Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

I. Introduction :

Les méthodes directes sont beaucoup plus conformes à la résolution des systèmes linéaires de petite et moyenne taille (en nombre d'équations et d'inconnues), leur grand avantage est qu'elles donnent une solution exactes (avec ou pas d'erreur d'arrondi) d'une manière rapide et directe. Cependant si le système est de taille importante ou si la matrice associée contient trop de coefficients ayant beaucoup de chiffres après la virgule ou bien trop de zéro, l'erreur d'arrondi se multiplie considérablement et le temps de calcul se multiplie aussi.

Les méthodes itératives ont comme objectif de calculer une suite de solutions convergeant vers la solution exacte (finale). Ce genre de méthodes est très adapté aux systèmes de taille importante même avec beaucoup de calcul en virgule flottante.

Définition :

Soit un système linéaire $Ax = b$; la matrice A doit être décomposée en deux matrices M et N où $A = M - N$ et avec M est une matrice inversible.

$Ax = b \Longleftrightarrow (M - N)x = b \Longleftrightarrow Mx - Nx = b \Longleftrightarrow Mx = Nx + b \Longleftrightarrow M^{-1}Mx = M^{-1}(Nx + b)$

$\Longleftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$

Si on pose $f(x) = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ on aura ainsi le problème ramené à un problème de recherche de « **Point fixe** » ($x = f(x)$).

Méthode de résolution des problèmes de point fixe :

La méthode du point fixe permet d'obtenir des valeurs approchées d'une solution d'une équation.

Après avoir abordé les questions d'existence et d'unicité d'une solution, on construit des suites convergeant vers cette solution et on précise sa vitesse de convergence.

Définitions

Soit I un intervalle non vide de R et f une fonction définie sur l'intervalle I à valeurs dans R.

- Soit $x \in I$. On dit que x est un point fixe pour f si $f(x) = x$.
- On dit que I est stable par f si $f(I) \subset I$.
- On dit que f est contractante sur I s'il existe un réel $\gamma \in [0, 1[$, appelé coefficient de contraction, tel que :

  $\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|$.

Soit $(U_n)n \in N$ une suite de réels.

- On dit que $(U_n)n \in N$ converge géométriquement, ou à une vitesse géométrique, vers le réel α s'il existe $k \in R$, avec $0 < k < 1$, tel que :

  $\forall n \in N , |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$

***Algorithme de résolution** :*

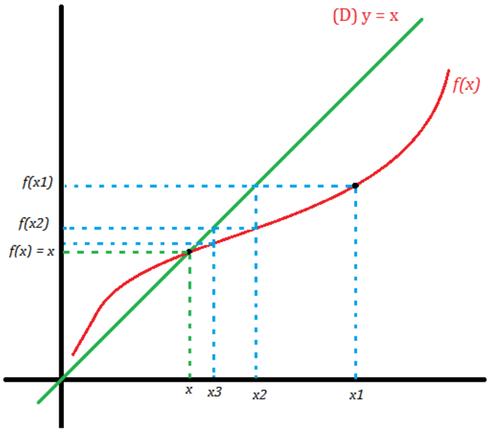
Soit X_0 une solution de départ (calculée ou donnée).

Tant que le test d'arrêt n'est pas satisfait faire

Calculer $X_{n+1} = f(X_n)$.

Fin tant que

Si la suite des solutions calculées converge, ainsi sa limite est la solution exacte.



La figure montre le graphe tracé d'une fonction ***f(x)*** quelconque, et la droite ***(D)*** reconnu par l'équation ***(y=x)***. Ainsi pour résoudre le problème du point fixe ***f(x) =x***, on se donne une valeur x_1 de départ pour ***x***, et on calcule $f(x_1)$. Ce résultat calculé est considéré comme étant une deuxième solution $x_2=f(x_1)$, pour lequel on va calculer $f(x_2)$. Ce dernier lui aussi sera considéré comme nouvelle solution $x_3=f(x_2)$, et ainsi de suite.

II. Application sur les systèmes linéaires :

Soit un système linéaire non homogène avec une matrice associée carrée :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On a ramené précédemment le système à un problème de point fixe $x= f(x)$ avec $f(x) = M^{-1}Nx+M^{-1}b$. Ce $f(x)$ sera lui-même considéré comme une nouvelle solution et ainsi de suite ($f(x) = x^{(1)} =M^{-1}Nx^{(0)}+M^{-1}b$).

