Chapitre 2

Propriétés mathématiques

SOMMAIRE DU CHAPITRE

1 Notions de mathématique

1.1 Espace euclidien

L'ensemble de tous les vecteurs de dimension ***n*** $x = (x_1, x_2 \cdots$ constitue un espace euclidien, de dimension ***n***, nommé $\mathbb{R}$.

L'espace euclidien de dimension 1 est l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.

Les vecteurs de $\mathbb{R}$ peuvent être additionnés en additionnant leurs composantes réels correspondantes. Ils peuvent aussi être multipliés par un scalaire en multipliant tous les composantes réelles par ce scalaire.

Le produit de deux vecteurs x et y est un troisième vecteur exprimé par :

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1.1}$$

1.1.1 Normes des vecteurs et des matrices

La norme $\|x\|$ d'un vecteur x est une fonction réelle qui a les propriétés suivantes :

- ❖ $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, et $\|x\| = 0$ si est seulement si $x = 0$
- ❖ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- ❖ $\|\alpha x\| = \alpha \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}$

La norme de classe p est définie par :

$$\|x\|_\infty = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots \qquad \right)^{1/p} ; \quad 1 \leq p \leq \infty$$

La norme infinie :

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Les trois normes les plus utilisées sont $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ et la norme euclidienne $\|x\|_2$:

$$\|x\|_1 = (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots \qquad \right)^{1/2} = \left(x^T x\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Une propriété des normes des vecteurs est que :

pour tous normes de classes α et β telles que $\alpha \neq \beta$, ils existent deux constantes positives c_1 et c_2 tels que :

$$c_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cas particuliers :

- $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2$
- $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$
- $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\,\|x\|_\infty$

1.1.2 Concepts topologiques dans $\mathbb{R}$

1.1.2.1 Convergence d'une séquence des vecteurs

Une séquence des vecteurs $x_0, x_1, \cdots\cdots \quad \cdots \quad \mathbb{R}$, notée $\{x_k\}$ est dite **convergente** vers un vecteur limite x si :

$$\|x_k - x\| < 0 \text{ lorsque } k \to \infty$$

Cette condition est équivalente à la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} \qquad \text{-}x\| < \varepsilon, \quad \forall k > N$$

Un vecteur x est un **point d'accumulation** d'une séquence $\{x_k\}$ s'il existe une sous séquence de $\{x_k\}$ qui converge vers x. C'est-à-dire s'il existe un

Une séquence bornée $\{x_k\} \in \mathbb{R}$ possède au moins un point d'accumulation dans $\mathbb{R}$.

Une séquence $\{x_k\} \in \mathbb{R}$ est dite **croissante** si $x_k \le x_{k+1}, \quad \forall k$.

Une séquence $\{x_k\} \in \mathbb{R}$ est dite **strictement croissante** si $x_k < x_{k+1}, \quad \forall k$.

Une séquence $\{x_k\} \in \mathbb{R}$ est dite **décroissante** si $x_k \ge x_{k+1}, \quad \forall k$.

Une séquence $\{x_k\} \in \mathbb{R}$ est dite **strictement décroissante** si $x_k > x_{k+1}, \quad \forall k$.

Une séquence croissante $\{x_k\} \in \mathbb{R}$, qui bornée de haut, converge vers un nombre réel.

Une séquence décroissante $\{x_k\} \in \mathbb{R}$, qui bornée de bas, converge vers un nombre réel.

1.1.2.2 Ensembles

Soit S un groupe dans $\mathbb{R}$ $S \subset \mathbb{R}$.

Ensemble ouvert : Un ensemble $S \subset \mathbb{R}$ est ouvert si $\forall x \in S$, on peut trouver un voisinage de ce vecteur x c'est-à-dire un ensemble N des vecteurs, défini en fonction d'un nombre très faible ε , par :

$$N(x, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{R} \qquad \cdot\| < \varepsilon\}$$

Cet ensemble est appartenant à S : $N(x, \varepsilon) \subset S$

Ensemble fermé : Un ensemble S est fermé si et seulement si son complément dans R^n est ouvert. Autrement dit : si et seulement si chaque séquence convergente $\{x_k\}$, avec des éléments de *S*, converge vers un point de *S*.

