

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE JIJEL

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

***COURS SUR LES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES***

Deuxième année L.M.D.

Présenté par

Doria Affane

Juin 2015

Table des matières

0	Introduction générale	3
1	Généralités	7
1.1	Définitions	7
1.2	Problème de Cauchy.	9
1.3	Champ des tangentes	9
1.4	Solutions maximales	10
1.5	Solutions globales	11
1.6	Régularité des solutions	12
2	Théorème d'existence de solutions	13
2.1	Théorème du point fixe	13
2.2	Equivalence du problème de Cauchy avec la résolution d'une équation intégrale	14
2.3	Cylindres de sécurité	15
2.4	Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz	16
2.5	Unicité globale	18
2.6	Equations différentielles d'ordre supérieur à un	21
3	Méthodes de résolution des équations différentielles	23
3.1	Equations du premier ordre	23
3.2	Equations à variables séparées	25
3.3	Equations linéaires du premier ordre	29
3.4	Equations se ramenant à des équations Linéaires	36
3.5	Différentielle totale	41
3.6	Equation de de Lagrange	44
3.7	Equation de Clairaut	46

Chapitre 0

Introduction générale

Une équation différentielle est une équation mettant en relation une fonction ainsi qu'un certain nombre de ses fonctions dérivées. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n s'écrit :

$$f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

où y représente une fonction de la variable t , et $\dot{y}, \dots, y^{(n)}$ ses dérivées successives. D'un point de vue formel, le problème se pose donc de la même manière que pour les équations algébriques, mais avec la différence essentielle que l'inconnue n'est plus un nombre (réel ou complexe), mais une fonction, c'est à dire un être mathématique beaucoup plus compliqué.

L'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est d'un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun à plusieurs disciplines ou sousdisciplines suggère bien souvent d'intéressantes analogies entre des domaines a priori sans relations. Voici quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.

Mécanique : La relation fondamentale de la mécanique, écrite à 1 dimension d'espace pour une particule ponctuelle, fournit une source intarissable d'équations différentielles. Dans un système d'unités adaptées, elle s'écrit

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}),$$

où x désigne la position de la particule, \dot{x} sa dérivée par rapport au temps (la vitesse), et où f représente les forces appliquées sur la particule. Cette

équation, du second ordre en x , est généralement complétée par des conditions initiales qui spécifient la position et la vitesse à un instant origine

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0.$$

Il est utile de remarquer que cette équation du second ordre est équivalente à un système différentiel de deux équations du premier ordre. En effet, introduisons la vitesse $v \equiv \dot{x}$, l'équation précédente s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= f(t, x, v). \end{aligned}$$

Le plan (x, v) est appelé, aussi bien en physique qu'en mathématique, plan ou plus généralement espace des phases. Dans le cas particulier où f ne dépend pas de x : $f = f(t, v)$, par exemple, dans le cas des mouvement dominés par les frottements, l'équation d'évolution de la vitesse

$$\dot{v} = f(t, v)$$

peut être résolue indépendamment de x . On obtient ensuite x par intégration de l'équation $\dot{x} = v$. Si, f ne dépend que de x : $f = f(x)$, l'équation obtenue en divisant les deux équations différentielles s'écrit

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{v}, \quad v(0) = v_0.$$

On obtient donc une équation différentielle du premier ordre, l'inconnue étant la fonction $v(x)$. Cette équation qui est séparable dans les variables v et x conduit directement à l'existence d'un invariant (l'énergie)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} v^2(x) + \Phi(x) \right) = 0,$$

où

$$\Phi(x) \equiv - \int_0^x f(\dot{x}) d\dot{x}.$$

Dynamique des Populations : De nombreuses modélisations de dynamique des populations (espèces animales, diffusion des virus, substances radioactives ou chimiques) ont été proposées. Parmi les plus simples, on peut citer celle attribuée à Malthus (1798) qui traduit la conservation du nombre d'individus N d'une espèce sous l'effet des naissances b et des décès d :

$$\dot{N} = bN - dN,$$

$$N(0) = N_0.$$

Lorsque $b = 0$, on reconnaît dans cette équation la loi de décroissance exponentielle des substances radioactives si d est interprétée comme une constante de désintégration. Dans le cas où $b > d$, rien ne vient limiter la croissance de la population, ce qui n'est pas très réaliste. Verhulst (1836) a proposé un modèle phénoménologique non linéaire (modèle logistique) qui s'écrit

$$\dot{N} = \rho N \left(1 - \frac{N}{N_1}\right),$$

$$N(0) = N_0,$$

où ρ et N_1 sont des constantes positives. Ce modèle a un comportement très différent du modèle linéaire de Malthus. Il n'existe plus de solutions qui conduisent à l'extinction de l'espèce (la solution $N = 0$ est instable), le terme non linéaire conduisant à une stabilisation de la population vers la valeur limite $N = N_1$.

Equations aux Dérivées Partielles : Mis à part les problèmes stationnaires à 1 dimension d'espace, la plupart des équations d'évolution ne sont pas des équations différentielles mais des équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire des équations différentielles pour des fonctions de plusieurs variables. Il apparaît cependant que ces équations se ramènent à des équations différentielles lorsqu'on se limite à chercher des solutions sous une forme séparable.

Donnons deux exemples simples empruntés à l'électromagnétisme et à la mécanique quantique.

Les solutions de l'équation d'Helmholtz

$$\Delta \Psi(x, y, z) + k^2 \Psi(x, y, z) = 0$$

cherchées sous la forme (séparable) :

$$\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

conduisent au système d'équations différentielles :

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + l^2 X(x) = 0,$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + m^2 Y(y) = 0,$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + n^2 Z(z) = 0,$$

où l, m, n sont des constantes telles que $l^2 + m^2 + n^2 = k^2$.

Les solutions de l'équation de Schrödinger à 1 dimension d'espace dépendant du temps

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Phi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t},$$

sont sous la forme (séparable) $\Phi(x, t) = \Psi(x)f(t)$. On obtient alors deux équations différentielles :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t) = E\Psi(t),$$

$$i\hbar \dot{f}(t) = Ef(t)$$

où E est une constante. La solution prend donc la forme connue

$$\Phi(x, t) = \Psi(x)e^{\frac{-iEt}{\hbar}}.$$

Dans ce cours, destiné aux étudiants en deuxième année L.M.D spécialité Mathématiques, on commence par donner des définitions de base concernant les équations différentielles, le problème de Cauchy, les solutions maximales et globales, etc....

Le deuxième chapitre concerne l'étude d'existence et d'unicité du problème de Cauchy, l'étude est basé sur le théorème du point fixe de Picard.

Dans la troisième partie on se propose d'étudier un certain nombre de types classiques d'équations différentielles du premier ordre pour lesquelles on sait ramener le calcul des solutions à des calculs de primitives. Ceci fournira l'occasion d'illustrer le résultat d'existence du chapitre deux.

Chapitre 1

Généralités

Le but de ce chapitre est de mettre en place les définitions et les notations que nous allons utiliser.

1.1 Définitions

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue.

Définition 1.1 *On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre l'équation*

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad (t, y) \in U, \quad (1.1)$$

où y est un vecteur de \mathbb{R}^n de variable t

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction continue de $I \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} . On appelle équation différentielle d'ordre n l'équation*

$$y^{(n)} = f(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.2)$$

Remarque 1.1 On peut passer facilement de l'équation (1.2) à un système de type (1.1) en posant

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ y^{(2)} \\ \cdot \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n)} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système différentiel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{y}_{n-1}(t) = y_n(t) \\ \dot{y}_n(t) = f(t, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{array} \right. \quad (1.3)$$

On remarquera que (1.2) et (1.3) sont équivalents dans ce cas.

