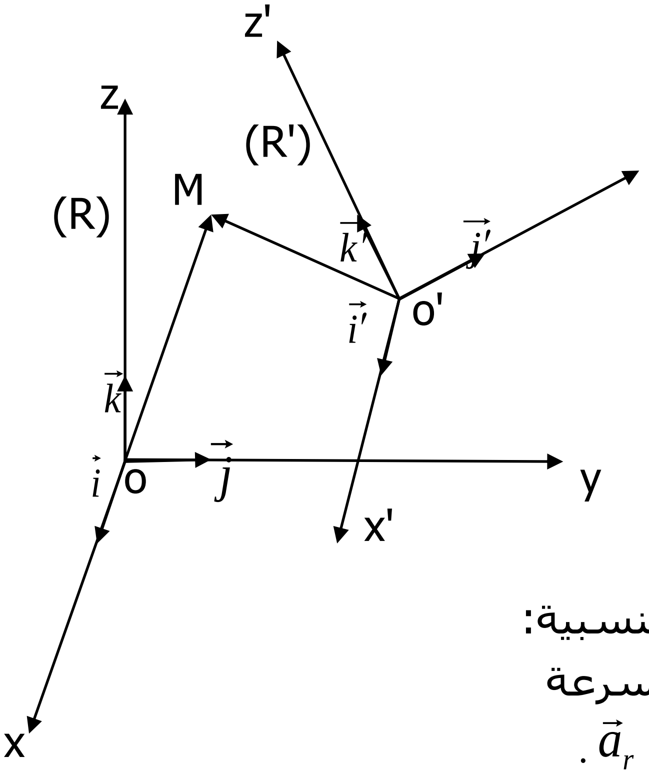
إذن المسار عبارة عن دائرة مركزها $(0,a_o)$ و نصف قطرها $a_o$.



# الفصل الثالث

## *الحركة النسبية*

في الفصل السابق رأينا كيفية حساب المقادير الحركية (أشعة الموضع، السرعة و التسارع) بالنسبة إلى جملة اسناد ثابتة. لكن كما نعلم أن الحركة و السكون هما مفهومان نسبيان، يتعلاقان بالمرجع الذي تنسب اليه الحركة.
السؤال المطروح هو: كيف تتغير هذه المقادير الحركية لما ننتقل إلى جملة متحركة؟
في هذا الفصل سوف نجد العلاقات الموجودة بين المقادير الحركية لما نتحول من جملة إلى أخرى، و هما قانوني تركيب السرعات ( loi de composition des vitesses) و قانون تركيب التسارعات ( loi de composition des accélerations).




إذن ليكن لدينا معلمين، أحدهما ثابت و يسمى المعلم المطلق $R(O,\vec i,\vec j,\vec k)$ و المقادير المرتبطة به نسميها مقادير مطلقة: شعاع الموضع المطلق $\overrightarrow{OM}$،

شعاع السرعة المطلقة $\vec v_a$ و شعاع التسارع المطلق $\vec a_a$، و الآخر متحرك يسمى المعلم النسبي $R'(O',\vec i',\vec j',\vec k')$ و المقادير المتصلة به تسمى المقادير النسبية:
شعاع الموضع النسبي $\overrightarrow{O'M}$، شعاع السرعة النسبية $\vec v_r$ و شعاع التسارع النسبي $\vec a_r$.

1-<u>قانون تركيب السرعات</u>:

السرعة المطلقة $\vec v_a$(vitesse absolue) تساوي مشتق شعاع الموضع المطلق $\overrightarrow{OM}$ بالنسبة للزمن و الاشتقاق يكون في المعلم المطلق (R):

$$\vec v_a = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}\right]_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R + \frac{d}{dt}\left[x'\vec i' + y'\vec j' + z'\vec k'\right]_R \quad \text{........(3.1)}$$

الآن أشعة الوحدة $(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$ تعتبر متحركة بالنسبة للمعلم المطلق (R) وبالتالي فمشتقاتها بالنسبة للزمن لا تساوي الشعاع المعدوم.

إذن:
$$\vec{v}_a=\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R+\left(\dot{x}'\vec{i'}+\dot{y}'\vec{j'}+\dot{z}'\vec{k'}\right)+x'\left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right]_R+y'\left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right]_R+y'\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]_R$$

المقدار $\left(\dot{x}'\vec{i'}+\dot{y}'\vec{j'}+\dot{z}'\vec{k'}\right)$ يمثل سرعة المتحرك في المعلم النسبي ('R)

و نسميه السرعة النسبية (vitesse relative) و نرمز لها ب $\vec{v}_r$ :

$$\vec{v}_r=\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_R=\dot{x}'\vec{i'}+\dot{y}'\vec{j'}+\dot{z}'\vec{k'} \qquad (3.2)$$

و المقدار المتبقي $\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R+x'\left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right]_R+y'\left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right]_R+y'\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]_R$ يسمى سرعة الجر

(vitesse d'entrainement) و نرمز لها ب $\vec{v}_e$ :

$$\vec{v}_e=\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R+x'\left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right]_R+y'\left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right]_R+y'\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]_R \qquad (3.3)$$

و عليه نصل إلى قانون تركيب السرعات:

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e \qquad (3.4)$$

" السرعة المطلقة تساوي مجموع السرعتين، السرعة النسبية و سرعة الجر".

شعاع الدوران الزاوي:

يمكن أن نبرهن على وجود شعاع $\vec{\Omega}$ نسميه شعاع الدوران الزاوي للمعلم النسبي ('R) بالنسبة للمعلم المطلق (R) بحيث:

$$\begin{cases}\left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right]_R=\vec{\Omega}\wedge\vec{i'}\\ \left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right]_R=\vec{\Omega}\wedge\vec{j'}\\ \left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]_R=\vec{\Omega}\wedge\vec{k'}\end{cases} \qquad (3.5)$$

(3.5).......... علاقات بواسون (les relations de Poisson).

باستخدام $\vec{\Omega}$ يصبح لسرعة الجر الشكل التالي:

$$\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R + x'\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{i}'\right) + y'\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{j}'\right) + z'\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{k}'\right)$$

$$\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R + \vec{\Omega}\wedge\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'\right) \quad \text{(3.6)}$$

$$\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

وعليه تصبح عبارة السرعة المطلقة على النحو التالي:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M} \quad \text{(3.7)}$$

نذكر أن شعاع الدوران الزاوي يعطى في الحالة العامة ب: $\vec{\Omega} = \dot{\alpha}(t)\vec{u}$ حيث $\alpha(t)$ تمثل زاوية الدوران و $\vec{u}$ هو شعاع الوحدة المحمول على محور الدوران.

2-<u>قانون تركيب التسارعات:</u>

نتطلق من تعريف التسارع المطلق:

$$\vec{a}_a = \left.\frac{d\vec{v}_a}{dt}\right]_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]_R + \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_R + \frac{d}{dt}\left[\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right]_R$$

$$\vec{a}_a = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]_R + \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right]_R \wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_R$$

الآن نستخدم الخاصية الآتية:

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right]_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{A}$$

فنتحصل على:

$$\left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r = \vec{a}_r + \vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \vec{v}_r + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

بالتعويض في عبارة التسارع نجد:

$$\vec{a}_a = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]_R + \left(\vec{a}_r + \vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r\right) + \dot{\vec{\Omega}}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{v}_r + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

(3.8)................ $$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \left(2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r\right) + \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]_R + \dot{\vec{\Omega}}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

نضع:

$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$ نسميه تسارع كوريوليس (accéleration de Coriolis).

$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]_R + \dot{\vec{\Omega}}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$ يسمى تسارع الجر ( accéleration d’entrainement)، و منه تصبح عبارة التسارع المطلق على النحو التالي:

(3.9)............................. $$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

و هو قانون تركيب التسارعات.

" التسارع المطلق يساوي مجموع التسارعات، النسبي،كوريوليس و تسارع الجر".

حالات خاصة:

1- حركة انسحابية:

إذا كانت حركة (R') بالنسبة ل (R) هي حركة انسحابية فقط، فهذا يعني أن $\vec{\Omega} = \vec{0}$ ، و بالتالي:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R = \vec{v}_r + \vec{v}(O')$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]_R = \vec{a}_r + \vec{a}(O')$$

2- حركة دورانية:

إذا كانت حركة (R') بالنسبة ل (R) هي حركة دورانية فقط و لا وجود للانسحاب، فهذا يعني أن $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$، و بالتالي:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

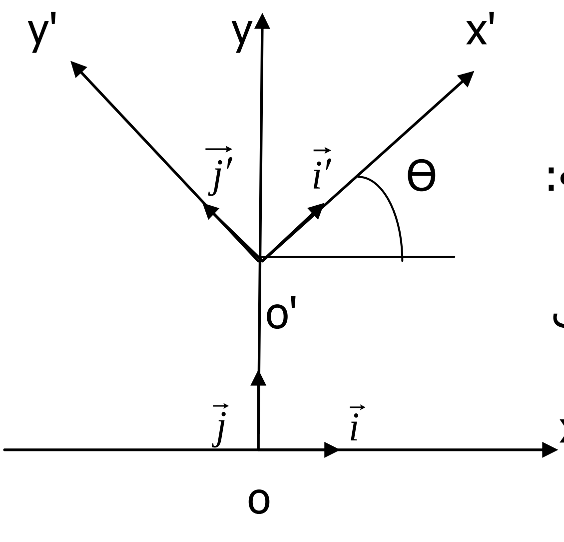
<u>ملاحظة:</u>

إذا كانت حركة (R') بالنسبة ل (R) معرفة بدورانين، فان شعاع الدوران الكلي يعطى ب:
$\vec{\Omega} = \overrightarrow{\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_2}$، $\overrightarrow{\Omega_1}$ يمثل شعاع الدوران حول المحور 1، $\overrightarrow{\Omega_2}$ هو شعاع الدوران حول المحور الثاني 2.

