

Chapitre 1

Généralités et notions
préliminaires

SOMMAIRE DU CHAPITRE

1	Motivation d'étude de la commande non linéaire	1
2	Expression mathématique des systèmes non linéaires	1
3	Distinction entre Système linéaire et système non linéaire	2
4	Principaux phénomènes de non linéarité dans les systèmes non linéaires	2
5	Point d'équilibre d'un système non linéaire	3
6	Types des fonctions non linéaires	4
7	Exemples des systèmes non linéaires	4
7.1	Pendule	4
7.2	Circuit RLC et diode avec effet tunnel	5
8	Analyse dans le plan de phases	6
8.1	Diagramme des champs de vecteurs	6
8.2	Isoclines	7
8.3	Comportement des systèmes linaires	8
8.3.1	Critère de Hurwitz	9
8.3.2	Cas d'un système linéaire de deuxième ordre :	10
8.3.2.1	Comportement du système lorsque λ_1 et λ_2 sont réels et distincts : $\lambda_1 \neq \lambda_2$	11
8.3.2.2	Comportement du système lorsque λ_1 et λ_2 sont complexes : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$	14
8.3.2.3	Comportement du système lorsque λ_1 et λ_2 sont multiples $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$	14
8.4	Comportement local des systèmes non linéaires	16
8.4.1	Exemple 1	17
8.4.2	Exemple 2	19

1 Motivation d'étude de la commande non linéaire

Plusieurs outils et méthodes performantes et robustes sont développés pour l'analyse et la commande des systèmes linéaires.

Pratiquement, les systèmes purement linéaires sont rares. La majorité des systèmes réels sont non linéaires.

Certains systèmes non linéaires peuvent être approchés et approximés par des systèmes linéaires, dans le but de pouvoir appliquer les outils linéaires de conception, d'analyse et de contrôle sur ces systèmes approximés.

Cependant, cette approximation des systèmes non linéaires par des systèmes linéaires est une linéarisation locale limitée au voisinage d'un point de fonctionnement donnée : elle ne donne pas une idée sur le comportement du système dans tout l'ensemble de définition.

En plus, certains systèmes ont des caractéristiques intrinsèques non linéaires qui ne peuvent être décrits en utilisant des systèmes linéaires. Ce type des systèmes nécessite des outillés d'analyses et de contrôle nécessairement basé sur des concepts non linéaires.

Même pour un système linéaire, s'il existe des incertitudes, des stratégies de contrôle non linéaires telles que le contrôle adaptatif peuvent doivent être utilisés.

Il est donc nécessaire et exigent de développer des outils et des méthodes d'analyse et de commande des systèmes non linéaires.

2 Expression mathématique des systèmes non linéaires

Les systèmes dynamiques non linéaires sont généralement décrits par un ensemble d'équations différentielles non linéaires du premier ordre, de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Avec : $x = [x_1, \dots, x_n]^T$: est le vecteur d'état, composé par les n variables d'état ;

$u = [u_1, \dots, u_m]^T$ est le vecteur d'entrée, vecteur d'influence externe sur le système ;

$y = [y_1, \dots, y_s]^T$ est le vecteur de sortie qui regroupe les variables qu'on veut mesurer ;

$f = [f_1, \dots, f_n]^T$ et $h = [h_1, \dots, h_s]^T$ sont des vecteurs des fonctions non linéaires par rapport aux états et/ou entrées.

La dimension n du vecteur d'état x est l'**ordre du système**

Si les vecteurs d'entrée u et de sortie y ont la même dimension ($m=s$), le **système est carré**.

L'**équation d'état** est la première équation du système (1.1) :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1.2)$$

L'équation de sortie est la deuxième équation du système (1.1) :

$$y = h(x, u, t) \quad (1.3)$$

Le modèle d'état du système non linéaire est l'ensemble des équations d'état (1.2) et de sortie (1.3)

L'équation d'état (1.2) est dite **non forcée** si la fonction f ne dépend pas explicitement de l'entrée u :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.4)$$

Dans ce type d'équations d'état, l'entrée u n'est pas forcément nulle : elle peut être une fonction du temps : $u = \gamma(t)$, des états : $u = \gamma(x)$ ou des deux en même temps : $u = \gamma(t, x)$

Le système non linéaire est **autonome** ou **invariant dans le temps** si son équation d'état ne dépend pas explicitement du temps :

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.5)$$

Le système autonome n'est pas affecté si on change l'origine du temps : si on remplace t par $\tau = t - a$, la fonction f reste inchangé.

Un système linéaire est un cas particulier d'un système non linéaire, pour lequel les fonctions f et h sont linéaire par rapport aux états et aux entrées :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}; A \in \mathbb{R}^{n \times m}; C \in \mathbb{R}^{s \times n}; D \in \mathbb{R}^{s \times m}$$

Si les matrices A, B, C et D sont indépendantes du temps, le système décrit par l'équation (1.6) est dit : **invariant dans le temps**.

3 Distinction entre Système linéaire et système non linéaire

Un système est **linéaire** si son ensemble de définition vérifie le principe de superposition :

$$\forall z_1, z_2 \in B, \text{ et } \forall c \in \mathbb{R} : z_1 + z_2 \in B, \text{ et } c.z_1 \in B \quad (1.7)$$

Un système qui ne vérifie pas le principe de superposition est un système **non linéaire**.

4 Principaux phénomènes de non linéarité dans les systèmes non linéaires

La non-linéarité des systèmes dynamiques est provoquée par plusieurs phénomènes, dont les principaux sont les suivants :

Points d'équilibres multiples

Souvent, les systèmes non linéaires ont plusieurs points d'équilibre, ce qui n'est pas le cas pour les systèmes linéaires. On prend par exemple le système suivant :

$$\dot{x} = -x + x^2 \quad (1.8)$$

Ce système a deux points d'équilibre : $x = 0$ et $x = 1$. Le comportement de ce système autour d'un de ces points d'équilibre est très différent de son comportement autour de l'autre point d'équilibre. Ainsi, on ne peut pas approximer ce système par une seule fonction linéaire.

Cycles limites

C'est le phénomène d'existence des solutions périodiques qui attire les trajectoires du voisinage.

Harmoniques de la sortie

Si l'entrée d'un système linéaire est une fonction harmonique, sa sortie est une autre fonction harmonique de même fréquence, mais d'amplitude et phase différentes. Si la même fonction harmonique est appliquée à l'entrée d'un système non linéaire, sa sortie est une fonction composée des harmoniques de fréquences multiples et des subharmoniques de fractions de fréquence de la fonction d'entrée. On rencontre souvent ce phénomène dans les réseaux d'énergie électriques contenant des convertisseurs de puissance.

Divergence en un temps fini

Les états d'un système non linéaire peuvent tendre vers l'infini dans un temps fini et limité, chose qui ne se produit pas dans le cas des systèmes linéaires, même s'ils sont instables. La divergence en un temps fini pose un problème de conception pour les systèmes non linéaires, à cause de l'absence de la trajectoire dans les régions de cette divergence.

Convergence en temps fini

La convergence au point d'équilibre peut se produire rapidement dans les systèmes non linéaires, chose qui ne se produit pas pour les systèmes linéaires où la convergence au point d'équilibre est exponentielle et asymptotique.

Chaos

Pour certains types des systèmes non linéaires, les trajectoires sont limitées mais ne convergent pas vers des points d'équilibres ou des cycles limites. Ils peuvent avoir des solutions quasi périodiques, et leur comportement est difficilement prédictible.