Définition 1.3 Une solution de (1.1) sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

- i) $(\forall t \in I) \quad (t, y(t)) \in U,$
- ii) $(\forall t \in I) \quad \dot{y}(t) = f(t, y(t)).$

Remarque 1.2 l'inconnue de l'équation (1.1) est donc une fonction. Le qualificatif ordinaire pour l'équation (1.1) signifie que la fonction inconnue y dépend d'une seule variable t , lorsqu'il y a plusieurs variables t_i et plusieurs dérivées $\frac{\partial y}{\partial t_i}$, on parle d'équations aux dérivées partielles.

Définition 1.4 Soit $\Omega \subset I \times \mathbb{R}^n$.

• L'application f est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur Ω s'il existe une constante k , appelée la constante de Lipschitz de f , telle que :

$$\forall x \in I, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(x, y) - f(x, z)\| \leq k\|y - z\|.$$

• L'application f est dite localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si tout point de $I \times \mathbb{R}^n$ admet un voisinage Ω sur lequel f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

• L'application f est dite globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si elle est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times \mathbb{R}^n$.

• L'application f est contractante si f est lipschitzienne de rapport $k < 1$.

1.2 Problème de Cauchy.

Etant donné un point $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (1.1) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur, telle que $y(t_0) = y_0$.

◇ On dit que (t_0, y_0) sont les données initiales du problème de Cauchy.

◇ Résoudre le problème de Cauchy revient à trouver une courbe intégrale de (1.1) passant par un point donné $(t_0, y_0) \in U$.

1.3 Champ des tangentes

A tout point $M = (t_0, y_0)$, on associe la droite (D_M) passant par M et de coefficient directeur $f(t_0, y_0)$:

$$(D_M) : y - y_0 = f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

◇ L'application $M \rightarrow (D_M)$ est appelée champ des tangentes associé à l'équation (1.1).

◇ Une courbe intégrale de (1.1) est une courbe différentiable C qui a pour tangente en chaque point $M \in C$ la droite (D_M) du champ des tangentes.

1.4 Solutions maximales

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression solution maximale est alors entendue implicitement aux sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

Définition 1.5 Soient $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ des solutions de (1.1). On dit que \tilde{y} est un prolongement de y si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}|_I = y$

Définition 1.6 On dit qu'une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $I \subset \tilde{I}$ ($I \neq \tilde{I}$).

Théorème 1.1 Toute solution y se prolonge en une solution maximale \tilde{y} (pas nécessairement unique).

Démonstration :

Supposons $I = [a, b]$ et y définie sur I . Il suffira de montrer que y se prolonge en une solution $\tilde{y} : [a, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\tilde{b} \geq b$) maximale à droite, c'est à dire qu'on ne pourra plus prolonger \tilde{y} au delà de \tilde{b} . Le même raisonnement s'appliquera à gauche.

Pour cela on construit par récurrence des prolongements successifs $y_1, y_2 \dots y_k$ de y avec $y_k : [a, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$. On pose $y_1 = y, b_1 = b$. Supposons y_{k-1} déjà construite pour $k \geq 1$. On pose

$$c_k = \sup\{c : y_{k-1} \text{ se prolonge sur } [a, c]\}.$$

On a $c_k \geq b_{k-1}$. Par définition de la borne supérieure, il existe b_k tel que $b_{k-1} \leq b_k \leq c_k$ est un prolongement $y_k : [a, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de y_{k-1} avec b_k arbitrairement voisin de c_k , en particulier on peut choisir

$$c_k - b_k < \frac{1}{k} \quad \text{si } c_k < +\infty;$$

$$b_k > k \quad \text{si } c_k = +\infty.$$

La suite (c_k) est décroissante, car l'ensemble des prolongement de y_{k-1} contient l'ensemble des prolongements de y_k , au niveau des bornes supérieures on a donc $c_{k+1} \leq c_k$. Si $c_k < +\infty$ à partir d'un certain rang, les suites

$$b_1 \leq b_2 \dots \leq b_k \leq \dots \leq c_k \leq c_{k-1} \leq \dots \leq c_1$$

sont adjacentes, tandis que si $c_k = +\infty$ quel que soit k on a $b_k > k$. Dans les deux cas, on voit que

$$\tilde{b} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k.$$

Soit $\tilde{y} : [a, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ le prolongement commun des solutions y_k , éventuellement prolongé au point \tilde{b} si cela est possible. Soit $z : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un prolongement de \tilde{y} . Alors z prolonge y_{k-1} et par définition de c_k il s'ensuit $c \leq c_k$. A la limite il vient $c \leq \tilde{c}$, ce qui montre que la solution \tilde{y} est maximale à droite.

1.5 Solutions globales

On suppose ici un ouvert U de la forme $U = J \times \Omega$ où J est un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.7 *Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.*

Remarque 1.3 *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*

Exemple : Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad \dot{y} = y^2 \quad \text{sur } U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Cherchons les solutions $t \rightarrow y(t)$ de (E).

- ◇ On a d'une part la solution $y(t) = 0$.
- ◇ Si y ne s'annule pas, (E) s'écrit

$$\frac{\dot{y}}{y^2} = 1,$$

d'où par intégration

$$y(t) = -\frac{1}{t + C}.$$

Cette formule définit en fait deux solutions, respectivement sur $] -\infty, -C[$ et sur $] -C, +\infty[$, ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $y(t) = 0$ est la seule solution globale de (E).

1.6 Régularité des solutions

Définition 1.8 Une fonction de plusieurs variables est dite de classe \mathcal{C}^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k .

Théorème 1.2 Si la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe \mathcal{C}^k , toute solution de l'équation $\dot{y} = f(t, y)$ est de classe \mathcal{C}^{k+1} .

Démonstration

On raisonne par récurrence sur k .

i) Si $k = 0$ alors f est continue.

Par hypothèse $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable, donc continue.

Par conséquent $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ est continue, donc y est de classe \mathcal{C}^1 .

ii) Si le résultat est vrai à l'ordre $k - 1$, alors y est au moins de classe \mathcal{C}^k . Comme f est de classe \mathcal{C}^k , il s'ensuit que \dot{y} est de classe \mathcal{C}^k comme composée de fonctions de classe \mathcal{C}^k . Donc y est de classe \mathcal{C}^{k+1} .

Chapitre 2

Théorème d'existence de solutions

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité du problème de Cauchy, l'étude est basé sur le théorème du point fixe de Picard suivant.

2.1 Théorème du point fixe

Définition 2.1 Soit (E, d) un espace métrique complet et $\phi : E \rightarrow E$ une application continue. On dit que $a \in E$ est un point fixe de ϕ si $\phi(a) = a$.

Définition 2.2 On dit que ϕ est contractante si ϕ est lipschitzienne de rapport $k < 1$, c'est à dire s'il existe $k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad d(\phi(x), \phi(y)) \leq kd(x, y).$$

Théorème 2.1 Soit $\phi : E \rightarrow E$ une application contractante d'un espace métrique complet dans lui même. Alors ϕ admet un point fixe unique $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée (x_p) définie par

$$x_{p+1} = \phi(x_p)$$

converge vers a .

Démonstration :

Unicité du point fixe.

Soient a, b deux points fixe de ϕ tels que $a \neq b$, alors

$$d(\phi(a), \phi(b)) = d(a, b) \quad \text{et} \quad d(a, b) \neq 0,$$

d'où ϕ n'est pas contractante, donc contradiction.

Existence du point fixe.

Soit $x_0 \in E$ un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. On a alors

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) &= d(\phi(x_{p-1}), \phi(x_p)) \\ &\leq kd(x_{p-1}, x_p) \end{aligned}$$

d'où par récurrence

$$d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1).$$

Pour tout entier $q > p$ nous avons

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq \sum_{l=p}^{q-1} d(x_l, x_{l+1}) \\ &\leq d(x_0, x_1) \sum_{l=p}^{q-1} k^l \end{aligned}$$

avec

$$\sum_{l=p}^{q-1} k^l \leq \sum_{l=p}^{+\infty} k^l = \frac{k^p}{1-k}.$$

On a donc

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1), \quad \forall p > q$$

ce qui montre que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est un espace complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$. L'égalité

$$x_{p+1} = \phi(x_p)$$

et la continuité de ϕ impliquent que $a = \phi(a)$.

