Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Contenu :

- Remarques sur la résolution des systèmes triangulaires
- Méthode d'élimination de Gauss
- Interprétation matricielle de l'élimination de Gauss : la factorisation LU

I. Introduction :

Dans ce chapitre nous étudions la résolution des systèmes linéaires (Ax = b) par des méthodes dites « directes », c'est-à-dire fournissant la solution exacte en un nombre fini d'opérations élémentaires, avec ou en absence d'erreurs d'arrondi. Ceci est bien contraire du principe des méthodes dites « itératives » qui consistent à construire une suite de vecteurs X^k convergeant vers la solution X recherchée.

II. Rappel :

I-1. Systèmes d'équations linéaires :

a. Définition :

On appelle système de n équations linéaires à P inconnues $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ le système :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (\mathrm{L}_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (\mathrm{L}_2) \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n & (\mathrm{L}_n) \end{cases}$$

b. Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{np}X_p = B_n$$

Avec X_p et B_n deux matrices colonnes et A appelée matrice de transformation à n lignes et p colonnes.

Les coefficients $a_{ij} \in K$ ($K=R$ ou $K=C$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

Les $b_i \in K$ avec $1 \leq i \leq n$ constituent le second membre de (S) .

Le système est dit homogène si $b_i = 0$ et non homogène si $b_i \neq 0$.

Les lignes sont numérotées par (L_i).

c. Opérations élémentaires :

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système d'équations linéaires, les opérations suivantes :

- Multiplication par un scalaire $k \in K^*$: $(L_i) \leftarrow k\,(L_i)$
- Permutation de deux lignes : $(L_i) << (L_j)$
- Addition à une ligne, d'un multiple d'une autre ligne : $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j)$ $\lambda \in K^*$.

Propriété : Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système d'équations linéaires transforme ce dernier en un système équivalent ayant le même ensemble de solutions.

I-2. Système linéaire carré :

a. Définition :

On appelle Système linéaire de Cramer (ou système linéaire carré) un système de n équations à n inconnues.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 & (L_2) \\ \ldots & & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n & (L_n) \end{cases}$$

Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{nn}X_n = B_n$$

Avec X_n et B_n les matrices colonnes et A la matrice carrée de transformation.

b. Résolution :

Un système linéaire carré admet une solution unique si le déterminant de la matrice de transformation A est non nul ($|A| \neq 0$).

Si le déterminant de A est nul : soit le système admet une infinité de solutions ou bien n'admet aucune solution.

Pour résoudre un système linéaire carré plusieurs méthodes existent :

- Basée sur le calcul du déterminant : $X = \frac{|Ai|}{|A|}$ dont A_i est la matrice A avec la colonne i remplacée par le vecteur b (si le système est non homogène $b \neq 0$).
- Basé sur l'inversion de la matrice A : $Ax = b \rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$
- Triangulation du système (détaillée dans la suite).

I-3. Système linéaire triangulaire :

Une matrice triangulaire est une matrice carrée dont les éléments sont nuls au-dessus $a_{ij} = 0$ pour $i > j$: matrice triangulaire supérieure) ou au-dessous ($a_{ij} = 0$ pour $i < j$: matrice triangulaire inférieure) de la diagonale principale.

a. Matrices triangulaires supérieures :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

b. Matrices triangulaires inférieures :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Un système linéaire est dit triangulaire si sa matrice de transformation est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure).

Exemple :

Soient les deux systèmes linéaires suivants :

Système A	Système B
$3x + 5y + 7z = 101$	$3x + 5y + 7z = 101$ **(L1)**
$2x + 10y + 6z = 134$	$5y + z = 50$ **(L2)**
$x + 2y + 3z = 40$	$9z = 45$ **(L3)**

Le système B est un système triangulaire. Sa résolution est plus simple qu'un système carré.

- En effet à partir de (L3) on peut déduire que z =45/9 =5.
- En remplaçant le résultat obtenu dans (L2) on calcule y = (50-z)/5 =9
- Remplaçons les résultats obtenus dans (L1) on trouve x = (101-5*9-7*5)/3=7

Un système triangulaire admet une et une seule solution si aucun élément de la diagonale n'est nul.

Sinon le système peut avoir 0 ou une infinité de solutions.

$x - y + mz = 2$	Si $m \neq 0$ et $m \neq 1$ → une seule solution
$y - z = 1$	Si $m = 0$ →infinité de solutions
$m(m-1)z = m$	Si $m = 1$ → aucune solution

I-4. Transformation d'un système carré en un système triangulaire (Triangulation de matrice) :

Tout système carré peut être transformé en un système triangulaire (exemple système A). En effet ceci revient à multiplier la matrice A par une matrice M de telle sorte que la matrice résultat soit triangulaire (ce processus est dit « triangulation de matrice »).

Le vecteur b doit être lui aussi multiplié par la matrice M :

(S) : A x = b → MA x = Mb (avec MA est une matrice triangulaire).

III. Remarques sur la résolution des systèmes linéaires :

On n'utilise dans ces méthodes ni la formule de Cramer ni l'inversion des matrices pour la résolution d'un système linéaire, parce qu'elles nécessitent un nombre trop important d'opérations élémentaires.

Structure de la matrice :

La structure de la matrice a une incidence fondamentale sur la difficulté de la résolution et sur le choix de la méthode :

Cas d'une matrice diagonale

Tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale principale :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_N \end{bmatrix}$$

La résolution de AX = b est alors immédiate. $X_i = b_i/a_i$, i =1, …, n.

