Rattrapage de Maths 1

(Durée : 01h-30 min)

Exercice 1 : (8 points)

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ nous avons :

4

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

2) Soit $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \longrightarrow [0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ telle que $f(x,y,z)=\left(x^2,y,\frac{1}{z}\right)$.

3 a. Montrer que f est injective, surjective.

1 b. En déduire que l'application f est bijective. Déterminer sa réciproque f^{-1}.

Exercice 2 : (4 points)

Calculer les limites suivantes :

2 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\left((x-2)^3+1\right)}{e^{(x-2)^3}-1}$ 2

(Vous n'utilisez pas la règle de l'Hôpital)

Exercice 3 : (8 points)

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x}-1,$$

$$g(x)=\frac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\sin x}.$$

2 1) Montrer que f et g sont prolongeables par continuité au point 0.

2 2) Déterminer $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les prolongements respectifs de f et g.

2 3) Soit h la fonction définie par :

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad x<0,\\ 0 & si \quad x=0,\\ g(x) & si \quad x>0.\end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction h au point 0.

2 4) Montrer que l'équation $h(x)=e^x-1$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

Indication :

On donne quelques limites usuelles suivantes:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1,$$

التمرين 1:

1) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل $n \geq 1$ لدينا:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

2) ليكن $f: [0,+\infty[\times \mathbb{R}\times \mathbb{R}^* \rightarrow [0,+\infty[\times \mathbb{R}\times \mathbb{R}^*$ حيث $f(x,y,z)=\left(x^2,y,\frac{1}{z}\right)$.

a. برهن أن f متباين، غامر.

b. إستنتج أن التطبيق f تقابلي. حدد تطبيقه العكسي f^{-1}.

التمرين 2:

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\left((x-2)^3+1\right)}{e^{(x-2)^3}-1}$.

(لا تستعمل قاعدة لوبيتال)

التمرين 3:

ليكن f و g تابعين حيث :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x}-1,$$

$$g(x)=\frac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\sin x}.$$

1) بين أن f و g قابلين للتمديد بالإستمرار عند 0.

2) حدد $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$ التابعين الممددين لـ f و g على الترتيب.

3) ليكن h التابع المعرف بـ :

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad x<0, \\ 0 & si \quad x=0, \\ g(x) & si \quad x>0. \end{cases}$$

أدرس استمرار التابع h عند 0.

4) بين أن المعادلة $h(x)=e^x-1$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

إرشاد :

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1,$$

Math 1

Corrigé. Rattrapage (ST)
(15/07/2021)

Ex 01 :

1) Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la proposition suivante :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$$

Initialisation :

Pour $n=1$ nous avons :

$$\frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2} \quad\quad 1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$ 0,5 1,00

Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que $P(n)$ est vraie :

i.e. $$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$$

Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{?}{=} 1-\frac{1}{(n+2)}.$$ 0,5

On a

$$\underbrace{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$ I 1

$$= 1 - \frac{(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{(n+2)}{(n+1)(n+2)} - \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{(n+2) - 1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2}$$

1

Donc $P(n+1)$ est vraie, par suite $P(n)$ est vraie.

2) Soit $f : [0,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow [0,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \left(x^2, y, \frac{1}{z}\right)$$

a.

1. f injective $\iff \forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$f(x_1,y_1,z_1) = f(x_2,y_2,z_2) \overset{?}{\Longrightarrow} (x_1,y_1,z_1) = (x_2,y_2,z_2)$$

(ou $\forall x,y \in E : f(x) = f(y) \overset{?}{\Longrightarrow} x = y$) 0,1

Soient $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

0,1

$$f(x_1,y_1,z_1) = f(x_2,y_2,z_2) \Longrightarrow \left(x_1^2, y_1, \frac{1}{z_1}\right) = \left(x_2^2, y_2, \frac{1}{z_2}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1^2 = x_2^2 \\ y_1 = y_2 \\ 1/z_1 = 1/z_2 \end{cases} \quad \left(\text{Car} \quad \begin{matrix} x_1, x_2 \in [0,+\infty[\\ y_1, y_2 \in \mathbb{R} \\ z_1, z_2 \in \mathbb{R}^* \end{matrix}\right) \quad 0,2$$

Math 1 Corrigé. Rattrapage (ST) (15/07/2021)

Ex 01. (Suite)

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases} \Longrightarrow (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$$

0,25

donc f est injective.