Ensemble borné : Un ensemble S est borné s'il existe $r > 0$, de sorte que : $\|x\| < r \quad \forall x \in S$.

Ensemble compact : Un ensemble compact est un ensemble fermé et borné.

Point de frontières : Un point p est un point de frontières d'un ensemble S, si chaque voisinage de p contient au moins un point contenant dans S et un point n'appartient pas à S.

Un ensemble fermé contient tous ses points de frontières

Un ensemble ouvert ne contient aucun de ses points de frontières

L'ensemble de tous les points de frontières d'un ensemble S est noté ∂S . L'intérieur d'un ensemble S est noté : $S - \partial S$. La clôture d'un ensemble S est noté : $\bar{S} = S \cup \partial S$.

1.1.2.3 Fonction continue

Une fonction $f : \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ f est continue dans un point *x* si $f(x_k) \to f(x)$ tant que $x_k \to x$. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \delta$$

1.1.2.4 Fonction différentiable

Une fonction $f : \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ f est différentiable dans un point *x* si la limite :

$$f'(x) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. Une fonction $f : \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ f est continuellement différentiable (noté $f \in C^{-1}$) dans un point x_0 si la dérivée partielle $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe et continue dans le point x_0, pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

1.1.2.5 Vecteur de gradient

Pour une fonction continue $f : \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, le vecteur de gradient est défini par :

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

1.1.2.6 Matrice Jacobéenne :

Pour une fonction continue $f : \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, la matrice Jacobéenne est défini par :

$$J(x)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

1.1.2.7 Règle de chaine

Soit $h(x)=g(f(x))$ une fonction continuellement différentiable dans un point x_0. La matrice Jacobéenne est donnée par la règle de chaine suivante :

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\partial h}{\partial g}\right|_{f=f(x_0)}\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=x_0}$$

1.2 Théorème de la valeur moyenne et de la fonction implicite

1.2.1 Théorème de la valeur moyenne

Soit $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ une fonction continuellement différentiable à chaque point x d'un ensemble ouvert $S\subset\mathbb{R}$ .Soit x et y deux point de S, tels que le segment de droite $L(x,y)=\{z : z=\theta x+(1-\theta)y,\quad 0<\theta<1\}$ appartient à S. Il existe un point z de $L(x,y)$ tel que :

$$f(y)-f(x)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=z}(y-x)$$

1.2.2 Théorème de la fonction implicite

Soit $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ une fonction continuellement différentiable à chaque point (x,y) d'un ensemble ouvert $S\subset\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$. Soit un point $(x_0,y_0)\in S$, tel que $f(x_0,y_0)=0$, et pour lequel la matrice Jacobéenne est non singulière. Il existe un voisinage $U\subset\mathbb{R}$ de x_0, et un voisinage $V\subset\mathbb{R}$ de y_0, de sorte que pour chaque $y\in V$, l'équation $f(x,y)=0$ a une seule solution $x\in U$. De plus, cette solution peut être écrite sous la forme $x=g(y)$, où g est une fonction continuellement différentiable dans le point $y=y_0$.

2 *Existence et unicité*

Dans cette partie on traite les conditions pour l'existence et l'unicité de la solution du problème à condition initiale suivant :

$$\dot{x} \qquad),\quad x(t_0)=x_0 \tag{1.2}$$

Cette équation, a-t-il des solutions dans un intervalle de temps donné $[t_0,t_1]$?

Autrement dit, existe-il une fonction continue $x:[t_0,t_1]\rightarrow \mathbb{R}$ telle que sa dérivée $\dot{x}$ est définie et vérifie l'équation $\dot{x}$ $(t)),\quad \forall t\in[t_1,t_2]$?