On définit ainsi une suite récurrente de vecteurs $X^{(n)}$ de R^n avec $X^{(0)}$ vecteur de départ :

$$\begin{cases} X^{(0)} = (x_1, x_2, .., x_n)^t \text{ solution de départ.} \\ X^{(n+1)} = M^{-1}NX^{(n)} + M^{-1}b. \end{cases} \qquad \text{avec } X^{(k)} = \begin{pmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ .. \\ X_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Test d'arrêt :

Le calcul récurrent de cette suite doit être répété jusqu'à :

- Un nombre d'itération ***k*** donné, ou bien ;
- $Max\,|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$ ($avec\ \varepsilon > 0$ et $1 \le i \le n$).

Conditions de la convergence :

La suite calculée est convergente si une condition parmi les suivantes est satisfaite :

- $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\ i =1, 2, .., n.$ (matrice à diagonale dominante)
- $\rho(M^{-1}N)<1$ (ρ le rayon spectral $\rho = max(|\lambda_i|)$ λ_i les valeurs propres de la matrice.)

Vitesse de convergence :

Soit $\bar{x}$ la solution exacte du système $Ax = b$ et $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$ les solutions approchées calculées respectivement dans les itérations k et $k-1$. Ainsi on a :

$$M\,\bar{x} = N\,\bar{x} + b \qquad (1)$$

$$Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b \qquad (2)$$

(2) –(1) on obtient : $Mx^{(k)} - M\bar{x} = Nx^{(k-1)} - N\bar{x}$. <==> $M(x^{(k)} - \bar{x}) = N(x^{(k-1)} - \bar{x})$ <==> $x^{(k)} - \bar{x} = M^{-1}N(x^{(k-1)} - \bar{x})$. Ainsi $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x} = M^{-1}Ne^{(k-1)}$ ($e^{(k)}$ l'erreur absolue dans l'itération k).

Soit $B = M^{-1}N$, ainsi on aura :

$$E^{(k)} = Be^{(k-1)} = BBe^{(k-1)} = \dots = B^k e^{(0)}.$$

D'après la 3ème condition de convergence on a alors : $\rho(M^{-1}N)<1$ <==>: $\rho(B)<1$, donc pour obtenir une meilleure convergence $\rho(B)$ doit être le plus petit possible.

Donc la vitesse de convergence dépend de la décomposition utilisée de la matrice A.

Principales décomposition de la matrice associée :

Ecrire la matrice A sous la forme : A = D -E - F avec :

- D est une matrice diagonale (constituée des éléments de la diagonale de A).
- E est une matrice triangulaire inférieure avec une sans diagonale et
- F une matrice triangulaire supérieure sans diagonale.

Les deux matrices E et F sont constituées directement à partir des éléments de A.

D	E	F
$\begin{matrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix}$

Ainsi on a d'une part A = M – N et de l'autre part A = D-E-F. donc les matrices M et N peuvent être obtenues à partir des différents types de regroupement des matrice D, E et F.

Méthode de Jacobi :

$M = D$ et $N = (E+F)$.

$B = M^{-1}N = D^{-1}(E+F) = D^{-1}(E+F)$.

Méthode de Gauss-Seidel :

$M = D-E$ et $N = F$.

$B = M^{-1}N = (D-E)^{-1}(F) = (D-E)^{-1}F$.

III. Résolution du système :

a. Méthode de Jacobi :

Algorithme :

$X^{(0)}$ solution de départ donné.

$X_i^{(k+1)} = \frac{1}{aii} (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} X_j^{(k)} \quad i = 1, .., n$

$$\begin{cases} X^{(0)} & \text{donné} \\ X_i^{(k+1)} = \dfrac{b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij} X_j^{(k)}}{a_{ii}} & \forall i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Exemple :

Soit le système linéaire suivant :

Système	Matrice associée
4x1 –x2 +2x3 = 3 2x1 -6x2 +3x3 = 4 x1 -2x2 +4x3 = 2	$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Résoudre ce système par la méthode de Jacobi en utilisant $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ comme solution de départ jusqu'à arriver à $k=3$.

Convergence de la matrice A :

La matrice A est diagonale dominante : parce que chaque élément dans la diagonale est supérieur par sa valeur absolue à la somme des valeurs absolues des éléments de sa ligne.