5 Point d'équilibre d'un système non linéaire

Un point X^* dans l'espace d'état est un point d'équilibre si, à chaque fois que ce point X^* est l'état initial, l'état reste à ce point X^* pour tous les instants future :

$$X(t_0) = X^* \Rightarrow X(t) = X^*, \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.9)$$

Pour un système autonome, les points d'équilibres sont les solutions de l'équation : $f(X) = 0$.

Le point d'équilibre d'un système peut être :

- isolé, s'il n'existe pas d'autres points d'équilibre dans son voisinage ;
- une continuité des points d'équilibres, s'il est entouré d'autres points d'équilibre.

6 Types des fonctions non linéaires

Les non linéarités des systèmes non linéaires sont exprimés par des fonctions non linéaires f et h . Ces fonctions non linéaires peuvent être classées en deux types :

- ❖ Le premier type des fonctions non linéaires sont les fonctions analytiques et leurs compositions telles que les fonctions polynomiales, sinusoïdales ou exponentielles. Ces fonctions sont dérivables, et on peut les faire décomposer en séries de Taylor pour avoir une bonne approximation ç n'importe quel point.
- ❖ Le deuxième type des fonctions non linéaires sont les fonctions linaires par morceaux, mais avec certains points de discontinuité ou du non dérivabilité. Plusieurs systèmes physiques peuvent être modélisés par ce type de fonctions telles que les switches, les relais idéals ou les relais à hystérésis. Les non linéarités décrites par les fonctions linaires par morceaux sont appelées les non linéarités dures. A noter que ces non linéarités dures sont également utilisées pour la conception de certains types de commande appliquées même sur des systèmes linéaires, tel que la commande par mode de glissement.

7 Exemples des systèmes non linéaires

7.1 Pendule

L'équation de mouvement d'un pendule (fig.1.1) est donnée par :

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - kl\dot{\theta} \quad (1.10)$$

Avec : m : la masse de la boule du pendule ;

l : la longueur de la barre du pendule ;

k : coefficient de frottement ;

θ : angle formé par la barre et la verticale.

Donner le modèle d'état du pendule.

On pose :

$$x_1 = \theta; \quad x_2 = \dot{\theta}$$

Le modèle d'état est alors le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

C'est un système non linéaire d'ordre 2.

Quelles sont les points d'équilibre de ce système ?

Ce système est autonome. Les points d'équilibre sont les solutions de l'équation $f(X) = 0$:

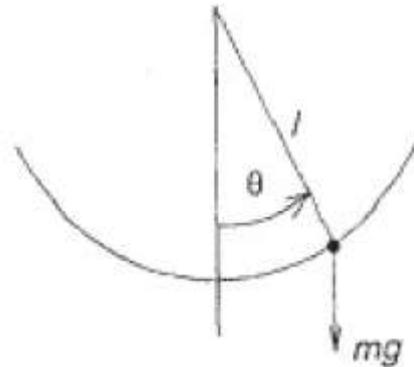


Fig.1.1

$$x_2 = 0$$

$$-\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0$$

Ainsi : $x_2 = 0$; $\sin x_1 = 0$. Les points d'équilibre sont alors les suivants : $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$

Le pendule a deux points d'équilibre : $(0,0)$ et $(\pi,0)$. Les autres points d'équilibre sont des répétitions de ces deux points correspondantes aux balançoires du pendule avant de s'arrêter.

7.2 Circuit RLC et diode avec effet tunnel

La diode à effet de tunnel a le symbole et la caractéristique indiquée à la fig.1.2. Cette caractéristique donne la relation entre son courant et sa tension : $i_R = h(v_R)$.

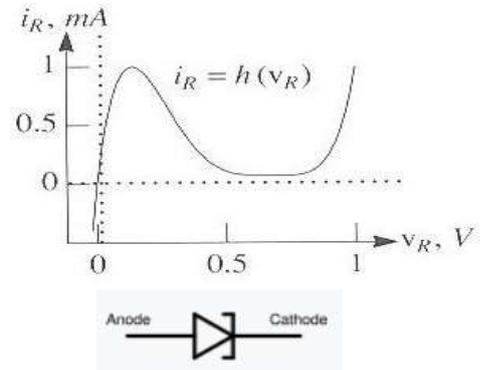


Fig.1.2 Diode à effet tunnel

La fig.1.3 indique un circuit RLC menu d'une diode à effet de tunnel. L'application des lois de Kirchoff sur ce circuit donne les deux relations suivantes :

$$i_C + i_R - i_L = 0$$

$$v_C - E + Ri_L + v_L = 0$$
(1.12)

Pour écrire le modèle d'état de ce système, on désigne les **variables d'état** :

$$x_1 = v_C ; \quad x_2 = i_L$$

La tension E est considérée comme une **entrée** constante :

$$u = E$$

Le modèle d'état est alors le suivant :

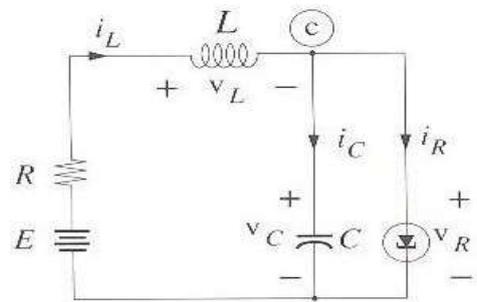


Fig.1.3 Circuit RLC avec diode à effet tunnel

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} [-h(x_1) + x_2]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} [-x_1 - Rx_2 + u]$$
(1.13)

Les points d'équilibre de ce système vérifient l'équation: $\dot{x}_1 = 0$; $\dot{x}_2 = 0$.

$$\frac{1}{C} [-h(x_1) + x_2] = 0$$

$$\frac{1}{L} [-x_1 - Rx_2 + u] = 0$$

Ainsi :

$$x_2 = -h(x_1)$$

$$x_2 = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$$

Les points d'équilibre sont les points d'intersection de la courbe $x_2 = -h(x_1)$ et de la droite $x_2 = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$, comme indiqué à la fig.1.4

$x_2 = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$, comme indiqué à la fig.1.4

Pour certaines valeurs de E et R, on peut avoir 3 points d'équilibre Q_1 , Q_2 et Q_3 .

Pour des fortes valeurs de E, on a un seul point d'équilibre Q_3

Pour des faibles valeurs de E, on a un seul point d'équilibre Q_1

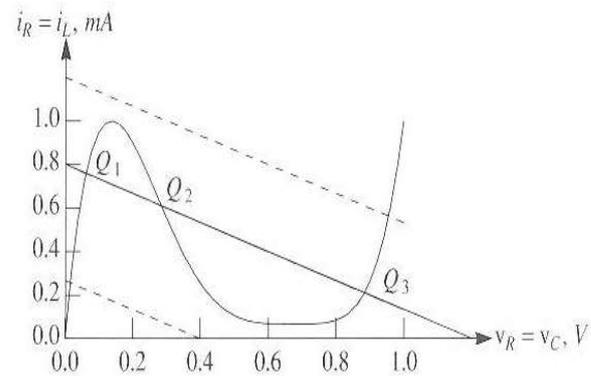


Fig.1.4 Point d'équilibre

8 Analyse dans le plan de phases

L'analyse dans le plan de phase est une méthode graphique pour l'analyse et l'étude des systèmes de deuxième ordre, qui consiste à déterminer les trajectoires de déplacement des variables d'état correspondants aux différentes conditions initiales. Cette méthode permet de tirer des conclusions concernant la stabilité et le comportement du système.