Cette solution, si elle existe, est-il unique ? est ce qu'on peut trouver plusieurs solutions à cette équation ?

2.1 Existence d'une solution

L'existence d'une solution à l'équation (1.2) est assurée par la continuité de la fonction $f(t,x)$ sur t et sur x. la continuité sur t dans un intervalle $[t_0,t_1]$ signifie que la dérivé $\dot{x}$ est défini dans tout les points de cette intervalle : $\dot{x}$ $),\quad \forall t\in[t_1,t_2]$.

Si $f(t,x)$ est continue sur t et sur x, sa solution $x(t)$ est continuellement différentiable.

Si $f(t,x)$ est continue sur x et **continue par morceaux** sur t, sa solution $x(t)$ est continuellement différentiable par morceaux.

2.1.1 Continuité par morceaux

Une fonction $f(t,x)$ est **continue par morceaux** sur t dans un intervalle $J\subset R$ si pour tout sous intervalle borné $J_0\subset\Re$, la fonction f est continue sur t pour tout valeur $t\in J_0$, à l'exception éventuellement d'un nombre limité des points pour lesquels la fonction f a une discontinuité sous forme des sauts limités.

Si $f(t,x)$ est fonction continue, l'équation différentielle $\dot{x}$ $),\quad x(t_0)=x_0$ peut avoir plus d'une solution .

Exemple :

$$\dot{x} \qquad x(0)=0$$

La fonction $f(x)=x^{1/3}$ est continue, et l'équation a deux solution : $x=(2t/3)^{3/2}$ et $x=0$.

Ainsi, La continuité de $f(t,x)$ assure l'**existence** d'au moins une solution, mais n'assure pas **l'unicité** de cette solution.

Pour que la solution soit unique, il faut que la fonction $f(t,x)$ vérifie la condition de Lipchitz, c.a.d, qu'elle soit une **fonction de type Lipchitz**.

2.1.2 Fonction de type Lipchitz

Une fonction $f(t,x)$ est **localement de type Lipchitz** sur x dans un point x_0 s'il existe un voisinage $N(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}$ $_0\|<r\}$, pour lequel la fonction f vérifie la condition suivante, dite **la condition de Lipchitz** :

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leq L\|x-y\|,\quad L>0 \tag{1.3}$$

Avec : L est la constante de Lipchitz.

Une fonction $f(t,x)$ est globalement de type Lipchitz sur x dans un domaine $D \subset \mathbb{R}$ (ensemble ouverte et connectée) si elle est localement de type Lipchitz en tout point du domaine D, avec ***la même constante de Lipchitz L***.

Dans le cas particulier où $n = 1$ et où la fonction f dépend seulement de x (indépendante du temps t) la condition de Lipchitz s'écrit :

$$\frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x-y|} \leq L \tag{1.4}$$

Cette équation signifie que sur le tracé de $f(x)$ en fonction de x, une ligne droite reliant deux points quelconques de f(x) ne peut pas avoir une pente dont la valeur absolue est supérieure à L.

Toute fonction qui a une pente infinie dans un point donné n'est pas une fonction de type Lipchitz dans ce point.

Il résulte qu'une fonction discontinue n'est pas une fonction de type Lipchitz dans les points de discontinuité.

Exemple

La fonction $f(x) = x^{1/3}$ n'est pas de type Lipchitz localement dans le point $x = 0$, étant donné que :

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{2/3} \rightarrow \infty \text{ lorsque } x \rightarrow 0$$

Si la dérivée $f'(x)$ est continue dans un point x_0 alors la fonction $f(x)$ est de type Lipchitz dans le même point car $|f'(x)|$ est borné par un certain constant k dans le voisinage de x_0, ce qui implique que la fonction $f(x)$ vérifie la condition de Lipchitz.