Résolution :

X	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(2)}$
x_1	0	$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{3}{4}$	$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{3}$	$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(2)} - 2x_3^{(2)}) = \frac{23}{32}$
x_2	0	$x_2^{(1)} = \frac{-1}{6}(4 - 2x_1^{(0)} - 3x_3^{(0)}) = \frac{-2}{3}$	$x_2^{(2)} = \frac{-1}{6}(4 - 2x_1^{(1)} - 3x_3^{(1)}) = \frac{-1}{6}$	$x_2^{(3)} = \frac{-1}{6}(4 - 2x_1^{(2)} - 3x_3^{(2)}) = \frac{-163}{288}$
x_3	0	$x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(2 - x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}$	$x_3^{(2)} = \frac{1}{4}(2 - x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) = \frac{-1}{482}$	$x_3^{(3)} = \frac{1}{4}(2 - x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}) = \frac{1}{3}$

b. Méthode de Gauss-Seidel :

On fait la même hypothèse que pour la méthode de Jacobi, c'est-à-dire que D soit inversible ($a_{ii} \neq 0$). Ceci implique que D -E est aussi inversible.

On écrit maintenant Ax = b sous la forme

$(D - E)x = Fx + b \Longrightarrow x = (D - E)^{-1}Fx + (D - E)^{-1}b$

Algorithme :

$X^{(0)}$ solution de départ donné.

$X_i^{(k+1)} = \frac{1}{aii} (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} X_j^{(k)} \quad i = 1, .., n$

$$\begin{cases} X^{(0)} & \text{donné} \\ X_i^{(k+1)} = \dfrac{b_i - \sum_{j<i} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} X_j^{(k)}}{a_{ii}} & \forall i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Exemple :

Résoudre l'exemple précédent avec les mêmes conditions en utilisant la méthode de Gauss-Seidel.

Résolution :

X	X(0)	X(1)	X(2)	X(2)
x_1	0	$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{3}{4}$	$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{19}{32}$	$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(2)} - 2x_3^{(2)}) = \frac{147}{256}$
x_2	0	$x_2^{(1)} = \frac{-1}{6}(4 - 2x_1^{(1)} - 3x_3^{(0)}) = \frac{-5}{12}$	$x_2^{(2)} = \frac{-1}{6}(4 - 2x_1^{(2)} - 3x_3^{(1)}) = \frac{-5}{12}$	$x_2^{(3)} = \frac{-1}{6}(4 - 2x_1^{(3)} - 3x_3^{(2)}) = \frac{-155}{384}$
x_3	0	$x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(2 - x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) = \frac{5}{48}$	$x_3^{(2)} = \frac{1}{4}(2 - x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}) = \frac{55}{384}$	$x_3^{(3)} = \frac{1}{4}(2 - x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)}) = \frac{475}{3072}$

Exercice :

Soit la matrice A suivante associée à un système linéaire :

$$A \quad \begin{array}{|ccc|} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}$$

a. Déterminer les matrices d'itération B_j et B_{gs} respectivement des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour la matrice A.

b. Calculer la rayon spectral ρ_j et ρ_{gs} respectivement des deux matrices B_j et B_{gs}.

c. Que peut-on déduire ?

Solution :

a. Calcul des deux matrices d'itération :

$A = M - N \Rightarrow X^{(k)} = M^{-1}NX^{(k-1)} + M^{-1}b \qquad (B = M^{-1}N); \quad A = D - E - F$

$$D = \begin{array}{|ccc|} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \qquad E = \begin{array}{|ccc|} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad F = \begin{array}{|ccc|} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

<u>**Méthode de Jacobi:**</u>

$M_j = D$ et $N_j = E + F; \quad B_j = M_j^{-1}N_j = D^{-1}(E+F)$

$$M_j = D = \begin{array}{|ccc|} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \qquad M_j^{-1} = D^{-1} = \begin{array}{|ccc|} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \qquad N = E + F = \begin{array}{|ccc|} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$B_j = M_j^{-1}N_j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Méthode de Gauss-Seidel :</u>

$M_{gs} = D - E$ ***et*** $N_{gs} = F$; $B_{gs} = M_{gs}^{-1} N_{gs} = (D - E)^{-1}(F)$

$$M_{gs} = D - E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad M_{gs}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad N = F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{gs} = M_{gs}^{-1}N_{gs} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Calcul de M_{gs}^{-1} :

$$M_{gs}^{-1} = \frac{1}{\det(Mgs)} \mathrm{Comat}(M_{gs})^t = \frac{1}{27} \times \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

b. Les rayons spectraux :