Algorithmes de résolution :

Méthode de descente (matrice triangulaire inférieure)	**Méthode de remontée (matrice triangulaire supérieure) (*back subtitution*)**
$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$ $x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j\right),\ i = 2,\ldots,n.$	$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ $x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j\right),\ i = 2,\ldots,n.$
Algorithme $x_1 = b_1 / a_{11}$ *pour i = 2 à n faire* $x_i = b_i$ *pour j = 1 à i-1 faire* $x_i = x_i - a_{ij}\, x_j$ *fin pour* $x_i = x_i / a_{ii}$ *fin pour*	*Algorithme* $x_n = b_n / a_{nn}$ *pour i = n-1 à 1 faire* $x_i = b_i$ *pour j = i+1 à n faire* $x_i = x_i - a_{ij}\, x_j$ *fin pour* $x_i = x_i / a_{ii}$ *fin pour*
Nombre d'opérations effectuées : Additions (soustraction) : $\frac{n(n-1)}{2}$ opérations. Multiplications : $\frac{n(n-1)}{2}$ opérations.	Divisions : n opérations. Total : n^2 opérations.

IV. Méthode d'élimination de Gauss :

Une technique de choix pour ramener la résolution d'un système linéaire quelconque à celle d'un système triangulaire et la méthode d'élimination de Gauss. Celle-ci consiste en premier lieu à transformer, par des opérations simples sur les équations, ce système en un système équivalent, c'est-à-dire ayant la (ou les) même(s) solution(s), ***MAx = Mb***, dans lequel ***MA*** est une matrice triangulaire supérieure (on dit encore que la matrice du système est sous forme échelonnée).

Cette étape de mise à zéro d'une partie des coefficients de la matrice est qualifiée d'élimination et utilise de manière essentielle le fait qu'on ne modifie pas la solution d'un système linéaire en ajoutant à une équation donnée une combinaison linéaire des autres équations. Si A est inversible, la solution du système peut ensuite être obtenue par une méthode de remontée, mais le procédé d'élimination est en fait très général, la matrice pouvant être rectangulaire.

IV.1 Elimination de Gauss sans échange :

Soit un système linéaire Ax =b (A est matrice carrée (n*n) inversible et b un vecteur de n éléments).

Si l'élément a_{11} de la matrice A est non nul ainsi on peut éliminer la variable x_1 des lignes 2 à n du système en leur retranchant respectivement la première ligne multipliée par le coefficient a_{i1}/a_{11} (i = 2, .. ,n).

En notant $A^{(2)}$ et $b^{(2)}$ la matrice et le vecteur second membre résultant de ces opérations, on a alors :

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \text{ et } b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1,\ i = 2, \ldots, n, j = 2, \ldots, n,$$

Et le système $A^{(2)} x = b^{(2)}$ est équivalent au système de départ.

En supposant le coefficient diagonal $a_{22}^{(2)}$ de $A^{(2)}$ est non nul, on peut procéder à l'élimination de l'inconnue x_2 des lignes 3 à n de ce système, et ainsi de suite.

On obtient, sous l'hypothèse $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, k = 1; : : : ; n - 1, une suite finie de matrices $A^{(k)}$, k ≥ 2, de la forme :

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & & & & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \ldots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

et telles que le système $A^{(k)}x = b^{(k)}$ est triangulaire supérieur. Les quantités $a_{kk}^{(k)}$, k = 1,...,n-1 sont appelées pivots et l'on a supposé qu'elles étaient non nulles à chaque étape.

La formule permettant de passer du k[ième] système linéaire au k + 1[ième] se résume à :

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \text{ et } b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)},\ i = 2, \ldots, n, j = 2, \ldots, n.$$

En pratique, pour une résolution _ à la main _ d'un système linéaire Ax = b par cette méthode, il est commode d'appliquer l'élimination à la matrice augmentée (A b).

Exemple :

Système A x = b	$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 13 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 14 \end{array}\right.$.
Etape1 : Pivot = a_{11} = 1 $A^{(1)} x = b^{(1)}$	$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 11 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 7x_4 & = & -10 \\ & - & 2x_2 & - & 8x_3 & - & 10x_4 & = & -20 \\ & - & 7x_2 & - & 10x_3 & - & 13x_4 & = & -30 \end{array}\right.$
Etape2 : Pivot = a_{22} = -1 $A^{(2)} x = b^{(2)}$	$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 11 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 7x_4 & = & -10 \\ & & & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & & & & 4x_3 & + & 36x_4 & = & 40 \end{array}\right.$
Etape3 : Pivot = a_{33} = - 4 $A^{(3)} x = b^{(3)}$	$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 11 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 7x_4 & = & -10 \\ & & & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 40x_4 & = & 40 \end{array}\right.$.

Ce système triangulaire, équivalent au système d'origine, est enfin résolu par remontée :

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = x_4 = 1 \\ x_2 = 10 - 2 - 7 = 1 \\ x_1 = 11 - 2 - 3 - 4 = 2 \end{cases}$$

Comme on l'a vu, la méthode de Gauss, dans sa forme sans échange, ne peut s'appliquer que si tous les pivots $a_{kk}^{(k)}$, k = 1,…, n-1, sont non nuls, ce qui élimine de fait des matrices inversibles aussi simples que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A^{(1)} \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Il apparaît donc que des conditions plus restrictives que l'inversibilité de la matrice sont nécessaires pour assurer la bonne exécution de cette méthode. Celles-ci sont fournies par le théorème 2.2. Indiquons qu'il existe des catégories de matrices pour lesquelles la méthode de Gauss sans échange peut être utilisée sans aucun risque. Parmi celles-ci, on trouve les **matrices à diagonale dominante par ligne ou par colonne** et les **matrices symétriques définies positives.**

IV.2 Elimination de Gauss avec échange :

Dans sa forme générale, la méthode d'élimination de Gauss permet de transformer un système linéaire dont la matrice est carrée (inversible ou non) ou même rectangulaire en un système échelonné équivalent.