On peut généraliser ce résultat pour le cas des fonctions $f(t,x)$: si pour $t \in J \subset \mathbb{R}$ et pour $x \in D \subset \mathbb{R}$, la fonction $f(t,x)$ et ses dérivées partielles $\partial f_i / \partial x_j$ sont continus, alors la fonction $f(t,x)$ est localement de type Lipchitz dans le point x du domaine D.

2.2 Unicité d'une solution

2.2.1 Lemme 1: unicité locale de la solution

Soit $f(t,x)$ une fonction continue par morceaux sur *t* et localement de type Lipchitz sur *x* dans un point *x*0 pour tout $t \in [t_0, t_1]$. Alors, il existe une constante $\delta > 0$, tel que l'équation d'état $\dot{x}$ $)$, avec $x(t_0) = x_0$ **a une seule solution sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \delta]$.**

La vérification de la condition de Lipchitz est nécessaire pour assurer l'existence de la solution.

Le lemme précédent est local, car il assure l'existence et l'unicité de la solution localement sur l'intervalle $[t_0, t_0+\delta]$, mais cette intervalle peut ne pas inclure l'intervalle $[t_0, t_1]$. En effet Il se peut que la solution n'existe pas pour certaines valeurs de la variable *t*.

2.2.2 Fonction de type Lipchitz globalement

La fonction $f(t,x)$ est **globalement de type Lipchitz** si elle est de type Lipchitz dans $\mathbb{R}$.

Si la fonction $f(t,x)$ et ses dérivées partielles $\partial f_i / \partial x_j$ sont continus pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction $f(t,x)$ est globalement de type Lipchitz dans le point x de $\mathbb{R}$, si et seulement si les dérivées partielles $\partial f_i / \partial x_j$ sont bornées globalement, uniformément en *t*.

Exemple :

La fonction $f(x) = -x^2$ est localement de type Lipchitz pour tout *x*, mais pas globalement de type Lipchitz, car sa dérivé $f'(x) = -2x$ n'est pas globalement bornée.

2.2.3 Lemme 2: Unicité globale de la solution

Soit $f(t,x)$ une fonction continue par morceaux sur *t* et globalement de type Lipchitz sur *x* pour tout $t \in [t_0, t_1]$. Alors, l'équation d'état $\dot{x}$), avec $x(t_0) = x_0$ **a une seule solution sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.**

2.2.4 Lemme 3 :

Soit $f(t,x)$ une fonction continue par morceaux sur *t* et localement de type Lipchitz sur *x* pour tout $t \le t_0$ et pour tout *x* dans un domaine $D \subset \mathbb{R}$. Soit *W* un sous ensemble de *D*, et supposons que chaque solution de l'équation à conditions initiales :

$$\dot{x} \quad); \quad x(t_0) = x_0; \quad x_0 \in W$$

Inclue dans W. Alors, l'équation d'état $\dot{x}$); $x(t_0) = x_0$; $x_0 \in W$ a une seule solution définie pour tout $t \le t_0$.

Exemple :

$$\dot{x} \quad = -x^3$$

$f(x)$ est localement de type Lipchitz dans $\mathbb{R}$, mais pas globalement de type Lipchitz car sa dérivée $f'(x) = -3x^2$ n'est pas globalement bornée.

Si, à un instant donné *t*, la solution $x(t)$ est positive, sa dérivée $\dot{x}$ serait négative. Similairement, si la solution $x(t)$ est négative, sa dérivée $\dot{x}$ serait positive.

Par conséquence, à partir d'une condition initiale quelconque $x(0) = a$, la solution $x(t)$ ne peut pas quitter l'ensemble bornée $\{x \in \mathbb{R} \quad | \}$

(preuve : tracer $x(t)$ en fonction de t, à partir de $x(0) = a$, en tenant compte du signe de la dérivé, qui représente la pente de la courbe.)

Ainsi, l'équation $\dot{x} = -x^3$ a une seule solution pour tout $t \geq 0$.