$\rho = Max\ |\lambda_i|$ (λ_i valeurs propres $1 \le i \le 3$)

Le polynôme caractéristique : $\det(B - \lambda I) = 0$

$Det(B_j - \lambda I) = -\lambda^2 + \frac{2}{9}\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda = 0\ , \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}) \Rightarrow \rho(B_j) = max\ (|0|, |\frac{\sqrt{2}}{3}|, |-\frac{\sqrt{2}}{3}|) = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0{,}471 < 1$

$Det(B_{gs} - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{2}{9}\lambda^2 = 0 \Rightarrow (\lambda = \frac{2}{9}\ , \lambda = \pm 0) \Rightarrow \rho(B_{gs}) = max\ (|0|, |\frac{2}{9}|) = \frac{2}{9} = 0{,}222 < 1$

c. Déduction :

$\rho(B_j) = 0{,}471 < 1$ et $\rho(B_{gs}) = 0{,}222 < 1$.

Les deux matrices sont convergentes (parce que leur rayons spectraux sont tous deux inférieurs à 1), mais B_{gs} converge plus rapidement que B_j parce que $\rho(B_{gs}) < \rho(B_j)$.

c. Méthode de relaxation

On fait la même hypothèse que pour les autres méthodes, c'est-à-dire que D soit inversible. On introduit un paramètre réel ω non nul. Ceci implique que $\frac{D}{\omega} - E$ est aussi inversible.

On écrit ***Ax = b*** sous la forme générale.

$$\begin{cases} X^{(0)} & \text{donné} \\ X_i^{(k+1)} = (1-\omega)X_i^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j<i} a_{ij}X_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}X_j^{(k)}\right] & \forall i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Soit ω un nombre réel non nul, la matrice A s'écrit $= \left(\frac{D}{\omega} - E\right) + (D - \frac{D}{\omega} - F)$, et le système $(Ax = b)$ s'écrit ainsi $(\frac{D}{\omega} - E)\, x = (\frac{1-\omega}{\omega} D + F)\, x + b$.

La résolution du système se fait ainsi selon l'algorithme suivant :

Algorithme

$X^{(0)}$ solution de départ (arbitraire).

$(\frac{D}{\omega} - E\,)X^{(k+1)} = (\frac{1-\omega}{\omega} D + F)\ X^{(k)} + b$

Soit encore $(D - \omega E)X^{(k+1)} = ((1-\omega)D + \omega F)X^{(k)} + \omega b$

La matrice d'itération s'écrit :

$B_\omega = (D - \omega E)^{-1}((1\omega)D + \omega F).$

Les composantes du vecteur x_{k+1} sont solutions de

$$\left\| \begin{array}{l} a_{ii}(x_{k+\frac{1}{2}})_i = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(x_{k+1})_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}(x_k)_j + b_i \\ (x_{k+1})_i = (x_k)_i + \omega((x_{k+\frac{1}{2}})_i - (x_k)_i). \end{array} \right.$$

Pour $\omega = 1$, c'est la méthode de Gauss-Sidel.

IV. Conditionnement de matrices :

La résolution d'un système linéaire par les méthodes numériques directes ou itératives est sujette à des erreurs d'arrondi dont l'accumulation peut détériorer notablement la précision de la solution obtenue.

Afin de quantifier la sensibilité de la solution d'un système linéaire Ax = b vis-à-vis des perturbations des données A et b, on utilise la notion de conditionnement (vue dans le 1er cours) appliquée sur les matrices.

a) Définition :

Soit ||.|| une norme matricielle subordonnée. Pour toute matrice inversible A d'ordre n, on appelle Conditionnement de A relativement à la norme matricielle ||.|| le nombre :

$$Cond(A) = ||A||.||A^{-1}||.$$

La valeur du conditionnement d'une matrice dépend en général de la norme subordonnée choisie, on coutume de signaler celle-ci en ajoutant un indice dans la notation.