2.2 Equivalence du problème de Cauchy avec la résolution d'une équation intégrale

On considère une équation différentielle

$$\dot{y} = f(t, y) \tag{E}$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Le lemme suivant montre que la résolution de (E) est équivalente à la résolution d'une équation intégrale.

Lemme 2.1 Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si

- (i) y est continue et $(t, y(t)) \in U, \forall t \in I$;
- (ii) $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))du, \forall t \in I$.

Démonstration :

Si y vérifie (i) et (ii) alors y est différentiable et on a

$$y(t_0) = y_0 \text{ et } \dot{y}(t) = f(t, y(t)).$$

Inversement, D'après la définition 1.3 y est une solution de l'équation (E) si y est dérivable et

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

donc (ii) s'en déduit par intégration.

2.3 Cylindres de sécurité

Pour résoudre l'équation différentielle (E), on va chercher à construire des solutions de l'équation intégrale (ii), et en premier lieu, on va montrer qu'une solution passant par un point $(t_0, y_0) \in U$ ne peut s'éloigner de y_0 .

Comme U est supposé ouvert, il existe un cylindre

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$$

de longueur $2T_0$ et de rayon r_0 assez petit, tel que $C_0 \subset U$. L'ensemble C_0 est fermé borné dans \mathbb{R}^{n+1} , donc compact. Donc f est bornée sur C_0 , c'est-à-dire

$$M = \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\| < +\infty.$$

Soit

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$$

un cylindre de même diamètre que C_0 et de demi-longueur $T \leq T_0$.

Définition 2.3 On dit que C est un cylindre de sécurité pour l'équation (E) si toute solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.

Corollaire 2.1 *Pour que C soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre*

$$T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right).$$

Remarque 2.1 *Si $C \subset C_0$ est un cylindre de sécurité, toute solution du problème de Cauchy*

$$y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

vérifie

$$\|\dot{y}(t)\| \leq M,$$

donc y est lipschitzienne de rapport M .

2.4 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section, on va étudier l'unicité de la solution locale. La condition que f soit continue ne suffit pas pour garantir l'unicité. On verra dans le théorème de Cauchy-Lipschitz que si f soit localement lipschitzienne (par rapport à la deuxième variable) alors l'unicité de la solution est assurée.

Supposons alors que f est une fonction localement lipschitzienne en y , cela signifie que pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il existe un cylindre

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$$

et une constante $k = k(t_0, y_0) \geq 0$ tels que f soit k -lipschitzienne en y sur C_0

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C_0, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

Remarque 2.2 *Pour que f soit localement lipschitzienne en y sur U , il suffit que f admette des dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $1 \leq i, j \leq n$ continues sur U .*

Théorème 2.2 *(Cauchy-Lipschitz)*

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne en y , alors pour tout cylindre de sécurité

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0),$$

le problème de Cauchy avec condition initiale (t_0, y_0) admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow U$.

Démonstration :

Soit

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$$

avec

$$T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$$

un cylindre de sécurité pour (E) . Notons par

$$\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$$

l'ensemble des applications continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(y_0, r_0)$, muni de la distance d de la convergence uniforme. C'est un espace complet. A toute fonction $y \in \mathcal{F}$, associons la fonction $\Theta(y)$ définie par

$$\Theta(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

D'après le Théorème 2.1, y est une solution du problème (E) si et seulement si y est un point fixe de Θ . Donc on va essayer d'appliquer le théorème du point fixe.

- Nous avons

$$\begin{aligned} \|\Theta(y)(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \right\| \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq MT \leq r_0, \end{aligned}$$

donc $\Theta(y) \in \mathcal{F}$, donc l'opérateur Θ envoie \mathcal{F} dans \mathcal{F} .

- Soient maintenant $y, z \in \mathcal{F}$ et

$$y_{(p)} = \Theta^p(y),$$

$$z_{(p)} = \Theta^p(z).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|y_{(1)}(t) - z_{(1)}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(u, y(u)) - f(u, z(u))) du \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k \|y(u) - z(u)\| du \right| \\ &\leq k|t - t_0|d(y, z). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \|y_{(2)}(t) - z_{(2)}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t k \|y_1(u) - z_1(u)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k \cdot k |t - t_0| d(y, z) du \right| \\ &= k^2 \frac{|t - t_0|^2}{2} d(y, z). \end{aligned}$$

Par récurrence sur p , on aura

$$\|y_{(p)}(t) - z_{(p)}(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} d(y, z);$$

en particulier

$$\begin{aligned} d(\Theta^p(y), \Theta^p(z)) &= d(y_{(p)}, z_{(p)}) \\ &\leq \frac{k^p T^p}{p!} d(y, z) \end{aligned}$$

d'où Θ^p est lipschitzienne de rapport $\frac{k^p T^p}{p!}$ sur \mathcal{F} . D'autre part

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{k^p T^p}{p!} = 0,$$

alors, il existe un p assez grand tel que $\frac{k^p T^p}{p!} < 1$, pour une telle valeur de p , Θ^p est une application contractante de \mathcal{F} dans \mathcal{F} .

• Et comme \mathcal{F} est un espace métrique complet. Le théorème du point fixe montre que Θ admet un point fixe unique y .

2.5 Unicité globale

Le théorème d'unicité locale entraîne facilement un résultat d'unicité globale.

Théorème 2.3 Soient $y_{(1)}, y_{(2)} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions de (E) , avec f localement lipschitzienne en y . Si $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ coïncident en un point de I , alors $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur I .

Démonstration :

Supposons $y_{(1)}(t_0) = y_{(2)}(t_0)$ en un point $t_0 \in I$. Montrons par exemple que $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$ pour $t \geq t_0$. S'il n'en est pas ainsi, considérons le premier instant \tilde{t}_0 où $y_{(1)} \neq y_{(2)}$,

$$\tilde{t}_0 = \inf\{t \in I : t \geq t_0 \text{ et } y_{(1)}(t) \neq y_{(2)}(t)\}$$

On a par définition $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$ pour $t \in [t_0, \tilde{t}_0[$ et par continuité il s'ensuit que $y_{(1)}(\tilde{t}_0) = y_{(2)}(\tilde{t}_0)$. Soit \tilde{y}_0 ce point et soit

$$\tilde{C} = [\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}] \times \overline{B}(\tilde{y}_0, \tilde{r}_0)$$

un cylindre de sécurité de centre $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$. Le théorème d'unicité locale implique que $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur $[\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}]$, ce qui contredit la définition de \tilde{t}_0 . D'où l'unicité.

Corollaire 2.2 *Si f est localement lipschitzienne en y sur U , pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il passe une solution maximale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ et une seule.*

Exemple 1.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ f(t, y) = \frac{\cos t}{1+e^y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

On calcul la dérivée partielle de f par rapport y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{-e^y \cos t}{(1+e^y)^2}?$$

et comme $|\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, alors

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| = \left| \frac{-e^y \cos t}{(1+e^y)^2} \right| < \frac{e^y}{1+e^y}$$

Et on a $\frac{e^y}{1+e^y} < 1$ donc, on conclut que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| < 1 < +\infty.$$

Comme f vérifie les conditions de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale sur l'intervalle $[-T, +T]$ avec $(-T, +T) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$.

Le fait que l'intervalle maximale I soit ouvert découle du fait que toute solution sur un intervalle non ouvert se prolonge. Si y est une solution de (E) avec condition initiale (t_0, y_0) sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, alors elle est prolongeable sur un intervalle $I \supset [a, b[$ en lui raccordant une solution de (E) avec condition initiale $(a, y(a))$. Ici, il n'y a pas unicité de la solution maximale :

Exemple 2.

Soit l'équation

$$y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}.$$

Le problème de Cauchy de condition initiale $y(0) = 0$ admet alors au moins deux solutions maximales :

$$y_{(1)}(t) = 0 \text{ et } y_{(2)}(t) = t^3 \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Condition suffisante d'existence de solutions globales.