مثال تطبيقي:

تعرف حركة نقطة مادية بالنسبة للمعلم $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ بالعلاقات:

$\begin{cases} x' = +b\cos 2\omega t \\ y' = -b\sin 2\omega t \end{cases}$ حيث $b, \omega$ ثوابت.




يتزحلق المستوي (o'x'y') على المستوي الثابت (oxy) بحيث يكون لدينا في كل لحظة:

$\begin{cases} \overrightarrow{OO'} = h(t)\vec{j} \\ (OX, O'X') = \theta(t) \end{cases}$

1- باستعمال قانون تركيب السرعات أحسب $\vec{v}_a$ في المعلم النسبي $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

2- باستعمال قانون تركيب التسارعات أحسب $\vec{a}_a$ في المعلم النسبي

$R'(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ .

الحل:

1- حسب قانون تركيب السرعات، $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ .

حساب السرعة النسبية:

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{R'} = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}'$$

$$\vec{v}_r = -2b\omega\left(\sin 2\omega t\vec{i}' + \cos 2\omega t\vec{j}'\right)$$

حساب سرعة الجر:

$$\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_{R} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \dot{h}(t)\vec{j} + \dot{\theta}(t)\vec{k}'\wedge\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\right)$$

$$\overrightarrow{v_e} = \dot{h}\left(\sin\theta\vec{i}' + \cos\theta\vec{j}'\right) + \dot{\theta}\left(x'\vec{j}' - y'\vec{i}'\right)$$

$$\overrightarrow{v_e} = \left(\dot{h}\sin\theta + b\dot{\theta}\sin 2\omega t\right)\vec{i}' + \left(\dot{h}\cos\theta + b\dot{\theta}\cos 2\omega t\right)\vec{j}'$$

و منه تصبح عبارة السرعة المطلقةكما يلي:

$$\vec{v}_a = \left[\dot{h}\sin\theta + b\left(\dot{\theta} - 2\omega\right)\sin 2\omega t\right]\vec{i}' + \left[\dot{h}\cos\theta + b\left(\dot{\theta} - 2\omega\right)\cos 2\omega t\right]\vec{j}'$$

2- لدينا قانون تركيب التسارعات، $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \overrightarrow{a_e}$ .

-التسارع النسبي:

$$\vec{a}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}\right]_{R'} = -4b\omega^2\left(\cos 2\omega t\vec{i}' - \sin 2\omega t\vec{j}'\right)$$

-تسارع كوريوليس:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r = 2\dot{\theta}\vec{k}'\wedge\left(-2b\omega\left[\sin 2\omega t\vec{i}' + \cos 2\omega t\vec{j}'\right]\right)$$

$$\vec{a}_c = -4b\dot{\theta}\omega\left(-\cos 2\omega t\vec{i}' + \sin 2\omega t\vec{j}'\right)$$

-تسارع الجر:

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]_R + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\vec{a}_e = \ddot{h}\left(\sin\theta\vec{i}' + \cos\theta\vec{j}'\right) + \ddot{\theta}\vec{k}' \wedge \left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\right) + \dot{\theta}^2\left[\vec{k}' \wedge \left(x'\vec{j}' - y'\vec{i}'\right)\right]$$

$$\vec{a}_e = \left[\ddot{h}\sin\theta + b\ddot{\theta}\sin 2\omega t - b\dot{\theta}^2\cos 2\omega t\right]\vec{i}' + \left[\ddot{h}\cos\theta + b\ddot{\theta}\cos 2\omega t + b\dot{\theta}^2\sin 2\omega t\right]\vec{j}'$$

للحصول على عبارة التسارع المطلق نجمع التسارعات الثلاث.

## الفصل الرابع

## *ديناميك النقطة المادية*

لقد درسنا في الفصل السابق حركة النقطة المادية دراسة وصفية هندسية دون التطرق إلى العوامل الخارجية المسببة للحركة. السؤال المطروح هو ماهي الأسباب الخارجية التي تجعل الأجسام تأخذ حركة معينة دون أخرى؟.
سوف نعتمد على طريقة نيوتن التي تستخدم مفهوم القوة( la notion de force) لتفسير تغير المقادير الحركية للمتحرك مع تغير الزمن. العالم اسحاق نيوتن أسس قوانين الديناميك على أساس ثلاث مبادئ وهي:

1-مبدأ العطالة (Principe d'énertie).

2-المبدأ الأساسي للتحريك (Principe fondamentale de la dynamique).

3-مبدأ الفعل و رد الفعل (Principe d'action et de réaction).

### * القانون الأول: مبدأ العطالة

" يبقى الجسم الحر (المعزول) على حالته السكونية أو الحركة المستقيمة المنتظمة ما لم يؤثر عليه جسم أخر (قوة)، يضطره الى تغيير حالته الحركية".

في الحقيقة لا يمكن أن نجد جسما معزولا تماما عن التأثيرات الخارجية، فكل الأجسام في هذا الكون الشاسع في حالة تأثير متبادل فيما بينها،بحيث يمكن اعتبارها في حالة حركة دائمة. لما تكون محصلة التأثيرات الخارجية معدومة أو ضعيفة بحيث يمكن اهمالها، عندئذ نقول أن الجسم معزول بتقريب جيد.

### -جمل الاسناد العطالية:

لما ننص مبدأ العطالة لابد من تحديد جملة الإسناد أو المرجع الذي يصح فيه المبدأ. نفرض أن حركة الجسم تتم بالنسبة إلى مراقب هو كذلك حر أو جملة اسناد حرة، نسميها إذن جملة اسناد عطالية.

السؤال الذي يمكن طرحه هو، هل كل جمل الاسناد هي جمل عطالية؟ الاجابة هي بطبيعة الحال لا، إذن ماهي مميزات الجمل العطالية؟

نفرض أن الأرض تكون أحسن جملة اسناد عطالية بحيث يتحقق فيها مبدأ العطالة، و ليكن المعلم المطلق R مرتبط بالجملة الأرضية، سوف نسجل للجسم المعزول بالنسبة للمعلم R تسارع معدوم $\overrightarrow{a_R} = \vec{0}$ . ليكن لدينا معلم

ثاني 'R له حركة كيفية بالنسبة ل R، بالنسبة إلى مراقب مرتبط ب 'R سوف يسجل للجسم تسارع يعطى انطلاقا من قانون تركيب التسارعات ب: $\overrightarrow{a_{R'}}=\overrightarrow{a_R}-\overrightarrow{a_e}-\overrightarrow{a_c}$، $\left(\overrightarrow{a_R}=\vec{0}\right)$ و منه $\overrightarrow{a_{R'}}=-\left(\overrightarrow{a_e}+\overrightarrow{a_c}\right)$، في الحالة العامة $\overrightarrow{a_{R'}}\neq\vec{0}$. بالرغم من كون الجسم معزولا الا أنه بالنسبة لمراقب مرتبط ب 'R سوف يسجل للجسم المعزول تسارع غير معدوم $\overrightarrow{a_{R'}}\neq\vec{0}$ ! إلا في الحالات الخاصة التي يكون فيها $\overrightarrow{a_e}=\vec{0},\overrightarrow{a_c}=\vec{0}$ ، عندئذ يصبح $\overrightarrow{a_{R'}}=\vec{0}$ و بالتالي يتحقق مبدأ العطالة. الحالات الخاصة هي التي سوف تحدد لنا مميزات جمل الاسناد العطالية.

إذا كانت حركة 'R بالنسبة الى R هي حركة انسحابية فقط (غير دورانية) فهذا يعني أن $\overrightarrow{a_c}=\vec{0}, \overrightarrow{a_e}=\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]_R$ ، و لكي ينعدم تسارع الجر لابد أن تكون حركة 'R حركة انسحابية منتظمة، عندئذ $\overrightarrow{a_e}=\vec{0},\overrightarrow{a_c}=\vec{0}$ و بالتالي $\overrightarrow{a_{R'}}=\vec{0}$ و مبدأ العطالة يصبح محقق.

إذن مميزات جمل الاسناد العطالية هي إما أن تكون ثابتة أو لها حركة انسحابية منتظمة (سرعة ثابتة) أي أنها جمل غير متسارعة.

للوصول إلى هذه الخصائص، فرضنا أن الأرض تكون أحسن جملة إسناد عطالية يتحقق فيها مبدأ العطالة. نحن نعلم أن الأرض لها حركة دورانية حول نفسها و حول الشمس فهي جملة متسارعة إذن و بالتالي فالفرضية التي إنطلقنا منها خاطئة.
تبقى فكرة الجمل الاسناد العطالية، فكرة و همية تصورية لا أساس لها من الصحة والذي نستخدمه كجمل إسناد عطالية يتم بتقريب جيد لما يكون تأثير اللاعطالة (تسارع الجملة) على حركة الأجسام ضعيف بحيث يمكن إهماله.

*** القانون الثاني: المبدأ الاساسي للتحريك**

1- الكتلة و كمية الحركة:

حسب مبدأ العطالة إذا أثرت قوة على متحرك فإنها سوف تحدث تغييرا على حركته، و هذا التغيير يختلف من جسم إلى آخر. نسمي قابلية الأجسام لتغيير حالتها الحركية ب **العطالة (l'inertie)**. فالجسم الذي عطالته أكبر سوف يبدي مقاومة أكبر لتغيير حالته الحركية. نعبر عن العطالة بمقدار

فيزيائي يخص كل جسم و يميزه عن بقية الأجسام الأخرى، نسمية **الكتلة (la masse)** نرمز لها ب m وحدتها هي الكيلوغرام (kg)، كتلة الجسم هي كمية المادة التي يحتوي عليها و هي مقدار تجميعي.