Par exemple $Cond_p(A) = ||A||_p||A^{-1}||_p$ (p = 1 ,.., ∞).

b) Propriétés de conditionnement :

- Cond(A) ≥ 1. Le conditionnement est d'autant meilleur qu'il est plus proche de 1.
- $Cond(A) = Cond(A^{-1})$
- Cond(αA)=Cond(A).
- Si A est normale ($A^*A = AA^*$ sachant que A^* est la matrice adjointe de A) et la norme utilisée est $||.||_2$ on a alors :

  $Cond_2(A) = \max_i|\lambda_i(A)|/\min_i|\lambda_i(A)|$; λ_i valeur propre de A.

$$cond_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|},\ \lambda_i \text{ valeur propre de } A.$$

Pour une matrice A quelconque :

$$cond_2(A) = \frac{\mu_N(A)}{\mu_1(A)},$$

$$\begin{aligned} \mu_N &= \text{plus grande valeur singulière de } A, \\ \mu_1 &= \text{plus petite valeur singulière de } A. \end{aligned}$$

c) Normes matricielles :

Une norme matricielle, notée comme la norme vectorielle par ||.||, est par définition une norme vectorielle :

- ||A|| ≥ 0 et ||A|| = 0 ==> A = 0.
- ||αA|| = |α|.||A|| pour tout scalaire α.
- ||A+B|| ≤ ||A|| + ||B||.

En plus elle vérifie :

- ||AB|| ≤ ||A|| . ||B||.

Etant donné une norme vectorielle ||.||, on lui associe une norme matricielle, appelée ***norme matricielle subordonnée***, de la manière suivante :

- $||A|| = \max\frac{||Ax||}{||x||}$ (x ≠ 0)

Les normes matricielles souvent utilisées sont (pour un espace n x p) :

$$||A||_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|A_{i,j}|$$

$$||A||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|A_{i,j}|^2}$$

et plus généralement :

$$||A||_q = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|A_{i,j}|^q)^{\frac{1}{q}}$$

pour $q \in [1; +\infty[$
mais aussi :

$$||A||_\infty = max_{i=1}^{n}(max_{j=1}^{p}|A_{i,j}|)$$

On peut également penser à la norme souvent appelée norme triple qui est induite par deux normes données sur Rn et Rn donné par :

$$|||A||| = sup_{X\in\mathbf{R}^p-\{0\}}\frac{||A.X||}{||X||}$$

Références bibliographiques :

- Jean-Michel Muller " Elementary Fucntions – Algorithms and implementation" 3rd Edition Birkhauser 2016.
- Vincent Lefèvre & Paul Zimmermann " Arithmétique flottante" rapport de recherche INRIA 2004.
- Guillaume Legendre "Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique" Cours de Méthodes numériques - Université Paris Dauphine 2010.
- Takeo Takahashi "Analyse numérique" Cours électif CE33 Ecole des Mines de Nancy 2014.

Annexe :

Voici quelques exercices pour s'entrainer

Exercice1 :

Soient A1, A2 et A3 3 matrices définies en fonction des 3 entiers non nuls a, b et c :

$$A1 = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ a & 5 & 1 \\ a & 2 & b \end{pmatrix} \quad A2 = \begin{pmatrix} 3 & b & -2 \\ b & c & b \\ 2 & -4 & c \end{pmatrix} \quad A3 = \begin{pmatrix} c & -a & 3 \\ -1 & a & 1 \\ -a & b & 5 \end{pmatrix}$$

- Pour chaque matrice vérifier les conditions pour lesquelles celle-ci est à diagonale dominante ?
- Vérifier les conditions de convergence pour les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour chaque matrice lorsque : a = 1, b =3, et c =-6.
- Soient b1=(6,16,12)t, b2=(-11,-,-26)t et b3=(-23,10,62)t.
- Résoudre les systèmes A1X=b1, A2X=b2 et A3X=b3 avec les deux méthodes Jacobi et Gauss-Seidel (prendre ε=0.5).

Exercice2 :

Calculer dans chacun des cas suivants le rayon spectral de la matrice de la méthode de Jacobi et le rayon spectral de la matrice de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Que peut-on déduire ?

2. Montrer que si la matrice A est à diagonale dominante stricte :

$$\forall 1 \leq i \leq n, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

alors la méthode itérative de Jacobi pour la résolution de $Ax = b$ est convergente (on pourra montrer que $\|J\|_\infty < 1$).

3. Etudier la convergence de la méthode de relaxation (pour la résolution du système $Ax = b$) lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$