Ce qui suit est une condition d'existence utile pour les solutions globales, reposant sur une hypothèse de Lipschitz (semi-globale) de $f(t, y)$ relativement à y . On peut montrer que cette condition suffisante n'est pas nécessaire.

Théorème 2.4 *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue sur un ouvert produit $U = J \times \mathbb{R}^n$, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe une fonction continue $k : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $t \in J$ fixé, l'application $y \mapsto f(t, y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur \mathbb{R}^n . Alors l'unique solution maximale de l'équation $\dot{y} = f(t, y)$ est globale (i.e. définie sur J tout entier).*

Exercice 1. Montrer que toute solution maximale de l'équation différentielle

$$\dot{y} = t\sqrt{t^2 + y^2}, (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

est globale.

Exercice 2. On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(y) = \begin{cases} e, & \text{si } y \leq e \\ y \ln y & \text{si } y \geq e \end{cases}$$

- 1) Montrer que f n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0.
- 2) Déterminer explicitement les solutions maximales de l'équation $y_0 = f(t, y)$.
- 3) La condition suffisante du théorème précédent est-elle nécessaire ?

2.6 Equations différentielles d'ordre supérieur à un

Définition 2.4 *Un système différentiel d'ordre p dans \mathbb{R}^n est une équation de la forme*

$$y^p = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{p-1}) \quad (E)$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^p$. Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une application $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ p -fois dérivable, telle que

- i)* pour tout $t \in I$, $(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{p-1}(t)) \in U$;
- ii)* pour tout $t \in I$, $y^p(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{p-1}(t))$.

Le résultat suivant de régularité des solutions se démontre par récurrence d'une manière analogue à celle utilisée pour les équations différentielles d'ordre un.

Théorème 2.5 *Si f est de classe \mathcal{C}^k , les solutions y sont de classe \mathcal{C}^{k+p} .*

2.6.1. Système différentiel d'ordre un associé

Il est clair que le système (E) est équivalent au système différentiel d'ordre un

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_0 = y_1 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{p-2}(t) = y_{p-1} \\ \dot{y}_{p-1}(t) = f(t, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) \end{array} \right. \quad (E_1)$$

si l'on pose

$$y_0 = y, y_1 = \dot{y}, \dots$$

Le système (E_1) peut encore s'écrire

$$\dot{y} = F(t, y)$$

avec

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) \in (\mathbb{R}^n)^p$$

$$\begin{aligned}
F &= (F_0, F_1, \dots, F_{p-1}) : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^p \\
F_0(t, y) &= y_1, \dots, F_{p-2}(t, y) = y_{p-1} \\
F_{p-1}(t, y) &= f(t, y)
\end{aligned}$$

Tout système différentiel (E) d'ordre p dans \mathbb{R}^n est donc équivalent à un système différentiel (E_1) d'ordre 1 dans $(\mathbb{R}^n)^p$. Il en résulte que les théorèmes d'existence et d'unicité démontrés pour les systèmes d'ordre 1 sont encore vrais pour les systèmes d'ordre p , avec des preuves qui sont des transpositions directes du cas d'ordre 1.

2.6.2. Théorème d'existence

Pour tout point $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) \in U$ le problème de Cauchy de conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = y_1, \dots, y^{(p-1)}(t_0) = y_{p-1}$$

admet au moins une solution maximale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie sur un intervalle ouvert.

Remarque 2.3 *On voit ainsi que pour un système d'ordre p , la condition initiale requiert non seulement la donnée de la valeur y_0 de y au temps t_0 , mais également la donnée de ses $(p-1)$ premières dérivées.*

2.6.3. Théorème d'existence et d'unicité

Si de plus f est localement lipschitzienne en $(y_0, y_1, \dots, y_{p-1})$ sur U , c'est-à-dire si pour tout $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) \in U$ il existe un voisinage

$$[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \times \dots \times \overline{B}(y_{p-1}, r_{p-1})$$

contenu dans U sur lequel

$$\|f(t, z_0, \dots, z_{p-1}) - f(t, w_0, \dots, w_{p-1})\| \leq k(t)(\|z_0 - w_0\| + \dots + \|z_{p-1} - w_{p-1}\|),$$

alors le problème de Cauchy admet une solution maximale et une seule.

2.6.4. Solutions globales

Si $U = J \times (\mathbb{R}^n)^p$ et s'il existe une fonction $k : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que pour tout $t \in J$

$$\|f(t, z_0, \dots, z_{p-1}) - f(t, w_0, \dots, w_{p-1})\| \leq k(t)(\|z_0 - w_0\| + \dots + \|z_{p-1} - w_{p-1}\|),$$

alors les solutions maximales sont définies sur J tout entier.

Chapitre 3

Méthodes de résolution des équations différentielles

On se propose d'étudier un certain nombre de types classiques d'équations différentielles du premier ordre pour lesquelles on sait ramener le calcul des solutions à des calculs de primitives. Ceci fournira l'occasion d'illustrer les résultats généraux du chapitre 2 par des exemples.

3.1 Equations du premier ordre

♣ Remarque générales

On considère une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (E)$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, localement lipschitzienne en y .

Les différentes solutions de l'équation (E) s'écrivent en général sous la forme

$$y = \varphi(x, \lambda)$$

où λ est un paramètre réel, on dit parfois que la solution générale dépend d'un seul paramètre. Pour comprendre ce phénomène, il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, si on cherche les solutions définies au voisinage d'un point x_0 , on sait qu'il existe une solution y et une seule telle que $y(x_0) =$

y_0 , on peut donc choisir $y_0 = \varphi(x_0, \lambda)$ pour paramétrer les solutions. Dans la pratique, le paramètre λ apparaît souvent comme constante d'intégration.

Il arrive parfois qu'en plus de la solution générale on ait des solutions particulières

$$y = \psi_0(x), y = \psi_1(x), \dots$$

qui ne s'obtiennent pour aucune valeur de λ : on dit que ce sont des solutions singulières (ou courbes intégrales singulières) de (E) .

On va maintenant d'écrire une situation un peu plus générale qui se ramène au cas d'une équation du type considéré ci-dessus.

♣ Systèmes différentiels autonomes dans un ouvert

On suppose donné un champ de vecteurs dans $U \subset \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une application continue

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{V}(M) \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}, M \in U.$$

On appelle système autonome associé au champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ le système différentiel

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y) \end{cases} \quad (S)$$

Si $\vec{V}(M)$ représente un champ de vecteurs vitesse (associé par exemple à l'écoulement d'une nappe de fluide sur une surface plane), résoudre (S) revient à chercher la trajectoire et la loi du mouvement des particules de fluide en fonction du temps. Le mot "autonome" signifie que le champ de vecteurs ne dépend pas du temps t (cas d'un écoulement stationnaire). Si $t \mapsto M(t)$ est solution, toute fonction $t \mapsto M(t+T)$ obtenue par un décalage dans le temps est encore solution. Dans l'ouvert

$$U' = \{M(x, y) : a(x, y) \neq 0\}$$

on a

$$(S) \Rightarrow (E)$$

où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} = f(x, y).$$

Résoudre (E) permet de trouver la trajectoire des particules (mais pas la loi du mouvement en fonction du temps).

3.2 Equations à variables séparées

Ce sont les équations dans lesquelles on peut regrouper x, dx d'une part et y, dy d'autre part. Nous allons examiner trois cas.

3.2.1) Equations $\dot{y} = f(x)$ avec f continue.

Les solutions sont données par

$$y(x) = F(x) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où F est une primitive de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par translations dans la direction Oy .

3.2.2) Equations $\dot{y} = g(y)$ avec $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

L'équation peut se récrire

$$\frac{dy}{dx} = g(y), \quad \text{ou encore} \quad \frac{dy}{g(y)} = dx$$

à condition que $g(y) \neq 0$.

◇ Notons y_j les racines de $g(y) = 0$ dans l'intervalle J . Alors $y(x) = y_j$ est une solution (singulière) évidente de l'équation.