En considérant le cas d'une matrice A carrée inversible, nous allons maintenant décrire les modifications à apporter à la méthode de Gauss sans échange pour mener l'élimination à son terme.

À la première étape, au moins l'un des coefficients de la première colonne de la matrice $A^{(1)}$(= A) est non nul, faute de quoi la matrice A ne serait pas inversible. On choisit un de ces éléments comme premier pivot d'élimination et l'on échange alors la première ligne du système avec celle du pivot avant de procéder à l'élimination de la première colonne de la matrice résultante, c'est-à-dire l'annulation de tous les éléments de la première colonne de la matrice (permutée) du système situés sous la diagonale.

On note $A^{(2)}$ et $b^{(2)}$ la matrice et le second membre du système obtenu et l'on réitère ce procédé.

À l'étape k, 2 ≤k ≤ n - 1, la matrice $A^{(k)}$ est inversible, et donc l'un au moins des éléments $a_{ik}^{(k)}$, k ≤ i ≤ n, est différent de zéro. Après avoir choisi comme pivot l'un de ces coefficients non nuls, on effectue l'échange de la ligne de ce pivot avec la $k^{ième}$ ligne de la matrice $A^{(k)}$, puis l'élimination conduisant à la matrice $A^{(k+1)}$. Ainsi, on arrive après n - 1 étapes à la matrice $A^{(n)}$, dont le coefficient $a_{nn}^{(n)}$ est non nul.

En raison de l'échange de lignes qui a éventuellement lieu avant chaque l'étape d'élimination, on parle de méthode d'élimination de Gauss avec échange.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & -1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ et } b^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -7 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix},$$

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } b^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -7 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

La solution $X = (1\ \ -1\ \ 0\ 2)^T$.

On note que l'on a procédé au cours de la deuxième étape à l'échange de la deuxième et la troisième ligne.

On pourra remarquer que si la matrice A est non inversible, alors tous les éléments $a_{ik}^{(k)}$, $k \leq i \leq n$, seront nuls pour au moins une valeur de k entre 1 et n. Si $k \neq n$, on n'a dans ce cas pas besoin de réaliser l'élimination de cette $k^{ième}$ (puisque cela est déjà fait) et l'on passe simplement à l'étape suivante en posant $A^{(k+1)} = A^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = b^{(k)}$.

L'élimination est donc bien possible pour une matrice carrée non inversible et l'on a démontré le résultat suivant :

Théorème :

Soit A une matrice carrée, inversible ou non. Il existe au moins une matrice inversible M telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure.

Nombre d'opérations effectuées :

Le nombre d'opérations élémentaires que requiert l'application de la méthode d'élimination de Gauss pour la résolution d'un système linéaire de n équations à n inconnues est calculé comme suit :

- Le passage de la matrice $A^{(k)}$ à la matrice $A^{(k+1)}$, $1 \leq k \leq n-1$: on effectue $(n-k+1)(n-k) = (n-k)^2+(n-k)$ additions, $(n - k + 1)(n - k)$ multiplications et $n - k$ divisions, ce qui correspond à un total de :

  $\frac{n(n^2-1)}{3}$ additions, $\frac{n(n^2-1)}{3}$ multiplications et $\frac{n(n-1)}{2}$ pour l'élimination complète.
- Pour la mise à jour du second membre à l'étape k, on a besoin de $n - k$ additions et multiplications, soit en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ additions et multiplications.
- En fin, il faut faire $\frac{n(n-1)}{2}$ additions et $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications et n divisions pour résoudre le système final par une méthode de remontée.

En tout, la résolution du système par la méthode d'élimination de Gauss nécessite donc de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ additions, $\frac{n^3}{3}$ multiplications et $\frac{n^2}{2}$ divisions.

À titre de comparaison, le calcul de la solution du système par la règle de Cramer requiert, en utilisant un développement brutal par ligne ou colonne pour le calcul des déterminants, de l'ordre de $(n+1)!$ additions, $(n+2)!$ multiplications et n divisions.

Ainsi, pour n = 10 par exemple, on obtient un compte d'environ 700 opérations pour la méthode d'élimination de Gauss contre près de 479000000 opérations pour la règle de Cramer.

Le choix du pivot et l'erreur d'arrondi :

En fait le choix du pivot à chaque étape d'élimination peut avoir un grand effet sur l'erreur d'arrondi dans le résultat final. Examinons par exemple le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ce système admet comme solution x1=1,0001 et x2=0,9999.

Cependant en calculant sa solution en virgule flottante avec 3 chiffres dans la mantisse, le résultat obtenu diffère selon le choix du pivot :

- Pivot = 10^{-4} : x1 =0 et x2 =1 (puisque les nombres $-10^4 + 1 = -9999$ et $-10^4 + 2 = -9998$ sont tous deux arrondis au même nombre 9990).
- Pivot =1 (après la permutation des lignes) : x1=1 et x2=1 (puisque les nombres $-10^{-4}+1=-0{,}9999$ et $-2\mathrm{x}10^{-4}+2=-0{,}9998$ sont arrondis au même nombre 0,999).

De ce fait, pour éviter la propagation d'erreurs et obtenir une meilleure stabilité numérique de la méthode, il faut chercher, même dans le cas où le pivot « naturel » est non nul, à choisir le plus grand pivot en valeur absolue.