الآن نعرف مقدار فيزيائي جديد يجمع بين كتلة المتحرك و سرعته و هو شعاع كمية الحركة ونرمز له ب $\vec{P}$ :

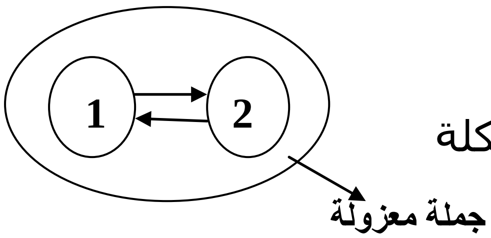
$$\vec{P} = m\vec{v} \quad \text{................(4.1)}$$

باستخدام شعاع كمية الحركة يصبح نص مبدأ العطالة على النحو التالي:

"يتحرك الجسم المعزول بحيث يبقى شعاع كمية حركته ثابتا مع تغير الزمن بالنسبة لأي جملة اسناد عطالية".

## 2- مبدأ انحفاظ كمية الحركة:

ليكن لدينا جسمان 1 و 2 يؤثران في بعضهما البعض فقط و يشكلان جملة معزولة.




في اللحظة t كمية حركة الجسم 1 هي $\vec{P}_1$ و الجسم 2 هي $\vec{P}_2$ و كمية حركة الجملة المشكلة من الجسمين 1 و 2 هي $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$

في اللحظة 't كمية حركة الجسم 1 هي $\vec{P'}_1$ و الجسم 2 هي $\vec{P'}_2$ و كمية حركة الجملة هي $\vec{P'} = \vec{P'}_1 + \vec{P'}_2$ .

ملاحظة: في الحالة العامة $\vec{P}_1 \neq \vec{P'}_1$ و $\vec{P}_2 \neq \vec{P'}_2$ لماذا؟

الجملة معزولة إذن كمية الحركة ثابتة:

$$\begin{aligned}
&\vec{P} = \vec{P'} \\
&\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P'}_1 + \vec{P'}_2 \rightarrow \vec{P'}_1 - \vec{P}_1 = \vec{P'}_2 - \vec{P}_2 \\
&\Delta\vec{P}_1 + \Delta\vec{P}_2 = \vec{0}
\end{aligned} \quad \text{.............(4.2)}$$

"كمية الحركة التي يفقدها أحد الجسمين يكتسبها الأخر بحيث تبقى كمية حركة الجملة محفوظة"

مبدأ انحفاظ كمية الحركة لجسمين في حالة تأثير متبادل فيما بينهما هو امتداد طبيعي لمبدأ العطالة، و يمكن تعميم ذلك إلى جملة مشكلة من N جسم في حالة تأثير متبادل فيما بينها:

$$\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3+......=\sum\vec{P}_i=\overrightarrow{cte} \quad (4.3)$$

مثال تطبيقي: الجملة (المسدس+الرصاصة).

نفرض أن الجملة (المسدس+الرصاصة) تشكل جملة معزولة، الحقيقة غير ذلك لأن الجملة واقعة تحت تأثير حاملها.

- <u>قبل خروج الرصاصة</u>:

*سرعة الرصاصة $\vec{v}_1=\vec{0}$ وكتلتها m، إذن كمية حركة الرصاصة قبل خروجها من المسدس هي $\vec{P}_1=\vec{0}$.

*سرعة المسدس $\vec{v}_2=\vec{0}$ وكتلته M، إذن كمية حركة المسدس قبل خروج الرصاصة هي $\vec{P}_2=\vec{0}$.

إذن كمية حركة الجملة هي: $\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2=\vec{0}$.

- <u>بعد خروج الرصاصة</u>:

*سرعة الرصاصة $\vec{v}'_1$ و كمية حركتها هي $\vec{P}'_1=m\vec{v}'_1$.

*سرعة المسدس $\vec{v}'_2$ و كمية حركته هي $\vec{P}'_2=M\vec{v}'_2$، كمية حركة الجملة هي إذن $\vec{P}'=\vec{P}'_1+\vec{P}'_2=m\vec{v}'_1+M\vec{v}'_2$.

الجملة معزولة إذن كمية الحركة محفوظة: $\vec{P}'=\vec{P}\rightarrow m\vec{v}'_1+M\vec{v}'_2=\vec{0}$

ومنه $\vec{v}'_2=-\frac{m}{M}\vec{v}'_1$، الاشارة (-) في عبارة السرعة $\vec{v}'_2$ تدل على ارتداد المسدس إلى الخلف.

## 3- المبدأ الأساسي للتحريك:

" في معلم عطالي إذا أثرت قوة على جسم متحرك، فإنها سوف تحدث تغييرا في كمية حركته، يكون مساويا لها خلال وحدة الزمن".

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$ (4.4).....................

*حالة خاصة:

في حالة ما إذا كانت الكتلة ثابتة لا تتعلق بالزمن، فإن القوة تصبح:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a}$$ (4.5)................

القوة تساوي جداء كتلة المتحرك في تسارعه.

*** القانون الثالث: مبدأ الفعل و رد الفعل**

نعود إلى الجملة المعزولة المشكلة من الجسمين $1$ و $2$ في حالة تأثير متبادل فيما بينهما، لقد رأينا أن كمية حركة الجملة هي مقدار ثابت

$$\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2=\overrightarrow{cte}$$

نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d\vec{P}_1}{dt}+\frac{d\vec{P}_2}{dt}=\vec{0}\rightarrow\frac{d\vec{P}_1}{dt}=-\frac{d\vec{P}_2}{dt}$$
$$\rightarrow\vec{F}_{2\rightarrow1}=-\vec{F}_{1\rightarrow2}$$ (4.6)...............

" لكل فعل يوجد رد فعل يساويه في الشدة و يعاكسه في الاتجاه".

**-دراسة بعض القوى:**

**قانون التجاذب العام La loi d’attraction universelle**

إذا تركنا جسم بجوار الأرض بدون سرعة ابتدائية، سوف يسقط على سطح الأرض أي أن سرعته قد تغيرت، حسب المبدأ الأساسي للتحريك هناك قوة أثرت عليه هي قوة الجاذبية الأرضية.

إسحاق نيوتن لاحظ أن كل الأجسام مهما كانت كتلتها m تسقط على سطح الأرض بنفس التسارع $\vec{a}$ (إذا كان الاحتكاك مهمل).

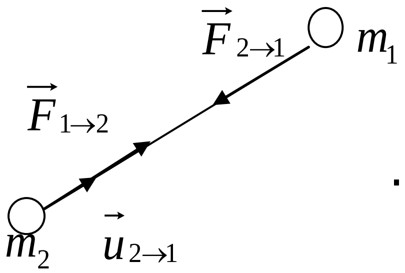
$$\vec{F}_{TC} = m_c \vec{g}_T$$

$\vec{g}_T$ يمثل حقل الجاذبية الأرضية.

$$\vec{F}_{TC} = m_c \vec{a} = m_c \vec{g}_T \rightarrow \vec{a} = \vec{g}_T$$

نيوتن عمم نتائجه على كل أجسام الكون، فارضا وجود قوة تجاذب عام بين الأجسام.

ليكن لدينا جسمان كتلتيهما $m_1$ و $m_2$ البعد بينهما $r$، حسب القانون العام للتجاذب فإن كل منهما سوف يجذب إليه الأخر بقوة لها المميزات التالية:




- شدتها تتناسب طردا مع جداء الكتلتين.
- شدتها تتناسب عكسا مع مربع البعد بينهما.
- حاملها هو المستقيم المار بمركزي ثقلي الجسمين.

حيث قوة جذب الجسم 2 للجسم 1 تعطى بـ:

$$\vec{F}_{2\rightarrow1} = -G\frac{m_2 m_1}{r^2}\vec{u}_{2\rightarrow1} \quad \text{.....................(4.7)}$$

حيث $G = 6.67\times10^{-11}$ ثابت نيوتن و $\vec{u}_{2\rightarrow1}$ هو شعاع الوحدة المتجه من الجسم 2 نحو الجسم 1. بنفس الطريقة قوة جذب الجسم 1 للجسم 2 تعطى بـ:

$$\vec{u}_{2\rightarrow1} = -\vec{u}_{1\rightarrow2}\ ,\ \vec{F}_{1\rightarrow2} = -G\frac{m_2 m_1}{r^2}\vec{u}_{1\rightarrow2}$$

و منه نتحصل على:

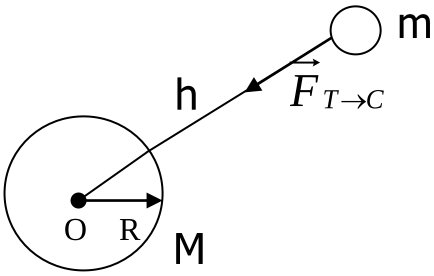
$$\vec{F}_{1\rightarrow2} = -\left(-G\frac{m_2 m_1}{r^2}\vec{u}_{2\rightarrow1}\right) = -\vec{F}_{2\rightarrow1}$$

ملاحظة:

القانون العام للتجاذب يحقق المبدأ الثالث لنيوتن.

*حركة جسم صغير بجوار الأرض:

كتطبيق لقانون التجاذب العام ندرس حركة جسم كتلته m يوجد على ارتفاع h من سطح الأرض، كتلتها M و نصف قطرها R.




حسب قانون العام للتجاذب فإن الأرض سوف تجذب اليها الجسم بقوة شدتها تعطى ب:

$$\left\|\vec{F}_{T\to C}\right\| = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \quad \text{...............(4.8)}$$

و الجسم سوف يجذب إليه الأرض بقوة لها نفس الشدة:

$$\left\|\vec{F}_{C\to T}\right\| = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

و حسب المبدأ الأساسي للتحريك فإن القوة المعطاة بالعلاقة (4.8) تساوي:

$\left\|\vec{F}_{T\to C}\right\| = G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\left\|\vec{a}_C\right\|$ ، $\vec{a}_C$ هو تسارع الجسم و الناتج من تأثير الأرض عليه و يساوي:

$\left\|\vec{a}_C\right\| = G\frac{M}{(R+h)^2}$ وهو يمثل تسارع الجاذبية الأرضية

$$\left\|\vec{a}_C\right\| = \left\|\vec{g}_T\right\| = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad \text{..................(4.9)}$$

*ملاحظات:

- تسارع الجاذبية الأرضية يتناسب عكسا مع علو الجسم عن سطح الأرض h، فكلما ارتفع الجسم كلما نقصت الجاذبية $\left\|\vec{g}_T\right\|$.
- الجاذبية على سطح الأرض (h=0) تتغير من منطقة إلى أخرى لأن الأرض ليست كروية الشكل تماما (R ليس ثابتا).