Les systèmes concernés par cette méthode ont l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.14)$$

f_1 et f_2 sont des applications $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

La réponse du système $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ correspondante à une condition initiale $x_0 = (x_{10}, x_{20})$ est une application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Le plan $x_1 - x_2$ est le **plan d'état** ou le **plan de phase**.

Dans le plan de phase $x_1 - x_2$, la trajectoire de la solution $x(t)$ pour $t \geq 0$ passe par le point des conditions initiales $x_0(x_{10}, x_{20})$.

L'ensemble des trajectoires correspondantes à différentes valeurs initiales constituent un **portrait de phase** du système.

Bien que les portraits de phases puissent actuellement être obtenus facilement à l'aide des algorithmes informatiques exécutés par des ordinateurs, il est toujours utile de savoir les obtenir à partir de l'analyse dans le plan de phase, au moins à titre de vérification et de comparaison.

8.1 Diagramme des champs de vecteurs

Revenons à l'équation d'état du système du second ordre :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.15)$$

A chaque vecteur (x_1, x_2) , il est associé un autre vecteur $(f(x_1, x_2), f(x_1, x_2))$, appelé : **champ de vecteurs**

Par **exemple**, on considère le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = x_2 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Pour un point $x = (1, 1)$, le champ de vecteur $f(x)$ est

$f(x) = (2, 1)$. Le point suivant est

$$(1, 1) + (2, 1) = (3, 2)$$

La fig.1.5 montre la représentation des deux points et du champ de vecteur.

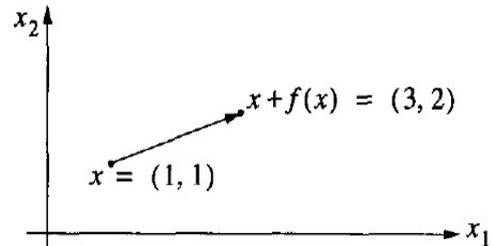


Fig.1.5 Représentation d'un champ de vecteurs

En répétant cette opération pour un nombre suffisant des points dans l'espace d'état, on obtient un **diagramme des champs des vecteurs**.

On note que le champ de vecteur en un point donné est

tangent à la trajectoire dans ce point : $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}$.

Ainsi, on peut tracer la trajectoire des variables d'état à partir d'un point initiale x_0 , en utilisant suffisamment des champs de vecteurs correspondants aux différents points.

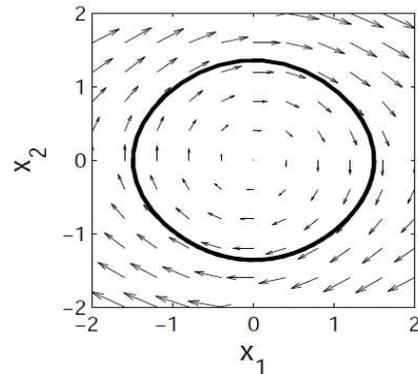


Fig.1.6 Diagramme des champs de vecteurs et trajectoire d'un pendule

La fig.1.6 montre le diagramme des champs de vecteurs et la trajectoire correspondante à une valeur initiale donnée, pour l'exemple d'un pendule sans frottement, ayant l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -10 \sin x_1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

8.2 Isoclines

Le terme **isocline** signifie : de même pente.

Pour le système du deuxième ordre défini par l'équation d'état(1.15), la pente de la trajectoire à un point x est donnée par :

$$S(x) = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \tag{1.18}$$

Une isocline de pente α est définie par :

$$S(x) = \alpha \tag{1.19}$$

Tous les points de la courbe $f_2(x_1, x_2) = \alpha f_1(x_1, x_2)$ ont la même pente α .

Pour construire le portrait de phase à partir de la méthode des isoclines :

- On trace les courbes $S(x) = \alpha$ dans le plan de phase ;
- On trace des petites lignes de pente α . La direction de ces lignes dépend du signe de α , c.à.d. de f_1 et de f_2 (fig.1.7)
- On répète cette opération pour un nombre suffisant des pentes α .

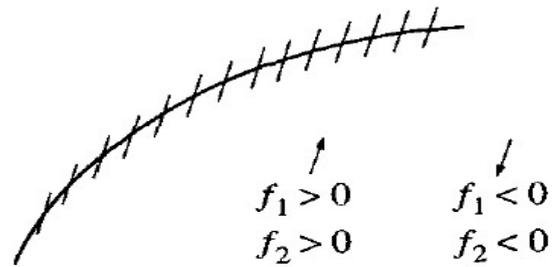


Fig.1.7 Construction du portrait de phase à partir des isoclines

On prend l'exemple d'un pendule sans frottement ayant l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 \end{aligned}$$

Pour une pente c l'isocline est définie par :

$$S(x) = \frac{-\sin x_1}{x_2} = c \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{c} \sin x_1$$

Pour différentes valeurs initiales, on obtient les trajectoires en respectant l'algorithme précédent. La fig.1.8 montre les isoclines et la trajectoire correspondante au point initiale $x_0 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

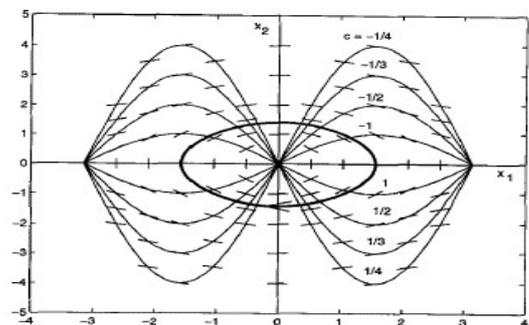


Fig.1.8 Construction de la trajectoire à partir des isoclines

On prend un autre exemple d'un pendule à frottement ayant l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0.5x_2 - \sin x_1 \end{aligned}$$

Pour une pente c l'isocline est définie par :

$$S(x) = \frac{-0.5x_2 - \sin x_1}{x_2} = c \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{c + 0.5} \sin x_1$$

La fig.1.9 montre les isoclines et la trajectoire correspondante au point initiale $x_0 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. La trajectoire se rétrécit comme une spirale convergeant vers l'origine.

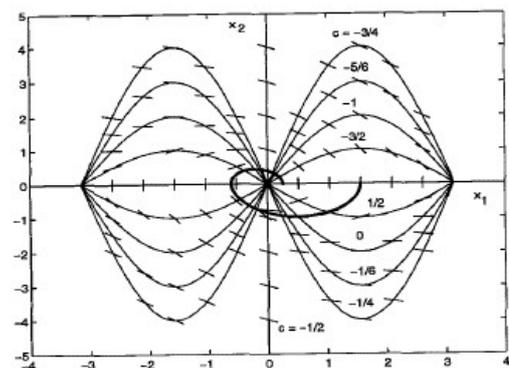


Fig.1.8 Construction de la trajectoire à partir des isoclines

8.3 Comportement des systèmes linaires

Les systèmes linaires invariables dans le temps sont décrit par :

$$\dot{x} = Ax \tag{1.20}$$

Avec : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Le *polynôme caractéristique* de la matrice A est donné par :

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n \quad (1.21)$$

I est la matrice unitaire de dimension n :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

L'équation $\Delta_A(\lambda) = 0$ est l'*équation caractéristique* de la matrice A. Les solutions $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ de l'équation caractéristique sont *les valeurs propres de la matrice A*.