◇ Dans l'ouvert

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times J : g(y) \neq 0\},$$

on a

$$(E) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = dx.$$

Les solutions sont données par

$$G(y) = x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où G est une primitive quelconque de $\frac{1}{g}$ sur chacun des intervalles ouverts $[y_j, y_{j+1}[$ délimités par les racines de g . Dans chaque bande $\mathbb{R} \times [y_j, y_{j+1}[$, les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par translation dans la direction Ox ; ceci est à relier au fait que les lignes isoclines sont les droites

$$y = m = \text{constante}.$$

Comme $\dot{G} = \frac{1}{g}$ et que g est de signe constant sur $[y_j, y_{j+1}[$, on en déduit que G est une application strictement monotone bijective

$$G : [y_j, y_{j+1}[\rightarrow]a_j, b_j[$$

avec $a_j \in [-\infty, +\infty[$, $b_j \in [-\infty, +\infty[$. On peut donc (au moins théoriquement) exprimer y en fonction de x :

$$y = G^{-1}(x + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Supposons par exemple $g > 0$, et par suite G croissante sur $]y_j, y_{j+1}[$.

◇ Si $\int_{y_j}^{y_j+\epsilon} \frac{dy}{g(y)}$ diverge, on a $a_j \in \mathbb{R}$, par conséquent

$$x = G(y) - \lambda \rightarrow -\infty \text{ quand } y \rightarrow^> y_j.$$

Dans ce cas, la courbe est asymptote à la droite $y = y_j$.

Exemple.

Résoudre l'équation

$$\dot{y} = \cos x$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$. On obtient en intégrant

$$\int dy = \int \cos x dx + C,$$

donc

$$y = \sin x + C.$$

La condition initiale impose $c = 1$. On a donc

$$y = \sin x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

◇ Si $\int_{y_j}^{y_j+\epsilon} \frac{dy}{g(y)}$ converge, on a $a_j = -\infty$, et $x \rightarrow a_j - \lambda$ quand $y \rightarrow^> y_j$, la courbe vient rejoindre la droite $y = y_j$ au point $(a_j - \lambda, y_j)$ et admet la droite $y = y_j$ pour tangente en ce point. Cette situation montre qu'il n'y a pas unicité du problème de Cauchy en cas de convergence de l'intégrale.

Exemple.

Résoudre l'équation

$$\dot{y} = y^2$$

avec la condition initiale $y(1) = 1$. Pour $y \neq 0$, on écrit

$$\frac{\dot{y}}{y^2} = 1,$$

ce qui donne en intégrant

$$-\frac{1}{y} = x + c.$$

La condition initiale impose $c = -2$, d'où la solution est

$$y = \frac{1}{2-x}, \quad x \in]-\infty, 2[.$$

3.2.3) Cas général des équations à variables séparées

$$\dot{y} = f(x)g(y) \text{ avec } f, g \text{ continues.} \quad (E)$$

◇ Si $g(y_j) = 0$, la fonction constante $y(x) = y_j$ est solution singulière.

◇ Sur l'ouvert

$$U = \{(x, y); g(y) \neq 0\}$$

on a

$$(E) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

d'où

$$G(y) = F(x) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

où F est une primitive de f et G une primitive de $\frac{1}{g}$. Comme G est continue strictement monotone sur chaque intervalle $[y_j, y_{j+1}[$, l'application G admet une application réciproque G^{-1} et on obtient

$$y = G^{-1}(F(x) + \lambda).$$

Exemple. Soit l'équation

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}.$$

Le domaine de définition est la réunion

$$\{|x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\} \cup \{|x| > 1 \text{ et } |y| \geq 1\}.$$

On va donc travailler dans l'ouvert

$$U = \{|x| < 1 \text{ et } |y| < 1\} \cup \{|x| > 1 \text{ et } |y| > 1\}.$$

◇ Dans le carré

$$\{|x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$$

l'équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

d'où

$$\arcsin y = \arcsin x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comme \arcsin est une bijection de $] -1, 1[$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a nécessairement $\lambda \in] -\pi, \pi[$. On doit avoir de plus

$$\begin{aligned} \arcsin x &\in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cap \left] -\frac{\pi}{2} - \lambda, \frac{\pi}{2} - \lambda \right[\\ &= \begin{cases} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \lambda \right[& \text{si } \lambda \geq 0, \\ \left] -\frac{\pi}{2} - \lambda, \frac{\pi}{2} \right[& \text{si } \lambda \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

De même $\arcsin y$ est dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \lambda[$ si $\lambda \leq 0$. Les courbes intégrales admettent pour équation

$$\begin{aligned} y &= \sin(\arcsin x + \lambda) \\ &= \sin(\arcsin x) \cos \lambda + \cos(\arcsin x) \sin \lambda \\ &= x \cos \lambda + \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} \sin \lambda \\ &= x \cos \lambda + \sqrt{1 - x^2} \sin \lambda \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} x &\in] -1, \cos \lambda[, \quad y \in] -\cos \lambda, 1[\text{ si } \lambda \geq 0, \\ x &\in] -\cos \lambda, 1[, \quad y \in] -1, \cos \lambda[\text{ si } \lambda \leq 0, \end{aligned}$$

L'équation ci-dessus implique

$$(y - x \cos \lambda)^2 + x^2 \sin^2 \lambda = \sin^2 \lambda,$$

donc les courbes intégrales sont des arcs d'ellipse.

◇ L'ouvert $\{|x| > 1 \text{ et } |y| > 1\}$ est formé de 4 composantes connexes. Plaçons-nous par exemple dans $\{x > 1 \text{ et } y > 1\}$. On a

$$(E) \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

d'où

$$\arg \cosh y = \arg \cosh x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\arg \cosh$ est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$; en raisonnant comme ci-dessus, on obtient

$$y = x \cosh \lambda + \sqrt{x^2 - 1} \sinh \lambda$$

avec

$$x \in]1, +\infty[, \quad y \in]-\cosh \lambda, +\infty[\text{ si } \lambda \geq 0,$$

$$x \in]\cosh \lambda, +\infty[, \quad y \in]1, +\infty[\text{ si } \lambda \leq 0,$$

par suite

$$(y - x \cosh \lambda)^2 - x^2 \sinh^2 \lambda + \sinh^2 \lambda = 0,$$

ce qui est l'équation d'une conique. Comme

$$\sqrt{x^2 - 1} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = |x| - \frac{1}{2|x|} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

on voit que la conique admet des asymptotes

$$y = (\cosh \lambda \pm \sinh \lambda)x = e^{\pm \lambda} x$$

(pour la branche $x > 1$ qui nous intéresse, c'est $y = e^{\lambda} x$). On a donc affaire à des arcs d'hyperbole.

3.3 Equations linéaires du premier ordre

3.3.1 Présentation du problème

Nous nous intéressons à la résolution des équations de la forme

$$\dot{y} + a(x)y = b(x).$$

Dans cette équation, a et b sont des fonctions de x , définies et continues sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

Exemple.

$$\dot{y} + y \sin x = 2 \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On cherche une fonction y de x , définie et continûment dérivable sur I , qui vérifie l'égalité ci-dessus (où \dot{y} est bien sûr la dérivée de y). C'est une équation

différentielle (c'est à dire une équation faisant intervenir une fonction inconnue y et ses dérivées). Dire qu'elle est du premier ordre veut dire que cette équation ne fait intervenir que la fonction y et sa dérivée première \dot{y} . La linéarité est une propriété importante. On dispose d'une méthode générale pour les équations linéaires : on remarque que si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation linéaire $u(y) = b$, alors leur différence $y_1 - y_2$ vérifie $u(y_1 - y_2) = 0$. On est ainsi conduit à considérer l'équation sans second membre, ou équation homogène $u(y) = 0$. Supposons que l'on a déterminé l'ensemble S des solutions de l'équation sans second membre, et que l'on connaisse une solution particulière y_1 de l'équation complète. Alors y est solution de l'équation complète si et seulement si on a $y = y_1 + z$ où $z \in S$ est solution de l'équation sans second membre. Ceci s'énonce de la manière suivante.