- قيمة الجاذبية على سطح الأرض:

$$\left\|\vec{g}_0(h=0)\right\| = \frac{GM}{R^2},$$

$$G = 6.67\times10^{-11}, M = 5.98\times10^{24}kg, \; R = 6.37\times10^{6}m \quad \Rightarrow$$

$$\left\|\vec{g}_0\right\| = 9.83\, m/s^2$$

* الآن نطبق المبدأ الأساسي للتحريك على الأرض:

$$\left\|\vec{F}_{C\to T}\right\| = G\frac{Mm}{(R+h)^2} = M\left\|\vec{a}_T\right\|$$

$\vec{a}_T$ هو تسارع الأرض و الناتج من تأثير الجسم عليها و يساوي:

$$\left\|\vec{a}_T\right\| = G\frac{m}{(R+h)^2}$$

الآن نحسب النسبة بين التسارعين:

$$\frac{\left\|\vec{a}_T\right\|}{\left\|\overleftarrow{a}_C\right\|} = \frac{m}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{M}\to 0, \left\|\vec{a}_T\right\|\to 0$$

<u>النتيجة</u>: عند دراسة حركة الأجسام الصغيرة بجوار الأرض، فإن الأرض لا تتأثر بوجودها، و بالتالي فهي جملة غير متسارعة $\left(\left\|\vec{a}_T\right\|=0\right)$ و بالتالي يمكن اعتبارها جملة إسناد عطالية بتقريب جيد.

- قيمة الجاذبية من أجل ارتفعات صغيرة:

الآن سوف نرى كيف تتغير الجاذبية من أجل ارتفعات صغيرة أي:

$$\left\|\vec{g}_T\right\| = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}$$

$$(1+\alpha)^n \approx 1+n\alpha, \alpha \prec\prec 1$$

$$\left\|\vec{g}_T\right\| = \left\|\vec{g}_0\right\|\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

تبقى دائما الجاذبية تتناقص كلما ارتفع الجسم عن سطح الأرض. كما يجب التذكير أن العبارة الأخيرة للجاذبية صالحة فقط من أجل الأرتفعات الصغيرة.

*** نظرية العزم الحركي:**

- العزم الحركي:

ليكن $\overrightarrow{OM}$ شعاع موضع جسم متحرك بالنسبة لجملة إسناد عطالية و $\vec{P}$ شعاع كمية حركته، نعرف شعاع العزم الحركي للمتحرك بالنسبة للنقطة O و الذي نرمز له ب $\overrightarrow{L_O}$ على أنه الشعاع الناتج من الجداء الشعاعي بين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{P}$:

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \quad \text{..................(4.10)}$$

نشتق $\overrightarrow{L_O}$ بالنسبة للزمن:

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \quad \text{..............(4.11)}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{F}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{F}\right)$ يمثل عزم محصلة القوى المؤثرة على المتحرك.

" مشتق شعاع العزم الحركي بالنسبة للزمن يساوي عزم محصلة القوى المؤثرة على المتحرك**"**.

- حالة خاصة:

من العلاقة (4.11) فإن شعاع العزم الحركي $\overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{F}\right)$ ينعدم في الحالتين:

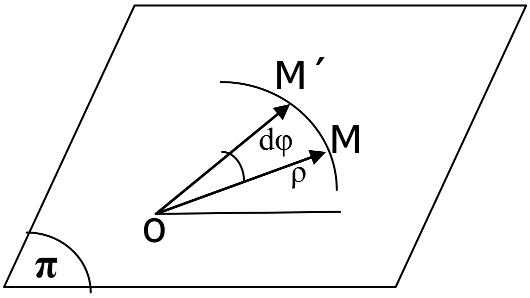
1- لما تكون محصلة القوى $\vec{F}$ معدومة $\vec{F} = \vec{0}$.

2- أو في حالة قوى مركزية أي $\vec{F} // \overrightarrow{OM}$.

في الحالتين يكون لدينا: $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}=\vec{0}$ ، أي أن شعاع العزم الحركي $\overrightarrow{L_O}$ هو شعاع ثابت (ثابت الطويلة و الاتجاه).

$\overrightarrow{L_O}=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}=\overrightarrow{Cte}$ ، ثبوت الإتجاه يعني أن الحركة مستوية، تتم في المستوي الابتدائي المحدد بالشعاعين $\overrightarrow{OM_0}$ و $\vec{v_0}$.

الحركة مستوية نستخدم الإحداثيات القطبية:




$$\overrightarrow{L_0}=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}=\rho\vec{u}_\rho\wedge m\left(\dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho}+\rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$\overrightarrow{L_0}=m\rho^2\dot{\theta}\vec{k}$$

$$\left\|\overrightarrow{L_0}\right\|=m\rho^2\dot{\theta}=Cte\rightarrow\rho^2\dot{\theta}=C$$

ليكن $(\pi)$ المستوي الذي تتم فيه الحركة، نحسب السطح الممسوح من طرف شعاع الموضع بين اللحظتين t و t+dt:

$dS=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MM'}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|=\frac{1}{2}\rho\rho d\theta=\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$ ، و منه:

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}=\frac{1}{2}C \quad (4.12)$$

$\frac{dS}{dt}$ تسمى السرعة القطاعية (la vitesse aréolaire).

<u>قانون السطوح (La loi des aires)</u>:

" إذا كان المتحرك خاضع إلى قوى مركزية، فالحركة تكون مستوية و شعاع الموضع سوف يمسح مساحات(سطوح) متساوية خلال أزمنة متساوية".

<u>مثال تطبيقي</u>:

يتحرك متحرك كتلته m في المستوي (XOY) تحت تأثير قوة مركزية معطاة ب: $\vec{F}=-K\overrightarrow{OM}$ ، $K$ ثابت موجب و $\overrightarrow{OM}$ يمثل شعاع الموضع. في اللحظة

الإبتدائية المتحرك يوجد عند النقطة $M_o$ $(a_o,0)$ بشعاع سرعة إبتدائي $\overrightarrow{v_0}\,(v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha)$ ، $a_o>0$ و $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ .

1- بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك، أوجد المعادلات التفاضلية للحركة وفق المحورين OX و OY.

2- بين أن الحلول من الشكل $\begin{cases} x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ y = C\cos\omega t + D\sin\omega t \end{cases}$ هي حلول

للمعادلات التفاضلية السابقة، يطلب تعيين الثوابت A, B, C, D $\left(\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}\right)$.

3- أوجد معادلة المسار في حالة $\alpha=\frac{\pi}{2}$ و أرسمه.

4- كم يجب أن تكون قيمة الكتلة m حتى يصبح المسار دائريا؟

تطبيق عددي: $K = 25\times10^{-3}, a_0 = 2\,m, v_0 = 5\,m/s$ .

الحل:

1- بتطيق المبدأ الأساسي للتحريك

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$
$$-K\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = m\left(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}\right)$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{K}{m}y = 0 \end{cases}$$

و هي المعادلات التفاضلية للحركة وفق المحورين OX و OY على الترتيب.

-2

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
$$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$
$$\ddot{x} = -\omega^2\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$
$$\ddot{x} = -\omega^2 x \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

و منه الحلول المعطاة هي حلولا للمعادلات التفاضلية السابقة، مع $\omega^2 = \frac{K}{m}$.

- تعيين الثوابت A, B, C, D، باستخدام الشروط الابتدائية للحركة:

$$x(t=0)=a_0=A\cos 0+B\sin 0=A\rightarrow A=a_0$$
$$y(t=0)=0=C\cos 0+D\sin 0=C\rightarrow C=0$$
$$\dot{x}(t=0)=v_0\cos\alpha=-A\omega\sin 0+B\omega\cos 0=B\omega\rightarrow B=\frac{v_0\cos\alpha}{\omega}$$
$$\dot{y}(t=0)=v_0\sin\alpha=-C\omega\sin 0+D\omega\cos 0=D\omega\rightarrow D=\frac{v_0\sin\alpha}{\omega}$$

و منه:

$$\begin{cases} x(t)=a_0\cos\omega t+\left(\dfrac{v_0\cos\alpha}{\omega}\right)\sin\omega t \\ y(t)=\left(\dfrac{v_0\sin\alpha}{\omega}\right)\sin\omega t \end{cases}$$

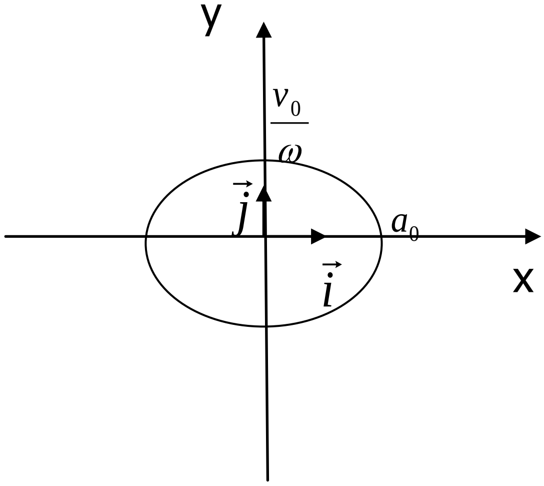
3-في حالة $\alpha=\frac{\pi}{2}$ المعادلات الزمنية للحركة تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} x(t)=a_0\cos\omega t \\ y(t)=\left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)\sin\omega t \end{cases}$$

و عليه نتحصل على معادلة المسار الأتية:

$$\frac{x^2}{(a_0)^2}+\frac{y^2}{\left(v_0/\omega\right)^2}=1$$

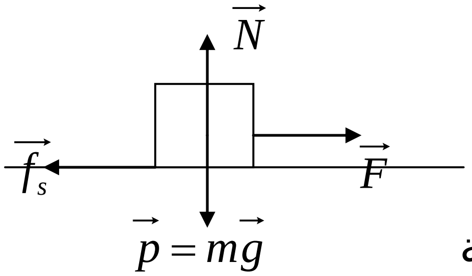
، المسار عبارة عن قطع ناقص نصفي محوريه هما $a_0$ و $\frac{v_0}{\omega}$.