Le système linéaire indiqué à l'équation (1.20) est *asymptotiquement stable* si est seulement si toute les valeurs propres de la matrice A ont une partie réelle négative.

Le système linéaire indiqué à l'équation (1.20) est *simplement stable* si est seulement si toute les valeurs propres de la matrice A ont une partie réelle non positive, et les valeurs propres à partie réelle nulle ont une multiplicité 1

Le système linéaire indiqué à l'équation (1.20) est *instable* si est seulement s'il existe soit au moins une valeur propre à partie réelle positive, soit au moins une valeur propre à partie réelle nulle à multiplicité supérieur à 1.

8.3.1 Critère de Hurwitz

La connaissance des signes des valeurs propres de la matrice A ne nécessite pas le calcul de toutes les valeurs propres. Il suffit d'effectuer quelques tests sur les coefficients a_i du polynôme caractéristique. Un de ces tests est le critère de Hurwitz :

La matrice de Hurwitz accompagnée au polynôme de Hurwitz (1.21) est donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité asymptotique du système est que les mineurs principaux de la matrice d'Hurwitz soit positifs.

On rappelle que les mineurs d'une matrice sont les déterminants de ses sous matrices carrées. Un mineur est principale si la sous matrice est obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de mêmes indices.

Exemple :

Soit la matrice d'état d'un système du deuxième ordre :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Le polynôme caractéristique :

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ a & \lambda + b \end{pmatrix} = \lambda^2 + b\lambda + a$$

La matrice d'Hurwitz :

$$H = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux :

$$a_1 = b; \quad a_2 = a$$

Le système est stable si et seulement si : $a > 0$ et $b > 0$

Une condition nécessaire pour la stabilité asymptotique est que toutes les coefficients a_i du polynôme caractéristique soit positifs.

8.3.2 Cas d'un système linéaire de deuxième ordre :

L'équation d'état d'un système de deuxième ordre :

$$\dot{x} = Ax \quad (1.24)$$

Avec : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

L'équation caractéristique :

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 \quad (1.25)$$

Ce qui implique :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad (1.26)$$

Les valeurs propres, solutions de l'équation caractéristiques :

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} \quad (1.27)$$

Vecteurs propres : Le vecteur propre associé à une valeur propre λ est le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ qui

vérifie la condition suivante :

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \quad (1.28)$$

Explicitement :

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.29)$$

Pour une condition initiale x_0 , la solution du système (1.20) est donnée par :

$$x(t) = M e^{J_r t} M^{-1} x_0 \quad (1.30)$$

Avec : M est **la matrice des vecteurs propres** : matrice composée par les vecteurs propres ;

J_r est le **bloc de Jordan**, défini par ; $J_r = M^{-1} A M$

Suivant les valeurs propres λ_i de la matrice A , Le bloc J_r prend une des formes suivantes :

- λ_i réels et distincts, $J_r = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$;
- λ_i réel et multiple, $J_r = \begin{pmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $k = 0, 1$;
- λ_i complexes, $J_r = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Le comportement du système dépend de chaque cas.

8.3.2.1 Comportement du système lorsque λ_1 et λ_2 sont réels et distincts : $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Dans ce cas, la matrice des vecteurs propres est de la forme : $M = (v_1 \ v_2)$ où v_1 et v_2 sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 .

On transforme le système en deux systèmes linéaires découplés par l'application de la transformation suivante :

$$z = M^{-1} x \quad (1.31)$$

On déduit : $\dot{z} = M^{-1} \dot{x} = M^{-1} A x = M^{-1} A M z = J_r z$

Explicitement :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Pour une valeur initiale (z_{10}, z_{20}) , la solution du système (1.32) est donnée par :

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda_1 t}; \quad z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t} \quad (1.33)$$

En éliminant le temps des expressions de z_1 et z_2 :

$$z_2 = Cz_1^{\lambda_2/\lambda_1} \tag{1.34}$$

Avec $C = \left(\frac{z_{02}}{z_{01}} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}$

Le portrait de phase est obtenu en variant C et en traçant à chaque fois la courbe $z_2(z_1)$. La forme de ce portrait de phase dépend des signes de λ_1 et λ_2 .

8.3.2.1.1 Cas où $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Lorsque t tend vers l'infini, les termes $e^{\lambda_1 t}$ et $e^{\lambda_2 t}$ tendent vers zéro. Les trajectoires des états tendent vers l'origine. Le point d'équilibre $x = 0$ est alors **un nœud stable**.

La pente de la courbe $z_2(z_1)$: $\frac{dz_2}{dz_1} = C \frac{\lambda_1}{\lambda_2} z_1^{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right)}$

On a $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, donc $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$. La pente est alors :

Zéro si z_1 tend vers zéro.

Infinie si z_1 tend vers l'infini.

La trajectoire est parallèle à l'axe z_1 au voisinage de l'origine, et parallèle à l'axe z_2 lorsqu'elle s'éloigne de l'origine (fig.1.9).

z_2 s'approche de zéro plus rapidement que z_1 car $\lambda_1 < \lambda_2$: la trajectoire glisse le long de l'axe z_1 à l'approche de l'origine.

Dans le plan X , les trajectoires sont aussi (fig.1.10) :

- Tangentes au vecteur propre v_1 correspondant à la valeur propre λ_1 à l'approche de l'origine ;
- Parallèle au vecteur propre v_2 correspondant à la valeur propre λ_2 en s'éloignant de l'origine.

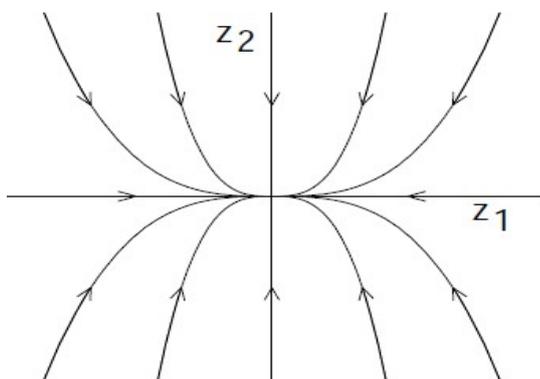


Fig.1.9 Portrait des phases dans le plan (z_2, z_1)

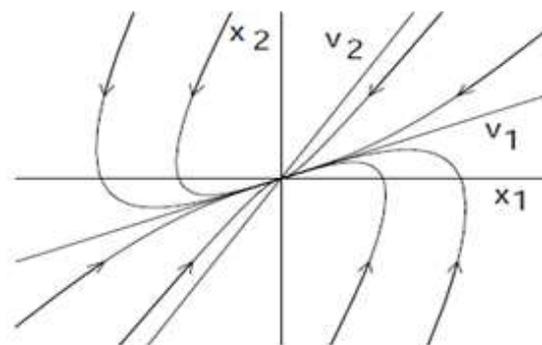


Fig.1.10 Portrait des phases dans le plan (x_2, x_1)

8.3.2.1.2 Cas où $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

Lorsque t tend vers l'infini, les termes $e^{\lambda_1 t}$ et $e^{\lambda_2 t}$ tendent vers l'infini. Les trajectoires des états ont la même forme que celle du cas précédent, mais avec une direction opposée (fig.1.11). Le point d'équilibre $x = 0$ est alors **un nœud instable**.