Pour cela deux stratégies sont adoptées pour le choix du bon pivot :

- **Stratégie de pivot partiel :** choisir le plus grand élément en valeur absolue parmi les éléments de la colonne correspondante situés en dessous de la diagonale :

$$|a_{ik}^{(k)}| = \max_{k \leq p \leq n} |a_{pk}^{(k)}|, \ k \leq i \leq n$$

- **Stratégie du pivot total :** choisir le plus grand élément en valeur absolue parmi les éléments de la sous-matrice $a_{ij}^{(k)}, \ k \leq i, j \leq n,$ et qui vérifie :

$$|a_{ij}^{(k)}| = \max_{k \leq p,q \leq n} |a_{pq}^{(k)}|$$

Dans ce dernier cas, si le pivot n'est pas dans la k^{ième} colonne, il faut procéder à un échange de colonnes en plus d'un éventuel échange de lignes.

Quelle que soit la stratégie adoptée, cette recherche de pivot doit également être prise en compte dans l'évaluation du coût global de la méthode d'élimination de Gauss.

Exemple :

Soit le système linéaire S définit comme suit :

Système (S)	Matrice associée (augmentée)
$3x1 - x2 + x3 + 2x4 = 12$ $x1 + x2 - 3x3 + x4 = -3$ $2x1 + 2x2 - x3 - x4 = -5$ $-x1 + 3x2 + x3 + 2x4 = 4$	$\left[\begin{array}{cccc\|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$

Itération 1 calculer $A^{(1)}$:

Le pivot est $a_{11} = 3$ (non nul).

- Les éléments de la 1ère ligne de $A^{(1)}$ sont les mêmes que ceux de la matrice A.
- Tous les éléments de la 1ère colonne de la matrice $A^{(1)}$ au-dessous de la diagonale sont nuls.
- Le reste des éléments sont calculés par : $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} * a_{1j} / a_{11}$.

  $a_{23}^{(1)} = a_{23} - (a_{21} * a_{13}) / a_{11} = -3 - (1*1)/3 = -10/3$

  $a_{34}^{(1)} = a_{34} - (a_{31} * a_{14}) / a_{11} = -1 - (2*2)/3 = -7/3$.

  On obtient ainsi la matrice $A^{(1)}$:

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 4/3 & -10/3 & 1/3 & -7 \\ 0 & 8/3 & -5/3 & -7/3 & -13 \\ 0 & 8/3 & 4/3 & 8/3 & 8 \end{array}\right]$$

Itération 2 calculer $A^{(2)}$:

Le pivot est $a_{22}^{(1)} = 4/3$ (non nul).

- Les éléments de la 1ère et la 2ème ligne de $A^{(2)}$ sont les mêmes que ceux de la matrice $A^{(1)}$.
- Tous les éléments de la 1ère et la 2ème colonne de la matrice $A^{(2)}$ qui sont au-dessous de la diagonale sont nuls.
- Le reste des éléments sont calculés par : $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} * a_{2j}^{(1)} / a_{22}$.

  On obtient ainsi la matrice $A^{(2)}$:

$A^{(2)}$ =

3	-1	1	2	12
0	4/3	-10/3	1/3	-7
0	0	5	-3	1
0	0	8	2	22

Itération 3 calculer $A^{(3)}$:

Le pivot est $a_{33}^{(2)} = 5$ (non nul).

- Les éléments de la 1ère , la 2ème et la 3ème ligne de $A^{(3)}$ sont les mêmes que ceux de la matrice $A^{(2)}$.
- Tous les éléments de la 1ère , la 2ème et la 3ème colonne de la matrice $A^{(3)}$ qui sont au-dessous de la diagonale sont nuls.
- Le reste des éléments sont calculés par : $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)} * a_{3j}^{(2)} / a_{33}$.

  On obtient ainsi la matrice $A^{(3)}$:

$A^{(3)}$ =

3	-1	1	2	12
0	4/3	-10/3	1/3	-7
0	0	5	-3	1
0	0	0	34/5	102/5

Résolution :

$$x4 = \frac{102}{5} / \frac{34}{5} = 3$$

$$x3 = \frac{1}{5}(1 + 3x4) = \frac{1}{5}(1 + 3 * 3) = 2$$

$$x2 = \frac{3}{4}\left(-7 - \frac{1}{3}x4 + \frac{10}{3}x3\right) = -1$$

$$x1 = \frac{1}{3}(12 + x2 - x3 - 2x4) = 1$$

V. La méthode de Gauss-Jordan :

La méthode d'élimination de Gauss_Jordan est une variante de la méthode d'élimination de Gauss ramenant toute matrice sous forme échelonnée réduite.

Dans le cas d'une matrice A inversible, cette méthode revient à chercher une matrice $\tilde{M}$ telle que la matrice $\tilde{M}A$ soit non pas triangulaire supérieure mais diagonale. Pour cela, on procède comme pour l'élimination de Gauss, mais en annulant à chaque étape tous les éléments de la colonne considérée situés au-dessous et au-dessus de la diagonale.

Le processus de diagonalisation est constitué des étapes suivantes :

- Triangulation de la matrice (augmentée) pour avoir une matrice triangulaire supérieure (le même principe de la méthode de Gauss.
- Mise à 1 de la diagonale de la matrice obtenue.
- Diagonalisation de la matrice : on applique le même principe de Gauss mais sur les éléments au-dessus de la diagonale.
- Résolution du système : la solution du système est le vecteur résultat obtenu (la dernière colonne de la matrice résultat est elle-même la solution du système).

Exemple :

Soit le système linéaire S définit comme suit :

Système (S)

$$\begin{aligned} 3x1 - x2 + x3 + 2x4 &= 12 \\ x1 + x2 - 3x3 + x4 &= -3 \\ 2x1 + 2x2 - x3 - x4 &= -5 \\ -x1 + 3x2 + x3 + 2x4 &= 4 \end{aligned}$$

Matrice associée (augmentée)

3	-1	1	2	12
1	1	-3	1	-3
2	2	-1	-1	-5
-1	3	1	2	4

Etape 1 : Triangulation de la matrice.