4- يصبح المسار دائريا لما يكون $a_0 = \frac{v_0}{\omega}$ أي $\omega^2 = \left(\frac{v_0}{a_0}\right)^2 = \frac{K}{m} \rightarrow m = \frac{K(a_0)^2}{(v_0)^2}$ بعد تعويض كل من $K, a_0, v_0$ بقيمها نجد أن $m = 4g$ .

## * قوى الاحتكاك بين الأجسام الصلبة:

ليكن لدينا جسم صلب كتلته m موضوع على مستوي خشن(غير أملس)، لما




نطبق القوة $\vec{F}$ على الجسم (تجره نحو اليمين)، فإن هذا الأخير لا يتحرك مباشرة ما لم تبلغ القوة $\vec{F}$قيمة معينة و هذا راجع لوجود قوة معيقة للحركة و هي قوة الاحتكاك السكونية $\vec{f_s}$ (force de frottement statique) ، مصدرها هي قوى التماسك بين السطحين المتلامسين (سطح الجسم و سطح المستوي).

عند التوازن لدينا:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{F} + \vec{p} + \vec{N} + \vec{f}_s = \vec{0}$$

، بعد الاسقاط نجد:

$$\left\|\vec{F}\right\| = \left\|\vec{f}_s\right\|$$

$$\left\|\vec{N}\right\| = \left\|\vec{p}\right\| = mg$$

لحظة بداية الحركة، قوة الاحتكاك السكونية تبلغ أكبر قيمة لها $\vec{f}_{s\,max}$ ، تجريبيا وجد أن $\vec{f}_{s\,max}$ تتناسب طردا مع قوة الرد الفعل العمودي $\vec{N}$ وفق العلاقة التالية:

$$\left\|\vec{f}_{s\,max}\right\| = \mu_s \left\|\vec{N}\right\| \qquad \text{.....................(4.13)}$$

$\mu_s$ يسمى معامل الاحتكاك السكوني.

اذن يبدأ الجسم الحركة لما تصبح $\left\|\vec{F}\right\| \succ \left\|\vec{f}_{s\,max}\right\|$، التجربة تبين أنه بعد بداية الحركة قوة الحتكاك لا تنعدم و لكن تنقص شدتها و نسميها قوة الاحتكاك الحركية $\vec{f}_c$ (force de frottement cinétique) و هي كذلك تتناسب مع الرد الفعل العمودي $\vec{N}$ وفق العلاقةالأتية:

$$\left\|\vec{f_c}\right\| = \mu_c \left\|\vec{N}\right\| \qquad (4.14)$$

$\mu_c$ يسمى معامل الاحتكاك الحركي.

ملاحظات:

- لدينا $\left\|\vec{f_c}\right\| \prec \left\|\vec{f}_{s\max}\right\| \rightarrow \mu_c \left\|\vec{N}\right\| \prec \mu_s \left\|\vec{N}\right\| \rightarrow \mu_c \prec \mu_s$

معامل الإحتكاك الحركي يكون دوما أقل من معامل الإحتكاك السكوني في الحالة العامة.

- هناك علاقة تجريبية بين المعاملين و هي:

$$\mu_c = \mu_s - \frac{a}{g}\sqrt{1+\mu_s^{\,2}}$$

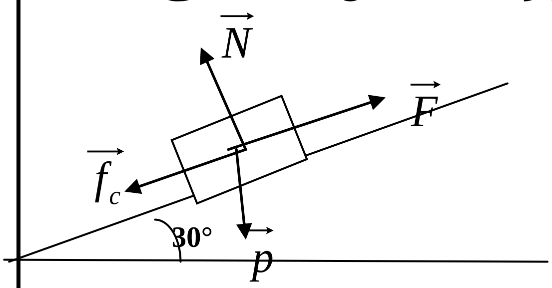
حيث a يمثل تسارع الجسم المتحرك و g هو تسارع الجاذبية الأرضية.

- قيم $\mu_s$ و $\mu_c$ تتعلق بطبيعة السطحين المتلامسين، الجدول الآتي يعطي بعض القيم للمعاملين.

| **المواد** | $\mu_s$ | $\mu_c$ |
|---|---|---|
| فولاذ على فولاذ | 0.78 | 0.42 |
| رصاص على فولاذ | 0.95 | 0.95 |
| نحاس على فولاذ | 0.53 | 0.36 |
| نيكل على نيكل | 1.10 | 0.53 |

مثال تطبيقي:

جسم كتلته 0.08 kg يوجد على مستوي مائل بزاوية 30° عن خط الأفق. ماهي قيمة القوة التي يجب تطبيقها على الجسم لكي يتحرك نحو الأعلى بتسارع يساوي 0.1 m/s²، يعطى $\mu_c = 0.30$ ؟




- بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{p} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f_c} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحاور:

$$\left\|\vec{N}\right\| - \left\|\vec{p}\right\|\cos\alpha = 0 \rightarrow \left\|\vec{N}\right\| = mg\cos\alpha$$

$$\left\|\vec{F}\right\| - \left\|\vec{f}_c\right\| - \left\|\vec{p}\right\|\sin\alpha = m\left\|\vec{a}\right\|$$

$$\left\|\vec{F}\right\| = \mu_c\left\|\vec{N}\right\| + mg\sin\alpha + m\left\|\vec{a}\right\|$$

$$\left\|\vec{F}\right\| = m\left[\left(\mu_c\cos\alpha + \sin\alpha\right)g + \left\|\vec{a}\right\|\right] = 0.604N$$

*** تطبيق المبدأ الأساسي للتحريك في جملة اسناد غير عطالية:**

عند دراسة حركة نقطة مادية في جملة إسناد غير عطالية، لايمكن تطبيق المبدأ الأساسي للتحريك على النحو الذي رأيناه.

ليكن المعلم النسبي (R') له حركة كيفية بالنسبة للمعلم المطلق (R)، حسب قانون تركيب التسارعات لدينا:

$$\vec{a_r} = \vec{a_a} - \vec{a_c} - \vec{a_e}$$

الآن نطبق المبدأ الأساسي في المعلم النسبي (R'):

$$m\vec{a_r} = m\left(\vec{a_a} - \vec{a_c} - \vec{a_e}\right) = m\vec{a_a} - m\vec{a_c} - m\vec{a_e}$$

نضع $\vec{f_e} = -m\vec{a_e}$ قوة الجر و $\vec{f_c} = -m\vec{a_c}$ قوة كوريوليس، ومنه يصبح لدينا:

$$m\vec{a_r} = \sum \vec{F} + \vec{f_c} + \vec{f_e} \qquad (4.15)$$

إذن عند تطبيق المبدأ الأساسي للتحريك في جملة إسناد غير عطالية (R')، فبالاضافة إلى القوى الحقيقية المؤثرة عليه $\sum \vec{F}$ ، سوف يخضع الجسم المتحرك إلى شبه القوى (القوى الزائفة)، قوة الجر $\vec{f_e}$ و قوة كوريوليس $\vec{f_c}$ ، هذه القوى ناتجة من تسارع الجملة، و تنعدمان بانعدام التسارعين، تسارع

الجر $\overrightarrow{a_e}$ و تسارع كوريوليس $\overrightarrow{a_c}$ و لهذا نسميهما بالقوى الزائفة (قوى العطالة).

القوى هي نتيجة التفاعل الذي يحصل بين الجسم و الوسط الذي يحيط به، بحيث نجد فيها مقادير مميزة للوسط المؤثر مثل جاذبية الأرض: $\left\|\overrightarrow{g}_T\right\| = \dfrac{GM}{(R+h)^2}$.

المقدار المميز لقوة الجاذبية هو كتلة الأرض المؤثرة $M$ ، هذه الخاصية لا توجد في قوى العطالة (القوى الزائفة) و الميكانيك الكلاسيكي لا يعطينا إجابة مقنعة لمصدر قوى العطالة. الإجابة نجدها في مبدأ النسبية العامة لأنشتاين (Principe de la relativité générale d'Enstein):

" قوانين الفيزياء لا تتغير بالنسبة لكل ملاحظ مهما كانت حركته".

« L'invariance des lois physiques pour tout observateur quelque soit son mouvement ».

# الفصل الخامس

## *الطاقة و العمل*

في الفصل السابق قمنا بتأسيس قوانين الديناميك على أساس مبادئ نيوتن الثلاثة، التي تستخدم مفهوم القوة لتفسير تغير المقادير الحركية للمتحرك مع الزمن.

المبدأ الأساسي للتحريك يعطينا معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية:

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)=m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

للحصول على قانون الحركة $\vec{r}(t)$ نكامل مرتين العلاقة السابقة (*):

$$\vec{F}(t)=\frac{d\vec{P}}{dt}\rightarrow\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}}d\vec{P}=\int_0^t\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)dt$$

$$\vec{P}-\vec{P}_0=\int_0^t\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)dt\rightarrow\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{1}{m}\int_0^t\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)\,dt=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}d\vec{r}=\vec{v}_0\int_0^t dt+\frac{1}{m}\int_0^t\int_0^t\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)dt\,dt \qquad \text{(5.1)}$$

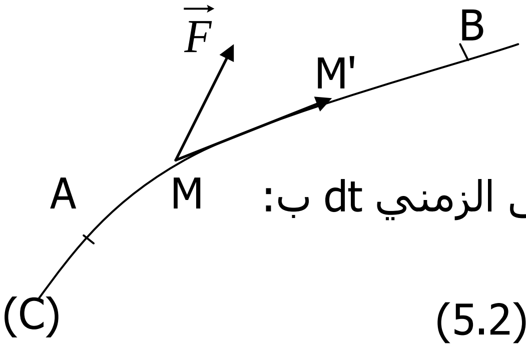
$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\frac{1}{m}\int_0^t\int_0^t\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)dt\,dt$$

المعادلة الأخيرة (5.1) تعطينا قانون الحركة بصفة نهائية في حالة ما إذا أعطيت (عرفت) القوة كدالة للزمن $\vec{F}(t)$. لكن في معظم الأحداث (الظواهر) الفيزيائية، القوة تعطى كدالة لشعاع الموضع (بدلالة وضعية المتحرك) أي $\vec{F}(r)$، إذن لحساب التكامل الثنائي الموجود في عبارة شعاع الموضع نحتاج إلى عبارة $\vec{r}$.