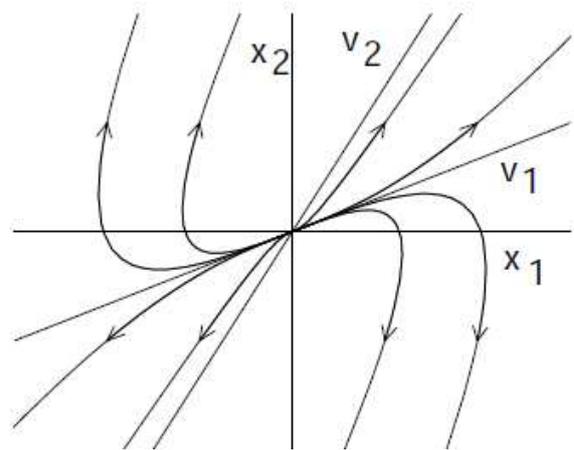


Fig.1.11 Portrait des phases dans le plan (x_2, x_1)

8.3.2.1.3 Cas où $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$

Lorsque $t \rightarrow \infty : e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$, mais $e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty$. Alors :

λ_2 est une valeur propre stable, et v_2 est un vecteur propre stable ;

λ_1 est une valeur propre instable, et v_1 est un vecteur propre instable :

Les trajectoires dans le plan (z_1, z_2) sont des exponentiels négatifs car λ_2 / λ_1 est négatif (fig.1.12).

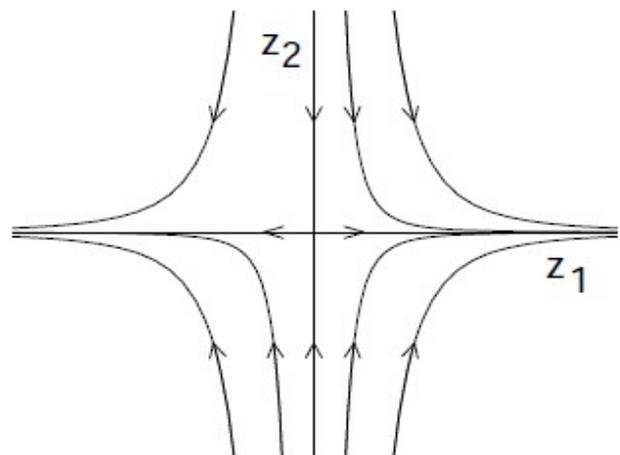


Fig.1.12 Portrait des phases dans le plan (z_2, z_1)

Les trajectoires sont décroissant dans la direction de z_2 , mais croissant dans la direction de z_1 .

Les trajectoires sont tangentes à z_1 lorsque $|z_2| \rightarrow \infty$ et tangentes à z_2 lorsque $|z_1| \rightarrow 0$

Deux cas particuliers (exceptions) :

Les trajectoires le long de l'axe $z_2 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$: **trajectoires stables**.

Les trajectoires le long de l'axe $z_1 \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$: **trajectoires instables**.

L'origine dans ce cas est un **point de selle**.

Similairement, dans le plan (x_1, x_2) (fig.1.13), les trajectoires stables sont le long du vecteur propre v_2 , tandis que les trajectoires instables sont le long du vecteur propre v_1 .

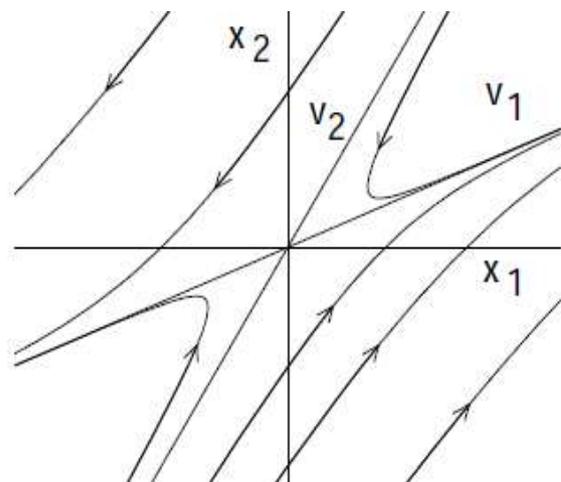


Fig.1.13 Portrait des phases dans le plan (x_2, x_1)

Pour le cas $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, les trajectoires ont la même forme, sauf que les directions seront changées.

8.3.2.2 Comportement du système lorsque λ_1 et λ_2 sont complexes : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

Le bloc de Jordan

$$J_r = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} v_1 &= u + jv \\ v_2 &= u - jv \end{aligned} ; u, v \in \mathbb{R} \quad u, v \quad (1.36)$$

On applique la transformation des coordonnées $z = M^{-1}x$. On obtient

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \alpha z_1 - \beta z_2 \\ \dot{z}_2 &= \alpha z_2 + \beta z_1 \end{aligned} \quad (1.37)$$

On préfère travailler dans les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \end{aligned} \quad (1.38)$$

On déduit : $(r^2 = z_1^2 + z_2^2 \Rightarrow 2r\dot{r} = 2(z_1\dot{z}_1 + \dot{z}_2 z_2))$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \beta \end{aligned} \quad (1.39)$$

Alors :

$$\begin{aligned} r &= r_0 e^{\alpha t} \\ \theta &= \theta_0 + \beta t \end{aligned} \quad (1.40)$$

Ces équations sont celle d'un spirale logarithmique. La forme de cette spirale dépend de la valeur de α :

- Pour $\alpha < 0$, si $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$, la spirale converge vers l'origine, et le système est stable. L'origine est dans ce cas un **focus stable**.
- Pour $\alpha > 0$, si $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$, la spirale diverge en s'éloignant de l'origine, et le système est instable. L'origine est dans ce cas un **focus instable**.
- Pour $\alpha = 0$, si $t \rightarrow \infty$, $r = r_0$, la trajectoire est circulaire, avec un rayon r_0 . L'origine est dans ce cas **le centre**.

Les figs.1.14 et 15 donnent la forme des trajectoires dans le plan (z_1, z_2) et le plan (x_1, x_2) , pour les trois cas a, b et c.

8.3.2.3 Comportement du système lorsque λ_1 et λ_2 sont multiples $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

Le bloc de Jordan est dans ce cas :

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad k = 0, 1 \quad (1.41)$$

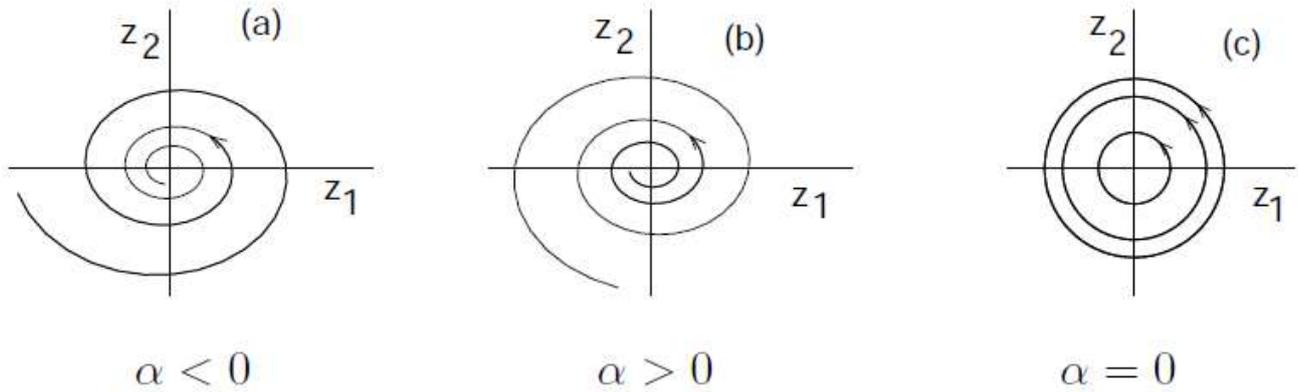


Fig.1.14 Trajectoire dans le plan (z₂,z₁)