”La solution générale de l'équation linéaire complète est somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre.”

Ceci va guider notre démarche pour l'équation différentielle linéaire du premier ordre. On commence par chercher la solution générale de l'équation sans second membre, puis on voit comment trouver une solution de l'équation complète.

3.3.2. La solution générale de l'équation sans second membre

Nous cherchons la solution générale de l'équation

$$\dot{y} + a(x)y = 0,$$

où a est une fonction réelle continue sur l'intervalle ouvert I de \mathbb{R} . Si y ne s'annule pas sur I , on peut écrire

$$\frac{\dot{y}}{y} = -a(x),$$

et on reconnaît à gauche la dérivée de $\ln(|y|)$. On en déduit donc, si

$$A = \int a(x)dx$$

est une primitive de a sur I , que

$$\ln(|y|) = -A(x) + C$$

où C est une constante réelle, d'où

$$y = Ke^{-A(x)} = Ke^{-\int a(x) dx},$$

où K est une constante réelle. Ce calcul est délicat à justifier complètement (en particulier l'hypothèse $y \neq 0$), mais il nous donne tout de même la solution.

Théorème 3.1 *La solution générale de l'équation sans second membre*

$$\dot{y} + a(x)y = 0$$

est

$$y = Ke^{-A(x)},$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$, et K une constante réelle.

Démonstration :

Soit y une fonction continûment dérivable sur I . Puisque $e^{-A(x)}$ ne s'annule jamais sur I , on peut bien poser

$$y(x) = u(x)e^{-A(x)}$$

c'est à dire

$$u(x) = e^{A(x)}y(x).$$

Ceci définit une fonction u continûment dérivable sur I . On a

$$\begin{aligned} \dot{y} + a(x)y &= \dot{u}e^{-A(x)} + u(-a(x)e^{-A(x)}) + a(x)ue^{-A(x)} \\ &= \dot{u}e^{-A(x)}, \end{aligned}$$

et donc y est solution de l'équation

$$\dot{y} + a(x)y = 0$$

si et seulement si

$$\dot{u}e^{-A(x)} = 0,$$

c'est à dire si et seulement si u est une constante puisque $e^{-A(x)}$ ne s'annule pas sur I . Ceci montre le théorème.

Ceci nous donne la réponse, dans la mesure où l'on sait calculer une primitive de a .

Exemple.

Considérons l'équation sans second membre

$$\dot{y} + y \sin x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Une primitive de $-\sin x$ est $\cos x$, et donc la solution générale de cette équation est

$$y = Ke^{\cos x},$$

où K est une constante réelle.

Remarquons qu'une solution ou bien est constamment nulle sur l'intervalle I , ou bien ne s'annule jamais sur I . Ceci justifie a posteriori le calcul qui consistait à exclure le cas $y = 0$ et à diviser par y .

3.3.3. Solution de l'équation complète

On cherche la solution générale de l'équation

$$\dot{y} + a(x)y = b(x),$$

connaissant la solution générale de l'équation sans second membre

$$\dot{y} + a(x)y = 0,$$

sous la forme

$$y(x) = Kz(x)$$

où K est une constante réelle et

$$z(x) = e^{-A(x)},$$

avec A une primitive de a . On sait, d'après la discussion ci-dessus, qu'il suffit de connaître une solution particulière de l'équation complète.

◇ On a parfois la chance d'en voir une sans calcul.

Exemple 1.

$y = 2$ est une solution évidente de

$$\dot{y} + y \sin x = 2 \sin x,$$

et donc la solution générale de cette équation est

$$y = 2 + Ke^{\cos x}.$$

Exemple 2.

Résolvons l'équation

$$2\dot{y} + 3xy = x \tag{E}$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$.

On va résoudre en premier lieu l'équation sans second membre,

$$2\dot{y} + 3xy = 0. \quad (E')$$

Nous avons

$$\frac{\dot{y}}{y} = -\frac{3}{2}x,$$

d'où

$$\ln(|y|) = -\frac{3}{4}x^2 + K$$

alors

$$y = e^{-\frac{3}{4}x^2 + K} = e^K e^{-\frac{3}{4}x^2} = C e^{-\frac{3}{4}x^2}$$

K et C étant des réels quelconques.

Résolvons maintenant (E) avec la condition initiale $y(0) = 0$. On remarque que $y = \frac{1}{3}$ est une solution de (E), les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$y = \frac{1}{3} + C e^{-\frac{3}{4}x^2}.$$

La condition initiale nous permet de calculer C

$$y(0) = 0 = \frac{1}{3} + C e^{-\frac{3}{4}0^2}.$$

la solution est donc

$$y = \frac{1}{3}(1 - e^{-\frac{3}{4}x^2})$$

◇ Si ce n'est pas le cas, on dispose de la méthode de variation de la constante. Elle consiste à poser

$$y(x) = u(x)z(x),$$

et à trouver u pour que y soit solution de l'équation complète. On a

$$\dot{y} + a(x)y = \dot{u}z + uz + a(x)uz = \dot{u}z,$$

puisque z est solution de l'équation sans second membre. Donc y est solution de l'équation complète si et seulement si

$$\dot{u} = \frac{b(x)}{z(x)}$$

(on peut diviser puisque z ne s'annule jamais sur I .) Si $B(x)$ est une primitive de

$$\frac{b(x)}{z(x)} = b(x)e^{A(x)},$$

alors $e^{-A(x)}B(x)$ est une solution particulière de l'équation complète.

Théorème 3.2 *Soit a et b deux fonctions réelles continues sur l'intervalle ouvert I . Soient A une primitive de a , et B une primitive de be^A . Alors la solution générale de l'équation différentielle*

$$\dot{y} + a(x)y = b(x),$$

est

$$y(x) = e^{-A(x)}(B(x) + K),$$

où K est une constante réelle.

On a donc ramené le problème de résolution de l'équation différentielle au calcul de deux primitives.

Exemple 1. Résolvons l'équation

$$\dot{y} - \frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

sur l'intervalle $]0, 1[$. Une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$, donc la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = Kx.$$

On fait varier la constante en posant

$$y = u(x)x,$$

ce qui donne en portant dans l'équation complète

$$\dot{u} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

d'où une solution particulière

$$y = x \arcsin(x).$$

La solution générale de l'équation sur $]0, 1[$ est donc

$$y = x(\arcsin(x) + K),$$

où K est une constante réelle.

Exemple 2. Résoudre l'équation

$$x\dot{y} - 2y = x^3 \ln(x) \quad (E)$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre sur \mathbb{R}^{+*}

$$\frac{\dot{y}}{y} = 2x \quad (E')$$

ce qui donne en intégrant

$$\ln(|y|) = 2 \ln(|x|) + k$$

les solutions sont donc les fonctions

$$y(x) = Kx^2,$$

où K est un réel quelconque. Pour résoudre l'équation avec second membre (E) faisons varier la constante, on cherche une solution de la forme $K(x)x^2$ l'équation différentielle devient

$$x(\dot{K}(x)x^2 + 2xK(x)) - 2K(x)x^2 = x^3 \ln(x)$$

donc l'équation se ramène à

$$\dot{K}(x) = \ln(x)$$

on obtient après intgration par parties

$$K(x) = \frac{x^2}{4}(\ln(x^2) - 1)$$

d'où l'on déduit les solutions

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{4}(\ln(x^2) - 1) + C\right)x^2$$

où C est un réel quelconque.

3.4 Equations se ramenant à des équations Linéaires

a) Equations de Bernoulli

Ce sont les équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad (E)$$

avec $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues (pour $\alpha = 1$, (E) est linéaire).
On se place dans le demi-plan supérieur

$$U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[= \{(x, y) : y > 0\}.$$

En multipliant par $y^{-\alpha}$, on obtient

$$(E) \Leftrightarrow y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x),$$

Posons $z = y^{1-\alpha}$, alors

$$\frac{dz}{dx} = (1 - \alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx},$$

d'où

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha} \frac{dz}{dx} = p(x)z + q(x),$$

On est donc ramené à une équation linéaire en z .