للخروج من هذا الإشكال، سوف نعتمد على قوانين المصونية (إنحفاظ الطاقة) لإيجاد قوانين الحركة و هذا يقودنا إلى تعريف مقادير جديدة هما الطاقة و العمل.

* العمل Le travail:

لتكن M نقطة مادية كتلتها m متحركة على مسار (C) تحت تأثير القوة $\vec{F}$،




بين اللحظتين t و t'=t+dt، النقطة تنتقل من M الى M' بحيث: $d\vec{r} = \overrightarrow{MM'}$ .

نعرف عمل القوة $\vec{F}$ لنقل المتحرك خلال الفاصلى الزمني dt ب:

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{r} \qquad (5.2)$$

وحدة العمل هي الجول joule، و العمل الكلي للإنتقال من A الى B على المسار (C) يساوي مجموع الأعمال العنصرية:

$$W_{AB} = \sum dW = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} \qquad (5.3)$$

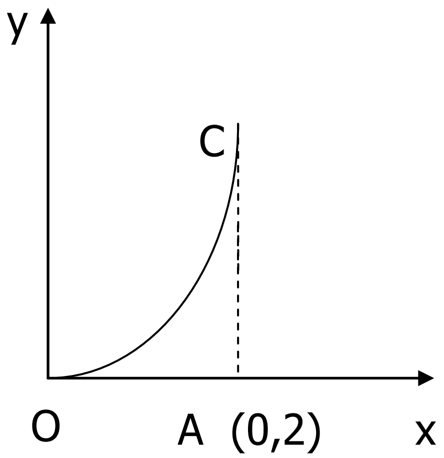
في الإحداثيات الديكارتية لدينا:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) \qquad (5.4)$$

مثال: أحسب عمل القوة $\vec{F}$ اللازم لنقل نقطة مادية من الوضعية O (0,0) إلى C (2،4) على المسار y= x² ، $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$




الحل:

- وفق المسار y= x²

$$W_{0C} = \int_{O(0,0)}^{C(2,4)} \left(F_x dx + F_y dy\right) = \int_O^C \left(x^2 dx + xydy\right)$$

$$y = x^2 \rightarrow dy = 2xdx$$

$$W_{0C} = \int_O^C \left(x^2 dx + x(x^2)2xdx\right) = \int_0^2 \left(2x^4 + x^2\right)dx$$

$$W_{0C} = \frac{2}{5}\left[x^5\right]_0^2 + \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 = \frac{232}{15}\ joule$$

الآن نحسب العمل وفق المسلك من O (0,0) إلى C (2،4) مرورا بالنقطة A (2،0).

- من O إلى A لدينا $0 \le x \le 2$ و $y = 0 \Rightarrow dy = 0$ و عليه:

$$W_{0A} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}\ joule$$

- من A إلى C لدينا $0 \le y \le 4$ و $x = 2 \to dx = 0$ و منه :

$$W_{AC} = \int_0^4 2y dy = \left[y^2\right]_0^4 = 16\ joule$$

العمل الكلي هو:

$$W_{0C} = W_{0A} + W_{AC} = \frac{8}{3} + 16 = \frac{56}{3}\ joule$$

<u>النتيجة</u>:

في الحالة العامة، العمل يتعلق بطبيعة المسار المتبع من طرف المتحرك.

*** الطاقة L'énergie**:

حسب المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

هذا القانون محقق في كل الجمل العطالية، ليكن $\vec{r}$ شعاع الإنتقال في الجملة المختارة، $d\vec{r} = \vec{v}dt$ إذن يمكن كتابة العمل العنصري على الشكل التالي:

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v}dt = md\vec{v} \bullet \vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad \text{..........(5.5)}$$

العمل العنصري للقوة $\vec{F}$ من أجل إنتقال عنصري $d\vec{r}$ خلال الفاصل الزمني $dt$ يساوي تفاضل الكمية الفيزيائية $\frac{1}{2}mv^2$ ، و العمل الكلي للإنتقال من A الى B هو:

$$W_{AB}=\int_A^B dW=\int_A^B d(\frac{1}{2}mv^2)$$

(5.6) ..................
$$W_{AB}=\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_A^B=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$$

المقدار $\frac{1}{2}mv^2$ عبارة عن طاقة و يسمى الطاقة الحركية للمتحرك ( l'énergie cinétique) و نرمز لها ب $E_C$ ، و عليه تأخذ عبارة العمل الشكل الآتي:

(5.7)........................
$$\begin{cases} W_{AB}=E_C(B)-E_C(A)=\Delta E_C \\ E_C=\frac{1}{2}mv^2 \end{cases}$$

**نظرية الطاقة الحركية:**

" العمل المنتج من طرف قوة $\vec{F}$ لنقل متحرك من الوضعية A إلى الوضعية B يساوي التغير في طاقته الحركية بين الوضعيتين".

*** القوى المحافظة، الطاقة الكامنة:**

أ) تدرج دالة φ:

لتكن φ(x،y،z) دالة سلمية للإحداثيات (x،y،z) لنقطة من الفضاء، نسمي تدرج الدالة φ (gradient) الشعاع:

$$\overrightarrow{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}=\vec{\nabla}\varphi$$

(5.8)....................
$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

المؤثر $\vec{\nabla}$ هو مؤثر رياضي يسمى التدرج، مركباته هي المشتقات الجزئية بالنسبة لكل من $x, y, z$ .

نعتبر الإنتقال العنصري $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ ، الآن نحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{grad}\varphi\bullet d\vec{r}$ :

(5.9)..........
$$\overrightarrow{grad}\varphi\bullet d\vec{r}=\vec{\nabla}\varphi\bullet d\vec{r}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=d\varphi$$

نسمي $d\varphi$ التفاضل الكلي للدالة φ.

ب) الطاقة الكامنة:

نقول عن حقل قوى $\vec{f}$ أنه مشتق من كمون (il dérive d’un potentiel) إذا وجدت دالة $E_P(x,y,z)$ بحيث:

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}E_P(x,y,z) = -\vec{\nabla}E_P \quad ................(5.10)$$

$E_P(x,y,z)$ تسمى الطاقة الكامنة (l’énergie potentielle) التي يشتق منها الحقل $\vec{f}$ و كل حقل قوى يحقق العلاقة السابقة نسميه، حقل محافظ (champ conservatif).

ج) خواص الحقول المحافظة:

ليكن لدينا حقل قوى محافظ $\vec{f}$ معرف بمركباته السلمية $\vec{f}(f_x, f_y, f_z)$ ، نحسب العمل العنصري لهذا الحقل:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{f} \bullet d\vec{r} \\ \vec{f} &= -\overrightarrow{grad}\,E_P(x,y,z) \\ dW &= -\overrightarrow{grad}E_P \bullet d\vec{r} = -dE_P(x,y,z) \end{aligned} \quad ..................(5.11)$$

و العمل الكلي للإنتقال من الوضعية A إلى الوضعية B هو :

$$W_{AB} = \int_A^B dW = -\int_A^B dE_P = -\left[E_P(B) - E_P(A)\right] = -\Delta E_P \quad ......(5.12)$$

نظرية الطاقة الكامنة:

"عمل القوى المحافظة (الكمونية) لنقل متحرك من A الى B يساوي إلى نقصان تغير طاقته الكامنة بين الوضعيتين".

ملاحظات:

- عمل القوى المحافظة لا يتعلق بطبيعة المسار، بل بالوضعية الإبتدائية و النهائية للمتحرك.

- عملها على مسار مغلق معدوم $W = \oint \vec{f} \bullet d\vec{r} = 0$

* شرط إشتقاق قوة من كمون:

لتكن $\vec{F}$ قوة محافظة، معرفة بمركباتها السلمية $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\vec{\nabla}E_P = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad \text{(5.13).........}$$

الآن نشتق المركبات السلمية للقوة $\vec{F}$ بالنسبة لكل من $x, y, z$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 E_P}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 E_P}{\partial x \partial y} \end{cases} ، \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial^2 E_P}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 E_P}{\partial x \partial z} \end{cases} ، \begin{cases} \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial^2 E_P}{\partial z \partial y} \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 E_P}{\partial y \partial z} \end{cases} \quad \text{(5.14).......}$$

$E_P(x, y, z)$ دالة سلمية و مستمرة، هذا يعني أن:

$$\frac{\partial^2 E_P}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 E_P}{\partial x_j \partial x_i}, \forall i \neq j \quad \text{(5.15)........................}$$

و منه شرط إشتقاق قوة من كمون هو:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \end{cases} \leftarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \text{(5.16)...........}$$

شرط إشتقاق قوة من طاقة كامنة هو أن دوارنها معدوم $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\vec{0}$ .

مثال: بين أن القوة: $\vec{F}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ هي قوة محافظة و أوجد دالة الكمون المرافقة لها.

الحل:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz & xz & xy\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy)-\frac{\partial}{\partial z}(xz)\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy)-\frac{\partial}{\partial z}(yz)\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(xz)-\frac{\partial}{\partial y}(yz)\right)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=(x-x)\vec{i}-(y-y)\vec{j}+(z-z)\vec{k}=\vec{0}$$

الشرط محقق، إذن فعلا القوة $\vec{F}$ هي قوة كمونية.