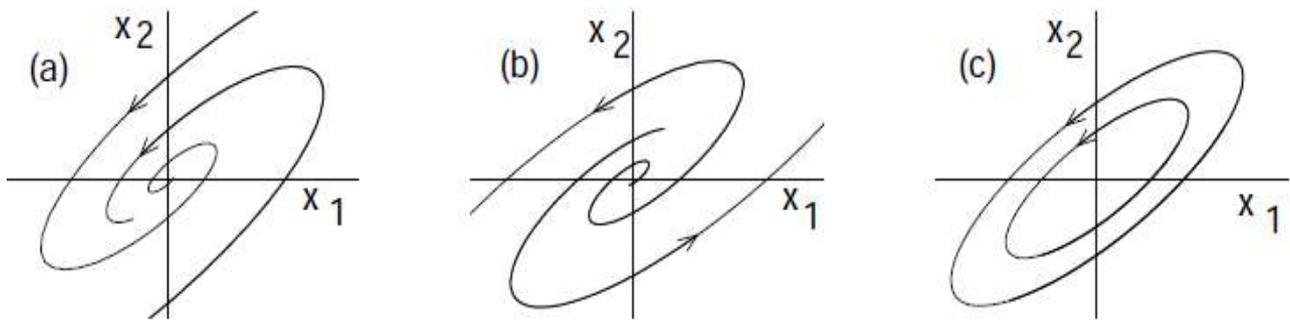


Fig.1.14 Trajectoire dans le plan (x₂,x₁)

On applique la transformation des coordonnées $z = M^{-1}x$:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda z_1 + k z_2 \\ \dot{z}_2 &= \lambda z_2 \end{aligned} \tag{1.42}$$

La solution de ce système :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\lambda t} (z_{10} + k z_{20} t) \\ z_2(t) &= z_{20} e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{1.43}$$

En éliminant le temps entre les deux équations :

$$z_1 = z_2 \left(\frac{z_{10}}{z_{20}} + \frac{k}{\lambda} \ln \left(\frac{z_2}{z_{20}} \right) \right) \tag{1.44}$$

On trace le portrait de phase pour les deux cas k=0 et k=1 (fig.1.15 et 16). On constate que :

Si $\lambda < 0$: les trajectoires convergent vers zéro et par conséquent le système est stable,

Si $\lambda > 0$: les trajectoires divergent de zéro et par conséquent le système est instable.

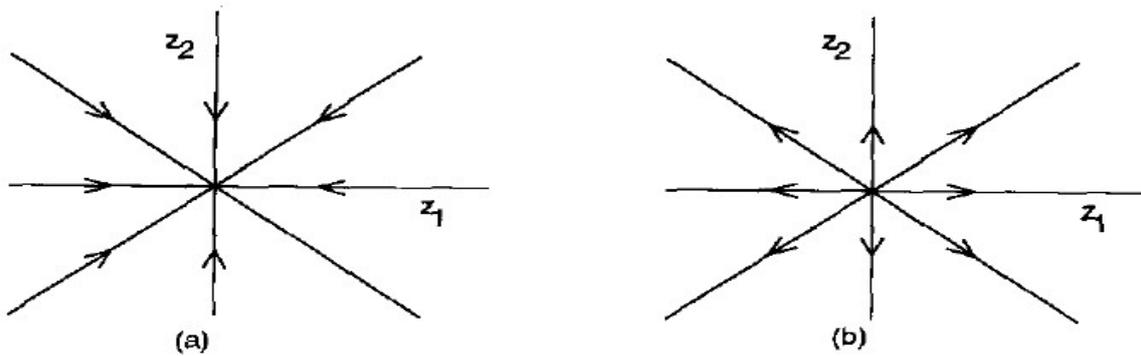


Fig.1.15 Portrait des phases dans le plan (z_2, z_1) lorsque $k=0$, pour (a) $\lambda < 0$ et (b) $\lambda > 0$

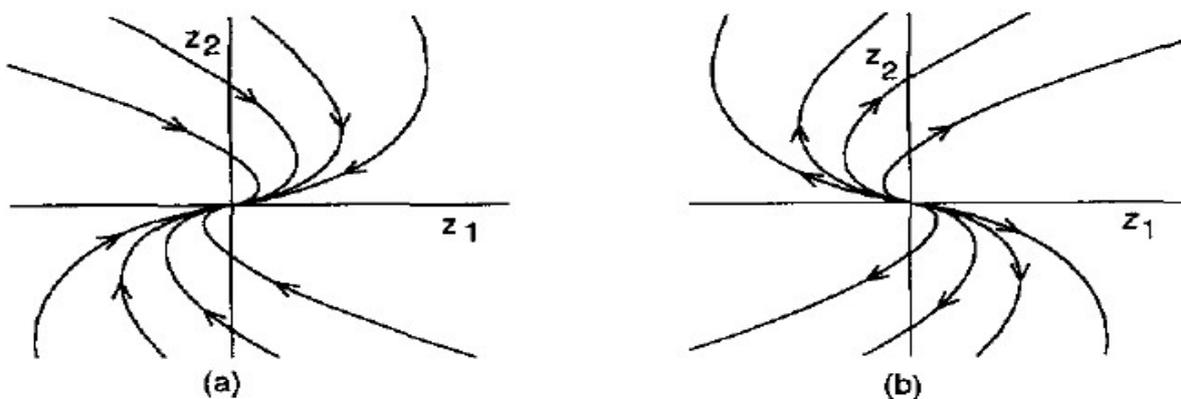


Fig.1.16 Portrait des phases dans le plan (z_2, z_1) lorsque $k=1$, pour (a) $\lambda < 0$ et (b) $\lambda > 0$

8.4 Comportement local des systèmes non linéaires

Le comportement d'un système non linéaire peut être déterminé localement en faisant la linéarisation de ce système au tour d'un point d'équilibre. Cette linéarisation est effectuée en utilisant le développement en série de Taylor.

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1.45}$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont supposées continuellement différentiables.

Soit le point $p(p_1, p_2)$ un point d'équilibre de ce système non linéaire.

On effectue le développement en série de Taylor des fonctions f_1 et f_2 au tour du point d'équilibre p :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(p_1, p_2) + a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) + T.O.E \\ \dot{x}_2 &= f_2(p_1, p_2) + a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) + T.O.E \end{aligned} \tag{1.46}$$

H.O.T : termes d'ordres élevés.

Avec :

$$a_{11} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x=p} ; \quad a_{12} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x=p} ;$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x=p} ; \quad a_{22} = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x=p}$$

p est un point d'équilibre : $f_1(p_1, p_2) = f_2(p_1, p_2) = 0$

On pose : $y_1 = x_1 - p_1$; $y_2 = x_2 - p_2$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 &= f_1(p_1, p_2) + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + T.O.E \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 &= f_2(p_1, p_2) + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + T.O.E \end{aligned} \quad (1.47)$$

En négligeant les T.O.E :

$$\dot{y} = Ay \quad (1.48)$$

Avec :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ;$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x=p} & \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x=p} \\ \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x=p} & \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x=p} \end{pmatrix} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p}$$

La matrice A est la **matrice Jacobienne**. L'équation (1.48) est une approximation linéaire du système non linéaire(1.45), dans le voisinage du point d'équilibre p .