On calcule la matrice triangulaire supérieure, en appliquant le même principe de la méthode de Gauss :

Itération 1

3	-1	1	2	12
0	4/3	-10/3	1/3	-7
0	8/3	-5/3	-7/3	-13
0	8/3	4/3	8/3	8

Itération 2

3	-1	1	2	12
0	4/3	-10/3	1/3	-7
0	0	5	-3	1
0	0	0	2	22

Itération 3				
3	-1	1	2	12
0	4/3	-10/3	1/3	-7
0	0	5	-3	1
0	0	0	34/5	102/5

Matrice triangulaire supérieure				
3	-1	1	2	12
0	4/3	-10/3	1/3	-7
0	0	5	-3	1
0	0	0	34/5	102/5

Etape 2 : mise à 1 de la diagonale :

Chaque élément a_{ij} de la ligne L_i doit être divisé par l'élément de la diagonale a_{ii}.

$L_i \leftarrow (L_i)/a_{ii}$. On obtient la matrice suivante :

Etape4 : Mise à 1 de la diagonale				
1	-1/3	1/3	2/3	4
0	1	-5/2	1/4	-21/4
0	0	1	-3/5	1/5
0	0	0	1	3

Etape 3 : diagonalisation.

Itération 1 : élimination des éléments de la colonne 4 (Pivot = a_{44} = 1).

Soit A la matrice triangulaire supérieure calculée précédemment, et $A^{(1)}$ la matrice qu'on cherche à calculer dans cette étape.

On copie tous les éléments de la matrice A dans la nouvelle matrice $A^{(1)}$ sauf les éléments suivants :

- Chaque élément de la colonne 4 au-dessus de la diagonale sera mis à 0.
- Pour chaque élément $a_{i5}^{(1)}$ de la colonne 5 au-dessus de la diagonale on calcule :

$a_{i5}^{(1)} = a_{i5} - a_{i4} \text{ x } a_{45} /\text{pivot} = a_{i5} - a_{i4} \text{ x } a_{45}$ (pivot =1)

- $a_{15}^{(1)} = a_{15} - a_{14} \text{ x } a_{45} = 4 - (2/3) * (3) = 2$,
- $a_{25}^{(1)} = a_{25} - a_{24} \text{ x } a_{45} = (-21/4) - (1/4) * (3) = -6$,
- $a_{35}^{(1)} = a_{35} - a_{34} \text{ x } a_{45} = (1/5) - (-3/5) * (3) = 2$.

On obtient ainsi la matrice :

Etape3 : Itération 1				
1	-1/3	1/3	0	2
0	1	-5/2	0	-6
0	0	1	0	2
0	0	0	1	3

Itération 2 : élimination des éléments de la colonne 3 (Pivot = a_{33} = 1).

On copie tous les éléments de la matrice $A^{(1)}$ dans la nouvelle matrice $A^{(2)}$ sauf les éléments suivants :

- Chaque élément de la colonne 3 au-dessus de la diagonale sera mis à 0.
- Pour chaque élément $a_{i5}^{(2)}$ de la colonne 5 au-dessus de la diagonale on calcule :

  $a_{i5}^{(2)} = a_{i5}^{(1)} - a_{i3}^{(1)} \times a_{35}^{(1)}$ /pivot = $a_{i5} - a_{i3} \times a_{35}$.

  - $a_{15}^{(2)} = a_{15}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \times a_{35}^{(1)} = 2 - (1/3) * (2) = 4/3$,
  - $a_{25}^{(1)} = a_{25} - a_{23} \times a_{35} = (-6) - (-5/2) * (2) = -1$,

On obtient ainsi la matrice :

Etape3 : Itération 2				
1	-1/3	0	0	4/3
0	1	0	0	-1
0	0	1	0	2
0	0	0	1	3

Itération 3 : élimination des éléments de la colonne 2 (Pivot = a_{22} = 1).

On copie tous les éléments de la matrice $A^{(2)}$ dans la nouvelle matrice $A^{(3)}$ sauf les éléments suivants :

- Chaque élément de la colonne 2 au-dessus de la diagonale sera mis à 0 (l'élément a_{12}).
- Pour chaque élément $a_{i5}^{(2)}$ de la colonne 5 au-dessus de la diagonale on calcule (l'élément a_{15}) :

  $a_{i5}^{(3)} = a_{i5}^{(2)} - a_{i2}^{(2)} \times a_{25}^{(2)}$ /pivot = $a_{i5} - a_{i2} \times a_{25}$.

  - $a_{15}^{(3)} = a_{15}^{(2)} - a_{12}^{(2)} \times a_{25}^{(2)} = 4/3 - (-1/3) * (-1) = 1$,

On obtient ainsi la matrice :

Etape3 : Itération 3				
1	0	0	0	1
0	1	0	0	-1
0	0	1	0	2
0	0	0	1	3

Etape 4 : résolution du système.

La solution est obtenue directement de la matrice (la colonne 5) : $X_i = A_{i5}^{(3)}$.

$X_1 = A_{15}^{(3)} = 1$, $X_2 = A_{25}^{(3)} = -1$, $X_3 = A_{35}^{(3)} = 2$, $X_4 = A_{45}^{(3)} = 3$.

VI. Interprétation matricielle de l'élimination de Gauss : la factorisation LU :

Supposons qu'on doive, dans un programme donné, résoudre plusieurs fois le même système linéaire AX = b avec différents seconds membres b, mais la même matrice A.

Si tous les seconds membres b sont initialement connus, on peut alors effectuer simultanément sur tous les seconds membres les manipulations intervenant dans l'élimination de Gauss.