<u>إيجاد الطاقة الكامنة</u>:

لدينا: $F_x=-\frac{\partial E_P}{\partial x},F_y=-\frac{\partial E_P}{\partial y},F_z=-\frac{\partial E_p}{\partial z}$ ، لإيجاد عبارة الطاقة الكامنة نكامل مركبات القوة.

$$dE_P(x,y,z)=-F_xdx\to E_P=-\int F_xdx$$

$$E_p=-\int yzdx=-xyz+g(y,z)$$

حيث $g(y,z)$ يمثل ثابت التكامل (كاملنا بالنسبة ل x و أعتبرنا y,z ثابتين)، لإيجاد $g(y,z)$ نستخدم بقية مركبات القوة $F_y$ و $F_z$ .

$$F_y=-\frac{\partial E_P}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left[-xyz+g(y,z)\right]=xz-\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}=xz$$

$$\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}=0\to g(y,z)=Cte=h(z)$$

لإيجاد $h(z)$ نستعمل المركبة الأخيرة $F_z$ :

$$F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[-xyz + h(z)\right] = xy - \frac{\partial h(z)}{\partial z} = xy$$

$$\frac{\partial h(z)}{\partial z} = 0 \rightarrow h(z) = Cte = K$$

و منه نصل إلى العبارة النهائية للطاقة الكامنة:

$$E_P(x,y,z) = -xyz + K$$

أمثلة عن الحقول المحافظة:

1- حقل الجاذبية:

ليكن لدينا جسم يسقط تحت تأثير ثقله فقط و نهمل قوى الإحتكاك، إذن $\vec{F} = \vec{p} = m\vec{g}$ ، ومنه:

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg$$

$$F_z = -mg = -\frac{\partial E_P}{\partial z} \rightarrow E_P = \int mgdz = mgz + K$$

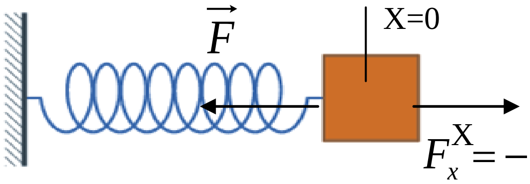
لتحديد قيمة الثابت $K$، نأخذ الطاقة الكامنة معدومة على مستوى سطح الأرض، أي z=0 ومنه $K = 0$، في الأخير الطاقة الكامنة الثقلية تأخذ الشكل التالي:

$$E_P = mgz \quad \text{(5.17)}$$

2- الطاقة الكامنة المرونية:

إذا أزيحت الكتلة m عن وضعية توازنها بمسافة x، فالنابض سوف يطبق عليها قوة إرجاع تعطى ب: $\vec{F} = -Kx\vec{i}$

$K$ ثابت صلابة النابض، إذن لدينا:




$$F_x = -kx, F_y = 0, F_z = 0$$

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} = -kx$$

$$E_P = \int Kxdx = \frac{1}{2}Kx^2 + c$$

لتعيين الثابت c نأخذ $E_P(x=0)=0$ و منه c=0، إذن:

$$E_P(x)=\frac{1}{2}Kx^2 \quad \text{.......................(5.18)}$$

و هي الطاقة الكامنة المرونية للنابض.

3- <u>التكامل الأول للطاقة الحركية: الطاقة الميكانيكية</u>

نظرية الطاقة الحركية في الصيغة التفاضلية هي $dW=dE_C$، و في حالة القوى المحافظة لدينا $dW=-dE_P$ وعليه:

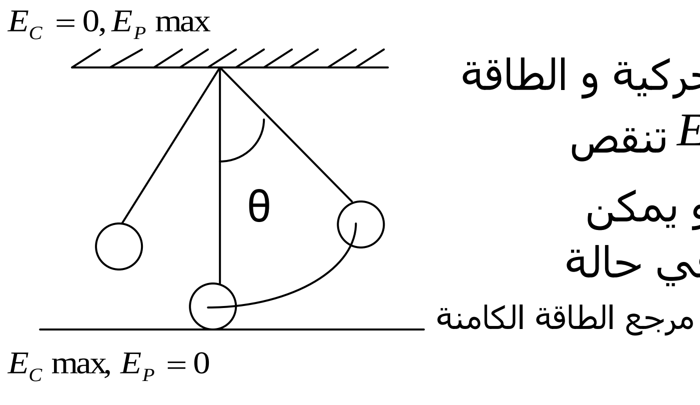
$$dE_C=-dE_P$$
$$d(E_C+E_P)=0 \quad \text{........................(5.19)}$$
$$E_C+E_P=Cte$$

الكمية $E_C+E_P$ تسمى الطاقة الميكانيكية للمتحرك $E_M$ :

$$E_M=E_C+E_P=\frac{1}{2}mv^2+E_P(x,y,z) \quad \text{......(5.20)}$$

<u>نظرية الطاقة الميكانيكية</u>:

"إذا كان المتحرك واقع تحت تأثير قوة كمونية، فطاقته الميكانيكية تبقى محفوظة خلال الحركة"




أي هناك تبادل طاقوي بين الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة، إذا إزدادت الطاقة الحركية $E_C$ تنقص الطاقة الكامنة $E_P$ و العكس صحيح. و يمكن لهذا التبادل أن يتم بصفة دورية كما في حالة حركة النواس البسيط.

مثال: دراسة الهزاز التوافقي

نرجع إلى مثال الكتلة الواقعة تحت تأثير قوة إرجاع النابض، بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك و الإسقاط على محور الإهتزاز نجد:

$$\begin{cases} -Kx=m\ddot{x} \\ \ddot{x}+\omega^2x=0 \end{cases} \quad \text{مع} \quad \omega^2=\frac{K}{m}$$

حلول المعادلة التفاضلية هي من الشكل:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

حيث $x_0$ تمثل الإستطالة الإبتدائية للكتلة في اللحظة t=0.

الطاقة الميكانيكية هي مجموع الطاقتين، الحركية و الكامنة:

$$E_M = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

$$\dot{x} = -\omega x_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$E_M = \frac{1}{2} K x_0^2 = Cte$$

إذن الطاقة الميكانيكية تبقى محفوظة خلال إهتزاز الكتلة.

ملاحظة:

يمكن كتابة الطاقة الميكانيكية على الشكل التالي:

$$E_M = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2 = H(x, p) \quad \text{..............(5.21)}$$

$H(x, p)$ تسمى دالة هاملتون (l'hamiltonien)، و الفضاء $(x, p)$ فضاء الأطوار (espace des phases)، في فضاء الأطوار معادلة المسار هي:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K x^2 = E_M \rightarrow \frac{x^2}{\left(1/K\right)} + \frac{p^2}{m} = 2E_M = Cte$$

معادلة المسار في فضاء الأطوار عبارة عن قطع ناقص نصفي محوريه هما $m$ و $\left(1/K\right)$.

مثال 2: الحركة المستقيمة الناتجة عن قوة كمونية:

في حالة حركة مستقيمة، الطاقة الكامنة هي دالة للمتغير x فقط و لدينا:

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+E_P(x)$$

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-E_P(x)\right)}}$$

نفرض أن القوة ثابتة الشدة و تساوي $F_0$ إذن:

$$\vec{F}=F_0\vec{i}=-\frac{dE_P(x)}{dx}\vec{i}\rightarrow E_P(x)=-F_0x$$

$$t=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+F_0x\right)}}\rightarrow\sqrt{\frac{2}{m}}t=\int_0^x\left(E+F_0x\right)^{-1/2}dx$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t=\frac{2}{F_0}\left(\sqrt{E+F_0x}-\sqrt{E}\right)\rightarrow\left[F_0\sqrt{\frac{1}{2m}}t+\sqrt{E}\right]^2=\left[\sqrt{E+F_0x}\right]^2$$

$$x(t)=\frac{F_0}{2m}t^2+\sqrt{\frac{2E}{m}}t$$

لكن $F_0=ma$ و $E=E_0=\frac{1}{2}mv_0{}^2$ ، بالتعويض في عبارة $x$ نصل في الأخير إلى أن:

$$x(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

إذن نلاحظ أن مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية يعطينا نفس قوانين الحركة التي يعطيها المبدأ الأساسي للتحريك.

* مناقشة منحنيات الطاقة الكامنة:

إنطلاقا من مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية توصلنا إلى العلاقة:

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-E_P(x)\right)}}\quad\text{.........................(5.22)}$$

التي تعطينا الحل العام المحتوي على كل المعلومات الوافية حول سلوك الجملة الميكانيكية، في حقل خارجي كمونه $E_P(x)$ .