Le comportement du système non linéaire (1.48) dans le voisinage de son point d'équilibre p est équivalent au comportement du système linéarisé (1.48) autour de son point d'équilibre $y=0$.

L'étude du comportement du système linéarisé (1.48) peut être effectuée de la même manière que celle indiquée dans le paragraphe (8.3), c.à.d. par analyse dans le plan de phases.

Si l'origine $y = 0$ du système linéarisé est un **nœud (stable ou instable)**, un **focus (stable ou instable)** ou un **point de selle**, alors la trajectoire du système non linéaire dans le voisinage de son point d'équilibre p se comporte comme un **nœud (stable ou instable)**, un **focus (stable ou instable)** ou un **point de selle**.

8.4.1 Exemple 1

On rappelle le modèle d'état non linéaire d'un pendule :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned} \quad (1.49)$$

Les points d'équilibre de ce système : $(0, n\pi)$, $n \in Z$

Le pendule a deux points d'équilibre : $(0,0)$ et $(\pi,0)$. Les autres points d'équilibre sont des répétitions de ces deux points correspondantes aux balançoires du pendule avant de s'arrêter.

La matrice Jacobienne :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big|_{x=p} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x=p} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big|_{x=p} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x=p} \end{pmatrix}$$

➤ Pour le premier point d'équilibre $p = (p_1, p_2) = (0,0)$:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_1=0, x_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

On calcul des valeurs propres de la matrice A. On trouve :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}}$$

➤ Pour le deuxième point d'équilibre $p = (p_1, p_2) = (\pi,0)$:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_1=\pi, x_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

On calcul des valeurs propres de la matrice A. On trouve :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \frac{4g}{l}}$$

Si on impose les valeurs numériques des paramètres : $\frac{g}{l} = 1$ et $\frac{k}{m} = 0.5$:

- Pour le premier point d'équilibre $(0,0)$, on trouve : $\lambda_{1,2} = 0.25 \pm j 0.97$. Alors le point d'équilibre $(0,0)$ est un focus stable.
- Pour le deuxième point d'équilibre $(\pi,0)$, on trouve : $\lambda_{1,2} = -1.28$, $\lambda_{1,2} = 0.78$ Alors le point d'équilibre $(\pi,0)$ est un point de selle.

8.4.2 Exemple 2

On rappelle le modèle du circuit à diode à effet de tunnel :

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u]$$

On suppose que : $u = 1.2V$; $R = 1.5k\Omega$; $C = 2pF$; $L = 5\mu H$.

La fonction $h(x)$ est exprimée par : $h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$

Déduire le comportement de ce système non linéaire autour des trois points d'équilibre :

$$Q_1 = (0.063, 0.758); \quad Q_2 = (0.285, 0.61); \quad Q_3 = (0.884, 0.21)$$

8.5 Cycles de limite

Un système est oscillant s'il a une solution périodique non triviale !

$$x(t+T) = x(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (1.50)$$

Les solutions triviales sont les solutions constantes. L'image de la solution périodique dans le portrait de phase est une trajectoire fermée appelée : **orbite fermée** ou **orbite périodique**.

Nous avons vu dans le paragraphe 8.3.2.2 un exemple des systèmes oscillant : le système linéaire du second ordre ayant comme valeurs propres $\pm j\beta$ ($\alpha = 0$). L'origine de ce système est le centre, est la trajectoire est un cercle fermé. La forme de Jordan de ce système donne la solution suivante :

$$\begin{cases} z_1(t) = r_0 \cos(\beta t + \theta_0) \\ z_2(t) = r_0 \sin(\beta t + \theta_0) \end{cases}; \quad \begin{cases} r_0 = \sqrt{z_{10}^2 + z_{20}^2} \\ \theta_0 = \text{tg}^{-1} \frac{z_{20}}{z_{10}} \end{cases} \quad (1.51)$$

r_0 est l'amplitude des oscillations. Un tel système est référé comme étant un **oscillateur harmonique**.

Si on considère que l'oscillateur harmonique est le modèle du circuit LC de la fig.1.17, on peut conclure que le mécanisme physique menant à ces oscillations est l'échange périodique de l'énergie -sans dissipation- entre le champ électrique du condensateur et le champ magnétique de la bobine.

Les oscillateurs harmoniques linéaires souffrent de deux inconvénients :

- Manque de robustesse : une perturbation minimale va détruire les oscillations. Cette oscillateur na pas alors une stabilité structurelle. Pour l'exemple du circuit LC, l'existence d'une très faible résistance dans le circuit empêche l'oscillation et l'échange période de l'énergie entre le condensateur et la bobine : les variables amortissent avec le temps.
- Dépendance de l'amplitude d'oscillation des conditions initiales des variables.

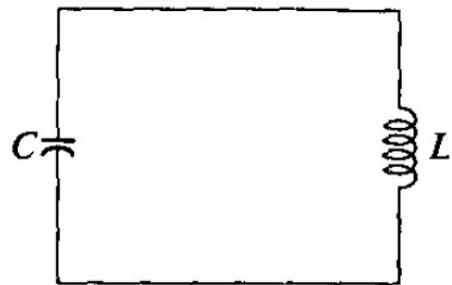


Fig.1.17 Circuit LC comme oscillateur

Ces deux inconvénients des oscillateurs linéaires peuvent être évités dans le cas des oscillateurs non linéaires. On peut construire un oscillateur non linéaire de sorte que :

- Cet oscillateur non linéaire soit structurellement stable,
- L'amplitude des oscillation- en régime permanent- soit indépendante des conditions initiales.

Dans le plan de phase, un **cycle de limite** est défini comme étant une **trajectoire fermée et isolée**.

La **trajectoire est fermée** si elle a un caractère périodique.

La **trajectoire est isolée** si elle a une nature limitée, c.à.d. que les trajectoires de voisinage soit converge vers ou diverge de cette trajectoire isolée.

Suivant le parcours des trajectoires dans le voisinage, on distingue entre trois types des cycles de limite (fig.1.18) :

- **Cycle de limite stable** : Lorsque $t \rightarrow \infty$, tous les trajectoires dans le voisinage convergent vers le cycle de limite.
- **Cycle de limite instable** : Lorsque $t \rightarrow \infty$, tous les trajectoires dans le voisinage divergent du cycle de limite.
- **Cycle de limite demi-stable** : Lorsque $t \rightarrow \infty$, Certaines trajectoires dans le voisinage convergent vers le cycle de limite., et certaines autres trajectoires du voisinage divergent du cycle de limite.