Le plus souvent, dans la pratique, il s'agit de résoudre des systèmes avec des b calculés au cours du processus et donc inconnus initialement. Il n'est alors pas raisonnable de recommencer la triangulation de Gauss à chaque résolution : il faut conserver ce résultat qui consiste en fait à factoriser la matrice A sous la forme A = LU ou L est une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure (L = lower U = upper_) : on conservera en mémoire L et U. Par la suite, tout système AX = b ⟺ LUX = b sera remplacé par la résolution des deux systèmes équivalents :

$$\begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}$$

Il s'agit alors de systèmes triangulaires qui se résolvent par une méthode de descente puis de remontée soit un nombre d'opérations égal à $2N^2$.

Idée principale :

La décomposition LU est une forme particulière d'élimination de Gauss-Jordan. On transforme la matrice A en une matrice triangulaire supérieure U en éliminant les éléments sous la diagonale. Les éliminations se font colonne après colonne, en commençant par la gauche, en multipliant A par la gauche avec une matrice triangulaire inférieure.

Algorithme :

Étant donné une matrice de dimension NxN $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N}$, on définit $A^{(0)} = A$ et on va construire les matrices $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, \ldots, A^{(N-1)}$ itérativement, en ayant pour objectif que la matrice $A^{(n)}$ ait ses n premières colonnes de coefficients nuls sous la diagonale.

Soit la matrice $A^{(n-1)}$, on construit la matrice $A^{(n)}$ de la manière suivante : considérant la nième colonne de $A^{(n-1)}$, on élimine les éléments sous la diagonale en ajoutant à la ième ligne de cette matrice, la nième ligne multipliée par :

$$L_{i,n} = - a_{i,n}^{(n-1)} / a_{n,n}^{(n-1)}$$

Pour i= n+1,...,N. Ceci peut être fait en multipliant par la gauche $A^{(n-1)}$ avec la matrice triangulaire inférieure :

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{n+1,n} & \ddots & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & l_{N,n} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$A^{(n)} = L_n A^{(n-1)}$.

Après N – 1 itérations, nous avons éliminé tous les éléments sous la diagonale, par conséquent, nous avons maintenant une matrice triangulaire supérieure $A^{(N-1)}$.

Nous obtenons la décomposition

$$A = L_1^{-1} L_1 A^{(0)} = L_1^{-1} A^{(1)} = L_1^{-1} L_2^{-1} L_2 A^{(1)} = L_1^{-1} L_2^{-1} A^{(2)} = \ldots = L_1^{-1} \ldots L_{N-1}^{-1} A^{(N-1)}.$$

Notons U, la matrice triangulaire supérieure $\boldsymbol{A^{(N-1)}}$ et $\boldsymbol{L = (L_1)^{-1} \ldots (L_{N-1})^{-1}}$ Sachant que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est aussi une matrice triangulaire inférieure et que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est encore une matrice triangulaire inférieure ; L est donc une matrice triangulaire inférieure. On obtient ***A=LU***.

Au vu de l'algorithme, il est nécessaire que $\boldsymbol{a_{n,n}^{(n-1)} \neq 0}$ à chaque itération. Si, au cours du calcul, ce cas de figure venait à se produire, il faut intervertir la nième ligne avec une autre pour pouvoir continuer (il est toujours possible de trouver un élément non nul sur la colonne qui pose problème car la matrice est inversible). C'est la raison pour laquelle la décomposition LU s'écrit généralement $\boldsymbol{P^{-1}A=LU}$.

Algorithme Factorisation LU :

```
L = In; U = 0
Pour i = 1 à n - 1
    Pour j = i + 1 à n
        lji = aji/aii
    Pour j = i à n
        uij = aij
    Pour j = i + 1 à n
        pour k = i + 1 à n
            ajk = ajk - lji * uik
unn = ann
```

Nombre d'opérations :

Le calcul de la matrice U est similaire à celui de l'élimination de Gauss, ainsi le nombre d'opérations effectuées est le même ($\frac{2}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 \approx O(\frac{2}{3}N^3)$).

Le calcul de la matrice L nécessite une opération de division pour chaque élément de la partie sous le diagonal principal (en réalité on n'est pas obligé de calculer $L = L_1^{-1} * L_2^{-1} * .. * L_{n-1}^{-1}$, mais de calculer à chaque itération d'élimination k les éléments de la kième colonne sous la diagonale lors du calcul des matrices L_i puis inverser leurs valeurs et les affecter à la colonne k de la matrice L).

Si on ignore les opérations d'affectation on trouve les résultats suivants :

- Additions : 0
- Multiplications : 0
- Divisions : N-1 + N-2 + ... + 1 $= \frac{1}{2}$N(N-1) $= \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}N$

En rajoutant ce résultat au précédent on trouve : $(\frac{2}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2) + (\frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}N) = (\frac{2}{3}N^3 + N^2 - \frac{1}{2}N)$

- Total : $O(\frac{2}{3}N^3)$

La résolution du système nécessite deux fois le nombre d'opérations de celui de Gauss (résolution de deux systèmes avec matrices triangulaires), donc c'est égale à $2N^2$.

Donc au total le nombre d'opération est de l'ordre $\simeq O(\frac{2}{3}N^3)$.

Exemple Méthode LU :

Système linéaire	Matrice associée (A)
$3x1 - x2 + x3 + 2x4 = 12$ $x1 + x2 - 3x3 + x4 = -3$ $2x1 + 2x2 - x3 - x4 = -5$ $-x1 + 3x2 + x3 + 2x4 = 4$	$\begin{array}{cccc\|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}$

Résolution :

On travaille avec la matrice associée (pas avec la matrice augmentée), c'est-à-dire que le vecteur résultat reste tel qu'il est.

Itération 1 :

La matrice $L^{(1)}$ est une matrice de la même dimension que la matrice associée au système (4x4 dans cet exemple), initialisée par la matrice unitaire.