Exemple. Résoudre l'équation

$$xy' + y - xy^3 = 0. \quad (E)$$

On a pour

$$x \neq 0 : y' = -\frac{1}{x}y + y^3.$$

Ici, $\alpha = 3$ on pose

$$z(x) = y^{-2}(x) = \frac{1}{y^2}(x),$$

d'où

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{z(x)}}$$

Intéressons nous au cas d'une condition initiale $x = x_0$ telle que $y(x_0) > 0$, i.e. au cas

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = z(x)^{-\frac{1}{2}}.$$

On obtient

$$\dot{y}(x) = -\frac{1}{2}\dot{z}(x)z(x)^{-\frac{3}{2}},$$

d'où

$$(E) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x\dot{z}(x)z(x)^{-\frac{3}{2}} + z(x)^{-\frac{1}{2}} + xz(x)^{-\frac{3}{2}} = 0,$$

alors

$$\dot{z}(x) = 2\frac{z(x)}{x} + 2.$$

Une solution particulière est $z_p(x) = -2x$ est la solution homogène est $z_h(x) = cx^2$, d'où $z(x) = cx^2 - 2x$, et

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{cx^2 - 2x}}$$

lorsque la condition initial est donnée pour $y(x_0) > 0$, solution qui a un sens, soit sur $I_1 =]-\infty, \frac{2}{c}[$, soit sur $I_2 =]\frac{2}{c}, +\infty[$ (suivant que $x_0 \in I_1$ ou $\in I_2$). Lorsque la condition initial est donnée pour $y(x_0) = 0$, alors $y(x) = 0$ pour tout x est solution.

b) Equations de Riccati

Ce sont les équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad (E)$$

avec $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues, c'est à dire que $f(x, y)$ est un polynôme de degré 2 en y . Montrons que l'on sait résoudre (E) dès que l'on connaît une solution particulière y_1 .

La première méthode.

Posons

$$y = y_1 + z.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + \dot{z} &= a(x)(y_1^2 + 2y_1z + z^2) + b(x)(y_1 + z) + c(x) \\ &= a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x) + (2a(x)y_1 + b(x))z + a(x)z^2. \end{aligned}$$

Comme y_1 se simplifie, on en déduit

$$\dot{z} = (2a(x)y_1(x) + b(x)) + a(x)z^2.$$

C'est une équation linéaire de Bernoulli avec $\alpha = 2$. On la ramène à une équation linéaire en posant

$$w = z^{1-\alpha}.$$

Exemple. Soit l'équation

$$(1 - x^3)\dot{y} + x^2y + y^2 - 2x = 0.$$

On remarque que

$$y_1(x) = x^2$$

est une solution particulière. En posant

$$y = x^2 + z$$

on obtient

$$(1 - x^3)\dot{z} + 3x^2z + z^2 = 0$$

après division par z^2 , on aura

$$-(1 - x^3)\dot{w} + 3x^2w + 1 = 0 \text{ avec } w = \frac{1}{z}$$

soit

$$\dot{w} = \frac{3x^2}{1 - x^3}w + \frac{1}{1 - x^3} \text{ si } x \neq 1.$$

L'équation linéaire sans second membre

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{3x^2}{1 - x^3}$$

donne

$$\ln |w| = -\ln |1 - x^3| + C,$$

d'où

$$w = \frac{k}{1 - x^3}.$$

La méthode de variation des constantes conduit à

$$\frac{\dot{k}(x)}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3}$$

donc

$$\dot{k}(x) = 1 \quad \text{et} \quad k(x) = x.$$

La solution générale de l'équation linéaire complète est donc

$$w(x) = \frac{x+k}{1-x^3},$$

d'où

$$\begin{aligned} y &= x^2 + z = x^2 + \frac{1}{w} \\ &= x^2 + \frac{1-x^3}{x+k}, \end{aligned}$$

La deuxième méthode.

On cherche une solution particulière $y_1(t)$ on fait le changement de fonction en posant

$$x(t) = y_1(t) + \frac{1}{z(t)}.$$

On obtient alors une équation différentielle linéaire en z qu'on résout, dont on déduit x .

Exemple. Soit l'équation différentielle

$$xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x \quad (E)$$

- (i) trouver un polynôme simple solution,
- (ii) résoudre l'équation (E).
- (iii) Que se passe-t-il pour les conditions initiales $y(1) = 0$, $y(1) = 1$, $y(1) = 2$?

Réponse. Ici

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x} - \frac{(2x+1)y}{x} + x + 2$$

définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où elle est \mathcal{C}^∞

- (i) On remarque que $y(x) = x$ est solution particulière.

Cette solution ne peut convenir que si la condition initial vérifie $y(x_0) = x_0$.

Il s'agit de trouver les autres solutions (correspondant à d'autres conditions initials).

(ii) On cherche la fonction $z(x)$ telle que

$$y(x) = x + \frac{1}{z(x)},$$

donc

$$\dot{y}(x) = 1 - \frac{\dot{z}(x)}{z^2(x)}.$$

D'où

$$x\left(1 - \frac{\dot{z}(x)}{z^2(x)}\right) - \left(x + \frac{1}{z(x)}\right)^2 + (2x + 1)\left(x + \frac{1}{z(x)}\right) = x^2 + 2x,$$

soit, après multiplication par z^2

$$\dot{z}(x) = \frac{z}{x} - \frac{1}{x}.$$

Cette équation différentielle linéaire a une solution particulière évidente $z_p = 1$ et pour solution homogène $z_h(x) = cx$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$ où $c \in \mathbb{R}$. D'où la solution générale sur \mathbb{R} donnée par

$$z(x) = cx + 1 \text{ pour } c \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = x + \frac{1}{cx + 1}$$

est solution de l'équation de Riccati proposée.

(iii) • Pour la condition initial $y(1) = 0$, on obtient $0 = 1 + \frac{1}{c+1}$ d'où $c = -2$ et la solution est

$$y(x) = x + \frac{1}{1 - 2x}$$

définie sur $]\frac{1}{2}, 1[$ (intervalle qui contient $x = 1$).

• Pour la condition initial $y(1) = 1$, on obtient $1 = 1 + \frac{1}{c+1}$ ce qui est impossible, et la solution est la solution particulière $y(x) = x$.

• Pour la la condition initial $y(1) = 2$, on obtient $2 = 1 + \frac{1}{c+1}$, d'où $c = 0$ et

$y(x) = x + 1$, solution définie sur \mathbb{R} .

Exercice. Montrer que la solution de l'équation différentielle

$$xy' = y^2 + y - 2, x \in \mathbb{R}^*.$$

est donné par

$$y(x) = \frac{c + 2x^3}{c - x^3},$$

où c est une constante réelle.

3.5 Différentielle totale

Si F est une fonction à deux variables, sa différentielle est :

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

Proposition 3.1 Une expression de la forme

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

est la différentielle d'une fonction ssi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

Proposition 3.2 Les solutions de l'équation différentielle

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0 \tag{E}$$

lorsque

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

est la différentielle d'une fonction F sont définies par la relation fonctionnelle

$$F(x, y) = K$$

où K est une constante quelconque. (F est une intégrale première de l'équation (E)).

Démonstration : L'équation (E) peut s'écrire sous la forme suivante

$$f(x, y) + g(x, y)\dot{y} = 0.$$

Soit y une fonction dérivable,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(F(x, y(x))) &= \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y} \dot{y}(x) \\ &= f(x, y) + g(x, y)\dot{y} \end{aligned}$$

donc y est solution de (E) ssi $F(x, y(x))$ est constant.