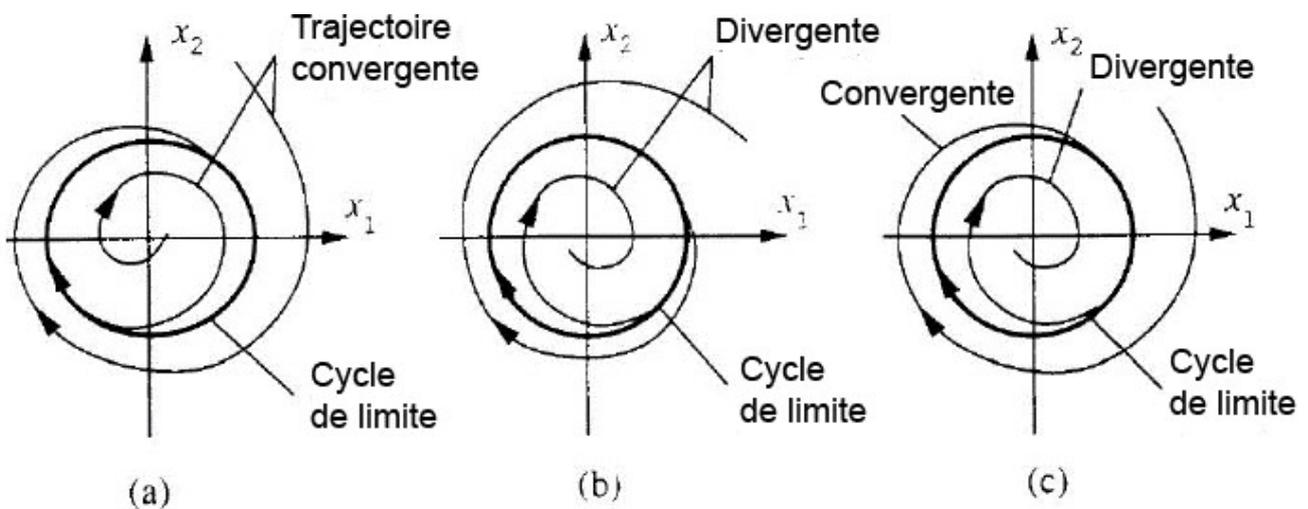


Fig.1.18 Cycle de limite (a) stable, (b) instable, (c) demi-stable.

8.5.1 Exemple 1

Considérons le système qui a l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases} \quad (1.52)$$

On passe en coordonnées polaires ($x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$) :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (1.53)$$

- Si la trajectoire commence d'un point initial situé sur le cercle unitaire ($x_1^2(0) + x_2^2(0) = r^2 = 1$), alors : $\dot{r} = 0$. La trajectoire prend alors la forme d'une orbite circulaire autour de l'origine.
- Si la trajectoire commence d'un point initial tel que $x_1^2(0) + x_2^2(0) = r^2 < 1$, alors : $\dot{r} > 0$. La trajectoire converge alors vers le cercle unitaire, de l'intérieur.
- Si la trajectoire commence d'un point initial tel que $x_1^2(0) + x_2^2(0) = r^2 > 1$, alors : $\dot{r} < 0$. La trajectoire converge alors vers le cercle unitaire, de l'extérieur.

Pour ce système, **le cercle unitaire est un cycle de limite stable.**

8.5.2 Exemple 2

Considérons le système qui a l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases} \quad (1.54)$$

On passe en coordonnées polaires ($x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$) :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (1.55)$$

- Si la trajectoire commence d'un point initial situé sur le cercle unitaire ($x_1^2(0) + x_2^2(0) = r^2 = 1$), alors : $\dot{r} = 0$. La trajectoire prend alors la forme d'une orbite circulaire autour de l'origine.
- Si la trajectoire commence d'un point initial tel que $x_1^2(0) + x_2^2(0) = r^2 < 1$, alors : $\dot{r} < 0$. La trajectoire diverge du cercle unitaire, vers l'intérieur.
- Si la trajectoire commence d'un point initial tel que $x_1^2(0) + x_2^2(0) = r^2 > 1$, alors : $\dot{r} > 0$. La trajectoire diverge du cercle unitaire, vers l'extérieur.

Pour ce système, **le cercle unitaire est un cycle de limite instable.**

8.5.3 Exemple 3

Considérons le système qui a l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \end{cases} \quad (1.56)$$

On passe en coordonnées polaires ($x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$) :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1)^2 \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (1.57)$$

- Si la trajectoire commence d'un point initial situé sur le cercle unitaire ($x_1^2(0) + x_2^2(0) = r^2 = 1$), alors : $\dot{r} = 0$. La trajectoire prend alors la forme d'une orbite circulaire autour de l'origine.
- Si la trajectoire commence d'un point initial tel que $x_1^2(0) + x_2^2(0) = r^2 < 1$, alors : $\dot{r} < 0$. La trajectoire diverge du cercle unitaire, vers l'intérieur.
- Si la trajectoire commence d'un point initial tel que $x_1^2(0) + x_2^2(0) = r^2 > 1$, alors : $\dot{r} < 0$. La trajectoire converge vers le cercle unitaire, de l'extérieur.

Pour ce système, le cercle unitaire est un cycle de limite demi-stable.

8.5.4 Exemple 4 Oscillateur de Van der Pol

L'équation d'état d'un tel système est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1-x_1^2)x_2 \end{aligned}$$

On présente le portrait de phase de ce système pour trois valeurs différentes du coefficient ε (fig.1.19). Les trois cas, présente des cycles de limite stables, ayant des formes différentes.

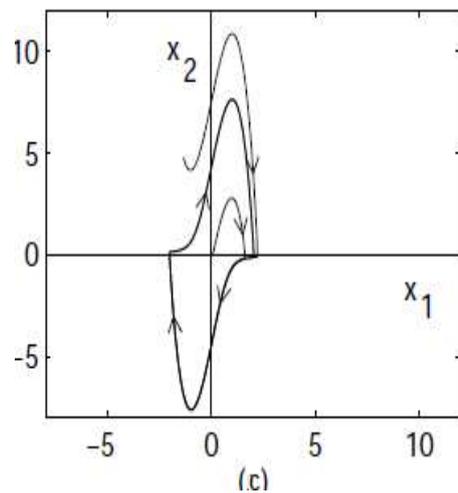
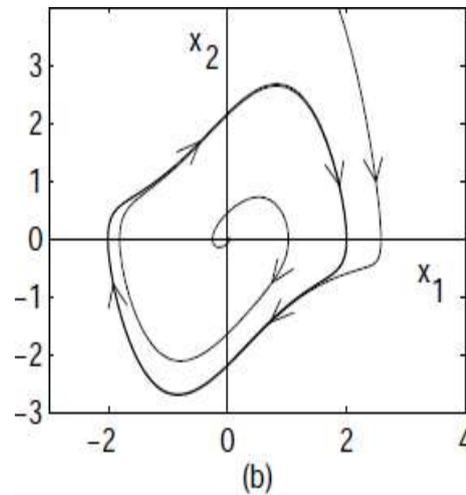
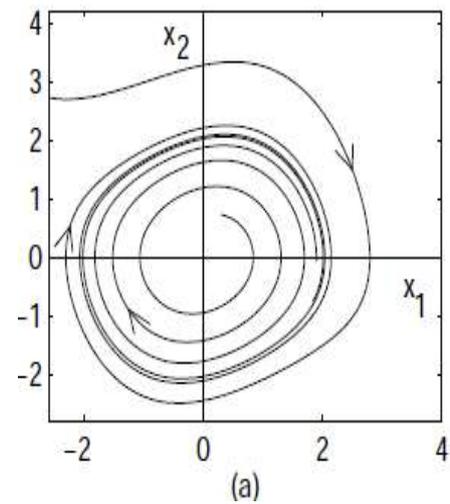


Fig.1.19 Cycle de limite de l'oscillateur de Van der Pol
(a) $\varepsilon=0.2$, (b) $\varepsilon=1$, (c) $\varepsilon=5$.