Pour chaque élément de la 1ère colonne au-dessous de la diagonale on calcule :

$L_{i1}^{(1)} = - a_{i1}/a_{11}$.

La matrice $A^{(1)}$ est calculée par :

$A^{(1)} = L^{(1)} \times A$.

Itération 2 :

La matrice $L^{(2)}$ est initialisée par la matrice unitaire puis pour chaque élément de la colonne 2 au-dessous de la diagonale on calcule :

$L_{i2}^{(2)} = - a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$.

La matrice $A^{(1)}$ est calculée par :

$A^{(2)} = L^{(2)} \times A^{(1)}$.

Itération 3 :

La matrice $L^{(3)}$ est initialisée par la matrice unitaire puis pour chaque élément de la colonne 3 au-dessous de la diagonale on calcule :

$L_{i3}^{(3)} = - a_{i3}^{(2)}/a_{33}^{(2)}$.

La matrice $A^{(1)}$ est calculée par :

$A^{(3)} = L^{(3)} \times A^{(2)}$.

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Itération 1	$L^{(1)}$	$A^{(1)}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4/3 & -10/3 & 1/3 \\ 0 & 8/3 & -5/3 & -7/3 \\ 0 & 8/3 & 4/3 & 8/3 \end{bmatrix}$
Itération 2	$L^{(2)}$	$A^{(2)}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4/3 & -10/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$
Itération 3	$L^{(3)}$	$A^{(3)}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4/3 & -10/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 34/5 \end{bmatrix}$

Calcul de la matrice L et la matrice U :

- $L = (L^{(1)})^{-1} \times (L^{(2)})^{-1} \times (L^{(3)})^{-1}$.
- $U = A^{(3)}$.

Astuce :

La matrice L peut être déduite à partir des matrices $L^{(i)}$ sans avoir requiert au calcul du produit des inverse des $L^{(i)}$, et ce en suivant le processus suivant :

- Initialiser la matrice L par la matrice élémentaire.
- Pour chaque colonne j de la matrice L, ses éléments au-dessous de la diagonale sont égaux aux éléments de la même colonne de la matrice $L^{(j)}$ mais en inversant leur signes.

Résultat de la	$L = (L^{(1)})^{-1} \times (L^{(2)})^{-1} \times (L^{(3)})^{-1}$	$U = A^{(3)}$

<table>
<tr><td>factorisation</td><td>

1	0	0	0
1/3	1	0	0
2/3	2	1	0
-1/3	2	8/5	1

</td><td>

3	-1	1	2
0	4/3	-10/3	1/3
0	0	5	-3
0	0	0	34/5

</td></tr>
</table>

Résolution du système après factorisation :

Le système A*x = b devient ainsi L*U*x=b ⇔ (L*y = b, et U*x = y).

L*y = b	**U*x = y**
$y1 \ = 12$ $\frac{1}{3}y1 \ + \ y2 \ = -3$ $\frac{2}{3}y1 + 2y2 + y3 \ = -5$ $-\frac{1}{3}y1 + 2y2 + \frac{8}{5}y3 + y4 = 4$	$3x1 - x2 + x3 + 2x4 = y1$ $\frac{4}{3}x2 - \frac{10}{3}x3 + \frac{1}{3}x4 = y2$ $5x3 - 3\,x4 = y3$ $\frac{34}{5}x4 = y4$
$y1 \ = 12\,, y2 \ = -7, y3 = 1\,, y4 = \frac{102}{5}$	$x4 = 3, x3 = \ 2, x2 = -1\,, x1 = \ 1$

Avantage de la factorisation LU :

Si on cherche à résoudre le système avec d'autres valeur pour le vecteur b, on n'aura pas besoin de refaire la factorisation de la matrice A.

Par exemple : résoudre le système $Ax = b'$ avec *b' = (13, -10, -3, 1)*^{t}.

L*y = b'	***U*x = y***
$y1 \ = 13$ $\frac{1}{3}y1 \ + \ y2 \ = -10$ $\frac{2}{3}y1 + 2y2 + y3 \ = -3$ $-\frac{1}{3}y1 + 2y2 + \frac{8}{5}y3 + y4 = 1$	$3x1 - x2 + x3 + 2x4 = y1$ $\frac{4}{3}x2 - \frac{10}{3}x3 + \frac{1}{3}x4 = y2$ $5x3 - 3\,x4 = y3$ $\frac{34}{5}x4 = y4$
$y1 \ = 13\,, y2 \ = -\frac{43}{3}, y3 = 17\,, y4 = \frac{34}{5}$	$x4 = 1, x3 = \ 4, x2 = -1\,, x1 = \ 2$

Références bibliographiques :

- Jean-Michel Muller " Elementary Fucntions – Algorithms and implementation" 3rd Edition Birkhauser 2016.
- Vincent Lefèvre & Paul Zimmermann " Arithmétique flottante" rapport de recherche INRIA 2004.
- Guillaume Legendre "Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique" Cours de Méthodes numériques - Université Paris Dauphine 2010.
- Takeo Takahashi "Analyse numérique" Cours électif CE33 Ecole des Mines de Nancy 2014.

Annexe :

Voici quelques exercices pour s'entrainer :

Exercice 1 :

Résoudre les systèmes suivants par la méthode de Gauss, puis par la méthode de Gauss-Jordan.

S1	S2	S3
$2x1 + 3x2 + x3 = 2$ $5x1 + x2 + 2x3 = 1$ $x1 + 4x3 = 3$	$x1 + 2x2 + 4x3 + 3x4 = 3$ $-x1 + 2x2 + 5x3 + x4 = 2$ $3x1 + 4x3 + x4 = 4$ $4x1 - 2x2 + x3 + 3x4 = 1$	$4x1 - 2x2 + 3x3 - x4 = 4$ $2x1 - 3x2 - x3 + x4 = 10$ $5x1 + 3x2 + 6x3 - x4 = 15$ $3x1 - x2 + 8x3 + 2x4 = 7$

Exercice 2 :

Factoriser la matrice associée au système Ax=b suivant selon la méthode LU, puis résoudre le système.