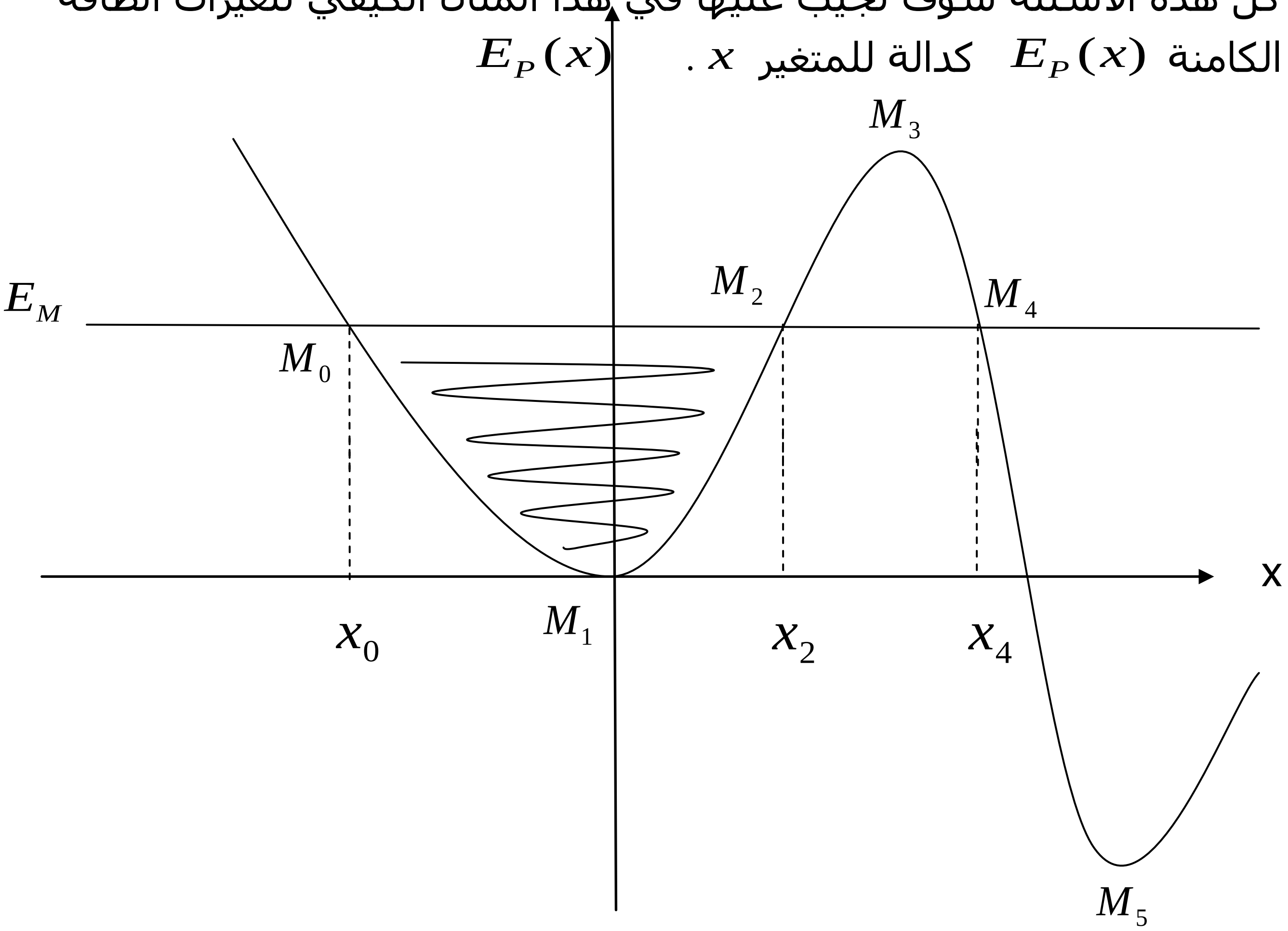
عند إجراء الدراسة الكيفية للحركة، لابد من الإجابة على بعض الأسئلة:

- من أجل أية قيم للطاقة $E$ في حقل معطى كمونه $E_P(x)$ ، تكون الحركة ممكنة من حيث المبدأ؟

- في أي منطقة من مجالات تغير المتغير $x$ تكون الحركة ممكنة (مناطق مسموح بها كلاسيكيا)؟

- ما هي طبيعة الحركة في كل منطقة (مجال)؟

كل هذه الأسئلة سوف نجيب عليها في هذا المثال الكيفي لتغيرات الطاقة الكامنة $E_P(x)$ كدالة للمتغير $x$ .




المناقشة:

- عند النقاط $M_1, M_3, M_5$ لدينا $\frac{dE_P}{dx} = 0$ و منه $\vec{F} = -\frac{dE_P}{dx}\vec{i} = \vec{0}$

النقاط $M_1, M_3, M_5$ تسمى نقاط التوازن. عند $M_1, M_5$ لدينا توازن مستقر (position d’équilibre stable) و عند النقطة $M_3$ هو توازن غير مستقر (position d’équilibre instable).

- النقاط $M_0, M_2, M_4$ هي نقاط تقاطع الطاقة الميكانيكية $E_M$ مع منحنى الطاقة الكامنة $E_P(x)$ ، فواصلها هي $x_0, x_2, x_4$ و تمثل جدور المعادلة $E_M = E_P(x)$.

ملاحظة: عند النقاط $M_0, M_2, M_4$ سرعة المتحرك معدومة لأن الطاقة الحركية تنعدم عندها $E_C = 0$.

- من أجل قيمة محددة للطاقة الميكانيكية $E_M$ ، لدينا:

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(x) \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = E_M - E_P \geq 0$$

إذن المجالات التي تكون فيها الحركة ممكنة، هي تلك التي يتحقق فيها الشرط الآتي:

$$E_M - E_P \geq 0 \rightarrow E_M \geq E_P \qquad (5.23)$$

حسب الشكل الحركة ممكنة في المجال $[x_0, x_2] \cup [x_4, \infty[$ و مستحيلة في المجال $]-\infty, x_0[ \cup ]x_2, x_4[$.

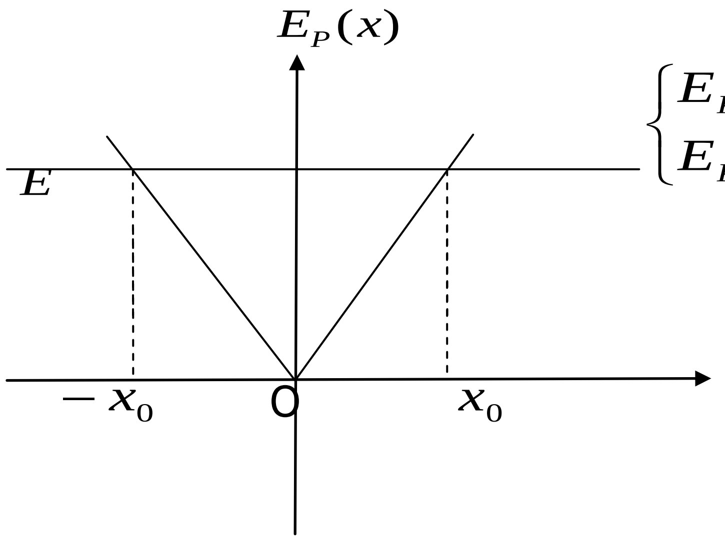
- المجال $[x_0, x_2]$ يدعى الحفرة الكمونية (puit de potentiel) و الحركة في هذا المجال هي حركة محدودة (السرعة تنعدم عند النقاط $M_0, M_2$) و هي حركة إهتزازية دورية دورها هو:

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\left(E - E_P(x)\right)}} \qquad (5.24)$$

حيث $x_0, x_2$ هما جدور المعادلة $E_M = E_P(x)$.

مثال: أحسب دور إهتزاز جسم كتلته m واقع في حفرة كمونية أحادية البعد، معرفة ب:

$$\begin{cases} E_P(x) = F_0 x, \ldots\ldots . x \geq 0 \\ E_P(x) = -F_0 x, \ldots\ldots x \prec 0 \end{cases}$$




الحل:

لدينا مما سبق:

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_0}^{-x_0} \frac{dx}{\sqrt{\left(E - E_P(x)\right)}} = 2\sqrt{2m}\int_{0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - F_0 x}}$$

$$T = \frac{4\sqrt{2m}}{-F_0}\left(\sqrt{E - F_0 x_0} - \sqrt{E}\right) = \frac{4\sqrt{2mE}}{F_0}$$

نذكر أن $x_0$ هو جذر للمعادلة $E = F_0 x$ .

* <u>نظرية الطاقة الميكانيكية في حالة وجود قوى غير محافظة</u>:

رأينا أنه في حالة جسم واقع تحت تأثير قوى محافظة، أن طاقته الميكانيكية تبقى محفوظة خلال الحركة. لكن في بعض الحالات، خاصة في حالة وجود قوى الإحتكاك، الطاقة تصبح غير محفوظة.

نفرض أن المتحرك يخضع أثناء حركته إلى تأثير قوى كمونية $\vec{F}$ و أخرى غير ذلك $\vec{F'}$ ، بتطبيق نظرية الطاقة الحركية:

$$(5.25)\ldots\ldots\ldots \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = W\left(\vec{F}\right) + W'\left(\vec{F'}\right)$$

$W(\vec{F})$ يمثل عمل القوى المحافظة، و $W'(\vec{F'})$ يمثل عمل القوى الغير كمونية. من جهة ثانية لدينا حسب نظرية الطاقة الكامنة:

$$(5.26)\ldots\ldots\ldots\ldots W(\vec{F}) = -\Delta E_P = -\left(E_P(B) - E_P(A)\right)$$

بالتعويض في تغير الطاقة الحركية (5.25) نجد:

$$E_C(B)-E_C(A)=-\left(E_P(B)-E_P(A)\right)+W'\left(\overrightarrow{F'}\right)$$
$$W'(\overrightarrow{F'})=\left[E_C(B)+E_P(B)\right]-\left[E_C(A)+E_P(A)\right]$$
$$W'(\overrightarrow{F'})=E_M(B)-E_M(A)=\Delta E_M \quad \text{..........(5.27)}$$

" التغير في الطاقة الميكانيكية لمتحرك يخضع لقوى كمونية و أخرى غير ذلك، يساوي عمل القوى الغير محافظة".

في هذه الحالة، نقول أن الجملة مضيعة للطاقة نتيجة خضوعها إلى قوى غير محافظة، هذه القوى عادة ما تكون معاكسة للحركة و منتجة لعمل سالب.

## المراجع


1-Giancoli, 3Physique générale 1 : Mécanique et thermodynamique », Deboeck Université 1993.

2- Alonso Finn, « Physique générale tome 1 », Inter Editions 1977.

3- Alain Gibaud et Michel Henry, « Cours de physique : Mécanique du point », Dunod 2007.

4- عبد االه موسى، "الميكانيك الكلاسيكي الجزء الأول"، ديوان المطبوعات الجامعية 1987.

5- عقيل عزيز داخل، "أسس الميكانيك التقليدي"، ديوان المطبوعات الجامعية 1988.

6- بن عميرة فريد، "ميكانيك النقطة المادية"، مطبوعة بيداغوجية، المدرسة العليا للأساتذة جيجل.