Exemple 1. Résoudre l'équation

$$(3x^2y^4 + y)dx + (4x^3y^3 + x + 1)dy = 0.$$

On peut commencer par vérifier que l'expression définit bien la différentielle d'une fonction. C'est le cas ssi

$$\frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3 + x + 1) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^4 + y)$$

ce qui se vérifie de façon évidente. Cherchons maintenant à déterminer cette fonction, elle doit vérifier

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 3x^2y^4 + y$$

elle est donc de la forme

$$F(x, y) = x^3y^4 + xy + K(y)$$

où K est une fonction quelconque. En dérivant par rapport à y , on obtient

$$4x^3y^3 + x + \dot{K}(y)$$

or cette quantité doit être égale à

$$4x^3y^3 + x + 1$$

on en déduit donc que $\dot{K}(y) = 1$ d'où

$$F(x, y) = x^3y^4 + xy + y + C$$

où C est un réel.

Les fonctions $y(x)$ qui vérifient

$$x^3y^4 + xy = K$$

sont solutions de l'équation différentielle.

Remarque 3.1 Si

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

n'est pas la différentielle d'une fonction, mais que

$$h(x, y)(f(x, y)dx + g(x, y)dy)$$

l'est alors on dit que la fonction h est un facteur intégrant de l'équation différentielle

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

il peut permettre de la résoudre.

Exemple 2. La fonction $\frac{1}{x^2}$ est un facteur intégrant de l'équation différentielle

$$xdy - (y + 1 - x^2)dx = 0; x \in \mathbb{R}^*$$

on peut vérifier que

$$xdy - (y + 1 - x^2)dx$$

n'est la différentielle d'aucune fonction.

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial y}(-(y + 1 - x^2)).$$

En multipliant l'équation par le facteur intégrant on obtient la nouvelle équation

$$\frac{1}{x}dy - \frac{y + 1 - x^2}{x^2}dx = 0$$

maintenant l'expression est la différentielle d'une fonction F en effet

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y + 1 - x^2}{x^2}\right)$$

En intégrant comme dans l'exemple 1. Les solutions sont alors les fonctions qui vérifient

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x = K.$$

3.6 Equation de de Lagrange

Cherchons à déterminer les équations différentielles dont les courbes isoclines sont des droites. La courbe isocline $\dot{y} = p$ sera une droite

$$y = a(p)x + b(p)$$

(pour simplifier, on écarte le cas des droites parallèles à $\dot{y}Oy$). L'équation différentielle correspondante est donc

$$y = a(\dot{y})x + b(\dot{y}). \quad (E)$$

On supposera que a, b sont au moins de classe \mathcal{C}^1 .

Méthode de Résolution.

On choisit $p = \dot{y}$ comme nouvelle variable paramétrant chaque courbe intégrale, il est possible à condition que \dot{y} ne soit pas une constante sur un morceau de la courbe intégrale considérée. Dans le cas contraire, si

$$\dot{y} = p_0 = \text{constante},$$

la courbe intégrale est contenue dans la droite

$$y = a(p_0)x + b(p_0),$$

ce qui n'est compatible avec la condition $\dot{y} = p_0$ que si

$$a(p_0) = p_0.$$

◇ On a donc des solutions singulières

$$y = p_j x + b(p_j)$$

où les p_j sont les racines de $a(p) = p$.

◇ Solution générale

$$y = a(p)x + b(p),$$

Alors

$$\begin{aligned} dy &= a(p)dx + (\dot{a}(p)x + \dot{b}(p))dp \\ dy &= \dot{y}dx = p dx. \end{aligned}$$

Il vient

$$(p - a(p))dx = (\dot{a}(p)x + \dot{b}(p))dp,$$

et pour $p \neq a(p)$ on aboutit à

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p - a(p)}(\dot{a}(p)x + \dot{b}(p))$$

c'est une équation linéaire en la fonction $x(p)$. La solution générale sera de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}(p) &= x(1)(p) + kz(p), k \in \mathbb{R}, \\ y(p) &= a(p)(x(1)(p) + kz(p)) + b(p). \end{aligned}$$

Exemple. Soit L'équation

$$y = xy^2 + \dot{y}^3.$$

C'est une équation de Lagrange. Posons $\dot{y} = p$ et différencions

$$pdx = p^2dx + 2pxdp + 3p^2dp$$

d'où

$$(p - p^2)dx = (2px + 3p^2)dp.$$

On a alors les intégrales singulières

$$p = 0 \quad dp = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

et

$$p = 1 \quad dp = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x + 1.$$

La solution générale est donnée par

$$(1 - p)\frac{dx}{dp} - 2x = 3p.$$

On résout sans second membre, on trouve

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dp}{1 - p}$$

et donc

$$\ln \left| \frac{x}{c} \right| = -2 \ln |p - 1|$$

ou

$$x = \frac{c}{(p-1)^2}.$$

Cherchons une solution particulière de la forme

$$x = ap + b \Rightarrow \frac{dx}{dp} = a.$$

En remplaçant et identifiant les deux membres

$$\begin{aligned} a(1-p) - 2(ap+b) &= 3p \\ -3ap + a - 2b &= 3p \end{aligned}$$

donc

$$a = -1 \text{ et } b = -\frac{1}{2}$$

on trouve la solution générale

$$x = \frac{c}{(p-1)^2} - p - \frac{1}{2}$$

et donc

$$y = \frac{cp^2}{(p-1)^2} - \frac{p^2}{2}.$$

3.7 Equation de Clairaut

C'est un cas particulier des équations de Lagrange dans lequel $a(p) = p$ pour toute valeur de p , soit

$$y = \dot{y}x + b(\dot{y}).$$

Les droites

$$(D_p) : y = px + b(p)$$

qui étaient précédemment des solutions singulières forment maintenant une famille générale de solutions.

Montrons que les droites (D_p) possèdent toujours une enveloppe (Γ) . Une telle courbe (Γ) admet par définition une paramétrisation $(x(p), y(p))$ telle que (Γ) soit tangente à (D_p) au point $(x(p), y(p))$.

Le vecteur tangent $(\dot{x}(p), \dot{y}(p))$ à (Γ) doit avoir même pente p que (D_p) , d'où

$$\dot{y}(p) = p\dot{x}(p).$$

Par ailleurs $(x(p), y(p)) \in (D_p)$ donc

$$y(p) = px(p) + b(p).$$

En différentiant, il vient

$$\dot{y}(p) = p\dot{x}(p) + x(p) + \dot{b}(p).$$

Ce qui implique

$$x(p) + \dot{b}(p) = 0,$$

d'où la paramétrisation cherchée de l'enveloppe

$$(\Gamma) \begin{cases} \dot{x}(p) = -\dot{b}(p) \\ y(p) = -p\dot{b}(p) + b(p) \end{cases}$$

Si b est de classe \mathcal{C}^2 , on a

$$\dot{y}(p) = -p\ddot{b}(p) = p\dot{x}(p)$$

de sorte que (Γ) est bien l'enveloppe des droites (D_p) . La courbe (Γ) est une solution singulière de (E) .

Exemple. Soit l'équation de Clairaut

$$y = x\dot{y} + \frac{a}{\dot{y}}.$$

On pose $\dot{y} = p$ et en différentiant.

$$pdx = pdx + xdp - \frac{a}{p^2}dp.$$

Donc

$$\left(x - \frac{a}{p^2}\right)dp = 0.$$

On trouve la solution générale.

$$y = cx + \frac{a}{c}$$

et la solution singulière

$$x = \frac{a}{p^2}$$

d'où

$$y = \frac{2a}{p}.$$

Ou encore $y^2 = 4ax$, c'est l'équation de la parabole enveloppe de la famille de droites définie par $y = cx + \frac{a}{c}$.

Bibliographie

- [1] Arnold V., *Equations différentielles ordinaires*. Editions Mir, librairie du globe, 1996.
- [2] Arnold V., *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Editions Mir, librairie du globe, 1976.
- [3] Cartan H., *Cours de calcul différentiel*. Hermann méthodes, 1977.
- [4] Coddington E. A. et Livinson L. *Theory of Ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1995.
- [5] Crouzeix M., Mignot A.L., *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, Paris.
- [6] Demailly J. P., *Analyse numérique et équations différentielles*. Deuxième édition. Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1996.
- [7] Rienhard. H, *Equations différentielles, fondements et applications*. Dunod, Paris, 1982.