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & + x_2 & + \frac{1}{2}x_3 & - 5x_4 & = 3 \\ - 6x_1 & + 2x_2 & + \frac{3}{2}x_3 & - \frac{5}{3}x_4 & = 1 \\ x_1 & + \frac{1}{2}x_2 & + \frac{1}{2}x_3 & + x_4 & = 4 \\ 3x_1 & + x_2 & + \frac{7}{8}x_3 & & = 1 \end{pmatrix}$$

Résoudre le même système pour les valeurs du vecteur b suivants :

$b=(1, 0, -2, 3)^t$, $b=(5, 6, 4, 7)^t$, $b=(10, 100, 50, 30)^t$.

Solutions avec MATLAB :

Exercice 1 : système S1

Méthode de Gauss simple :

```
Matrice initiale  :
= = = = = = = = = =
      2              3              1              2
      5              1              2              1
      1              0              4              3

Une touche pour démarrer la Triangulation (Elimination de GAUSS)  . . .

Itération N° 1 :
= = = = = = = =
   Voici la matrice A :
      2              3              1              2
      0            -13/2          -1/2            -4
      0             -3/2           7/2             2

     Taper une touche pour continuer ......

Itération N° 2 :
= = = = = = = =
   Voici la matrice A :
      2              3              1              2
      0            -13/2          -1/2            -4
      0              0            47/13          38/13

     Taper une touche pour continuer ......

MATRICE TRIANGULAIRE FINALE :
= = = = = = = = = = = = = = =
      2              3              1              2
      0            -13/2          -1/2            -4
      0              0            47/13          38/13


VOICI LA SOLUTION DU SYSTEME :
= = = = = = = = = = = = = = = =

    X =      -11/47           26/47           38/47

Une touche pour continuer ...
```

Méthode de Gauss-Jordan :

```
METHODE DE GAUSS-JORDAN       GAUSS SIMPLE        DIAGONALISATION ETAPE PAR ETAPE
= = = = = = = = = = = =    = = = = = = = = = = =    = = = = = = = = = = = = = = = =

Matrice Initiale  :
= = = = = = = = = =
      2              3              1              2
      5              1              2              1
      1              0              4              3

Une touche pour démarrer la Diagonalisation (Elimination de GAUSS)  . . .

Itération N° 1 :
= = = = = = = =
   Voici la matrice A :
      2              3              1              2
      0           -13/2          -1/2             -4
      0            -3/2           7/2              2

     Taper une touche pour continuer ......

Itération N° 2 :
= = = = = = = =
   Voici la matrice A :
      2              3              1              2
      0           -13/2          -1/2             -4
      0              0          47/13          38/13

     Taper une touche pour continuer ......

MATRICE TRIANGULAIRE SUPERIEURE :
= = = = = = = = = = = = = = = =
      2              3              1              2
      0           -13/2          -1/2             -4
      0              0          47/13          38/13

Une touche pour continuer ..

MISE A 1 DE LA DIAGONALE DE LA MATRICE :

      1             3/2            1/2             1
      0              1             1/13           8/13
      0              0              1            38/47

Une touche pour continuer ..
```

```
DIAGONALISATION DE LA MATRICE (Matrice triangulaire supérieure) :

 Itération N° 1 :
 = = = = = = = =
       1              3/2             0              28/47
       0              1               0              26/47
       0              0               1              38/47

Une touche pour continuer ..
 Itération N° 2 :
 = = = = = = = =
       1              0               0             -11/47
       0              1               0              26/47
       0              0               1              38/47

Une touche pour continuer ..

 VOICI LA MATRICE DIAGONALE FINALE AUGMENTEE :
       1              0               0             -11/47
       0              1               0              26/47
       0              0               1              38/47

 Taper une touche pour continuer . . . . . . .

 VOICI LA SOLUTION DU SYSTEME :

     X =      -11/47          26/47          38/47
```

Exercice2 :

La matrice S1 = la matrice A augmentée :

2	1	1/2	-5	3
-6	2	3/2	-5/3	1
1	1/2	1/2	1	4
3	1	7/8	0	1

= =

La matrice L1 :

1	0	0	0
3	1	0	0
-1/2	0	1	0
-3/2	0	0	1

La matrice S2 :

2	1	1/2	-5	3
0	5	3	-50/3	10
0	0	1/4	7/2	5/2
0	-1/2	1/8	15/2	-7/2

La matrice L2 :

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	1/10	0	1

La matrice S3 :

2	1	1/2	-5	3
0	5	3	-50/3	10
0	0	1/4	7/2	5/2
0	0	17/40	35/6	-5/2

La matrice L3 :

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	-17/10	1

La matrice S4 :

2	1	1/2	-5	3
0	5	3	-50/3	10
0	0	1/4	7/2	5/2
0	0	0	-7/60	-27/4

La matrice L :

1	0	0	0
-3	1	0	0
1/2	0	1	0
3/2	-1/10	17/10	1

La matrice U = A4 :

2	1	1/2	-5
0	5	3	-50/3
0	0	1/4	7/2
0	0	0	-7/60

x1 = 1/2

x2 = -3

x3 = 4

x4 = -3/5

Le produit L*U :

2	1	1/2	-5
-6	2	3/2	-5/3
1	1/2	1/2	1
3	1	7/8	0

La matrice A :

2	1	1/2	-5
-6	2	3/2	-5/3
1	1/2	1/2	1
3	1	7/8	0