2. f surjective $\Longleftrightarrow \forall (x', y', z') \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,$

0,5 $\exists ?\, (x, y, z) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* : (x', y', z') = f(x, y, z)$

Soit $(x', y', z') \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (ou $\forall y \in F, \exists ?\, x \in E : f(x) = y$)

$$f(x, y, z) = \left(x^2, y, \frac{1}{z}\right) = (x', y', z')$$ 0,25

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 = x' & \ldots (1) \\ y = y' & \ldots (2) \\ 1/z = z' & \ldots (3) \end{cases}$$ 0,25

de (1) $\Longrightarrow x = \sqrt{x'}$ (car $x, x' \in [0, +\infty[$)

de (2) $\Longrightarrow y = y'$

de (3) $\Longrightarrow z = \frac{1}{z'}$ (car $z, z' \in \mathbb{R}^*$)

0,25

alors $\forall (x', y', z') \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $\exists (x, y, z) = \left(\sqrt{x'}, y', \frac{1}{z'}\right)$
$\in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$;

$$f(x, y, z) = (x', y', z')$$ 0,25

et donc f est surjective.

b.

• Comme l'application f est injective et surjective 0,5
alors elle est bijective.

• $f^{-1} : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$$(x', y', z') \mapsto (x, y, z) = f^{-1}(x', y', z')$$

$$f^{-1}(x', y', z') = \left(\sqrt{x'}, y', \frac{1}{z'}\right)$$ 0,5

En O2c

1) $$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = 1^{\infty} \text{ F.I.}$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$ 0,5

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$ 0,5

Math 1 Corrigé. Rattrapage (ST) (15/07/2021)

En Ex 2 : (Suite)

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}} = e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}, \quad y = \frac{1}{x}$$

0,5

$x \to +\infty$, $\quad y \to 0$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e.$$

0,5

2) $$\lim_{x\to 2} \frac{\ln\left((x-2)^3+1\right)}{e^{(x-2)^3}-1}.$$

On met $y=(x-2)^3$, $(x\to 2,\ y\to 0)$

1,5

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{e^y-1} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{y}\cdot\frac{\ln(y+1)}{e^y-1}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}\cdot\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = 1$$

0,5

Ex 03 :

1) f est prolongeable par continuité en 0. 0,5

s'il existe $(\exists)$ $\lim\limits_{x \to 0} f = l \in \mathbb{R}$.

• $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1} - 1 \right) = 0$ 0,5

donc f est prolongeable par continuité en 0. 0,25

• $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim \dfrac{(e^x - 1)(1 - \cos x)}{\sin x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}} \cdot (1 - \underbrace{\cos x}_{\to 0}) = 0$ 0,5

donc g est prolongeable par continuité en 0. 0,25

2) $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 1

$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 1

(6

Math 1

Corrigé. Rattrapage (ST) (15/07/2021)

Ex 03. (Suite)

3) h est continue en 0 ssi

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} h = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} h = h(0) = 0 \quad 0{,}5$$

On a $\quad 0{,}50$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = 0 = h(0)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = 0 = h(0) \quad 0{,}5$$

par suite h est continue en 0. $\quad 0{,}5$

4) $h(x) = e^x - 1$

pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$: $h(x) = g(x)$ alors $\quad 0{,}25$

$$\frac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\sin x} = (e^x - 1) \quad 0{,}25 \quad \left(\text{car } e^x - 1 > 0,\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) \quad 0{,}25$$

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = 1 \quad 0{,}25 \Rightarrow 1 - \cos x = \sin x$$

$\Longrightarrow \cos x + \sin x - 1 = 0$

Au lieu d'étudier $h(x) = e^x - 1$

On etudie la fonction $\underbrace{\cos x + \sin x - 1}_{h_1(x)} = 0$

$h_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$ 0,25

$h_1\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -1 < 0$ 0,25

d'où $h_1\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot h_1\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$ 0,25

alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$\exists\, c \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] : h_1(c) = 0$

0,5