

Nadir Arada

Méthode des Éléments Finis

MASTER EDP ET APPLICATIONS



Université de Jijel
Département de Mathématiques

Table des matières

Introduction	3
1 Problèmes variationnels abstraits	5
1.1 Problème variationnel	5
1.2 Méthode de Galerkin	7
2 Méthode des éléments finis en dimension 1	11
2.1 Éléments finis linéaires	11
2.1.1 Maillage et fonctions de base	11
2.1.2 Opérateur d'interpolation et erreur d'interpolation	14
2.1.3 Convergence et estimation d'erreur	18
2.1.4 Conditionnement de la matrice de rigidité	18
2.1.5 Application à l'approximation du problème de Poisson	21
2.2 Éléments finis quadratiques	25
2.2.1 Maillage et fonctions de base	25
2.2.2 Opérateur d'interpolation et erreur d'interpolation	28
2.2.3 Convergence et estimation d'erreur	31
2.2.4 Application à l'approximation du problème de Poisson	31
3 Méthode des éléments finis en dimension 2	35
3.1 Éléments finis linéaires dans le cas bidimensionnel	35
3.1.1 Triangulation	35
3.1.2 Éléments finis linéaires	37
3.1.3 Fonctions de base globales	38
3.1.4 Fonctions de base sur un triangle quelconque	39
3.1.5 Élément de référence	42
3.1.6 Opérateurs d'interpolation	45
3.1.7 Convergence et estimation d'erreur	51
3.2 Application à l'approximation du problème de Poisson	52

3.2.1	Problème continu	52
3.2.2	Problème discret	53
3.2.3	Convergence	53
3.2.4	Assemblage de la matrice	54
3.2.5	Calcul effectif de la matrice élémentaire	58
Bibliographie		71
Programme		73

Introduction

De nos jours, la méthode des éléments finis est reconnue comme l'une des principales méthodes d'approximation des problèmes aux limites elliptiques, mais aussi paraboliques et hyperboliques. Incontournable en mécanique (fluides, solides, interactions, structures), elle a de nombreuses applications dans tous les domaines qui impliquent des équations aux dérivées partielles. Flexible, elle peut traiter des problèmes linéaires ou non-linéaires, dans des géométries quelconques définies en dimension 1, 2 ou en dimension supérieure.

Comme toute méthode de Galerkin, le principe est de projeter sur un espace de dimension finie V_h , soigneusement choisi, la formulation variationnelle associée à ces problèmes et initialement posée sur un espace V . La solution approchée se présentant comme une combinaison linéaire des éléments d'une base adéquate dans $V_h \subset V$, le problème approché se ramène à la simple résolution d'un système.

Dans le premier chapitre, nous introduisons le cadre fonctionnel dans lequel les formulations faibles de toutes les équations aux dérivées partielles que nous considérerons seront posées. Nous commençons par le théorème de Lax-Milgram, résultat fondamental et systématiquement utilisé par la suite pour étudier la solvabilité des problèmes continus. Dans ce même cadre, nous présentons la méthode d'approximation de Galerkin, prouvons l'existence d'une solution approchée et établissons le lemme de Céa, autre résultat important et de grande utilité pour la suite.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse de la méthode des éléments finis dans le cas de problèmes unidimensionnels. Commencant par des éléments finis linéaires, nous définissons un maillage de l'intervalle Ω , un sous-espace V_h associé à l'approximation de $H^1(\Omega)$, les fonctions de base correspondantes et établissons l'existence d'une solution au problème approché. Nous considérons ensuite l'opérateur d'interpolation associé, défini

de $H^1(\Omega)$ dans V_h et étudions ses propriétés. Ces résultats sont alors utilisés, conjointement avec le lemme de Céa, pour analyser la convergence de la méthode et établir des estimations d'erreur correspondantes. La résolution effective du problème approché étant fortement liée avec les propriétés du système linéaire associé, nous analysons le comportement du nombre de condition de la matrice principale par rapport au paramètre de discrétisation h . Cette première partie se termine par l'application de tous ces résultats au cas du problème de Poisson.

La deuxième partie du Chapitre 2 suit, pas à pas, la même démarche mais rapportée à des éléments finis quadratiques.

Dans le troisième chapitre, nous considérons le cas de problèmes bidimensionnels. Afin de simplifier la présentation, seul le cas d'éléments finis linéaires est analysé. Comme dans le précédent chapitre, nous commençons par définir une triangulation du domaine et par construire les espaces approchés associés selon la technique classique des bases de Lagrange. Les propriétés de ces fonctions de base globales sont étudiées et le lien entre leurs restrictions à un élément fini et les coordonnées barycentriques de celui-ci est établi. Le problème global se ramenant ainsi à un problème local, nous étudions les propriétés de l'application affine qui à chaque élément de la triangulation associe un triangle de référence. Nous introduisons ensuite les opérateurs d'interpolation et établissons les estimations qui seront utilisées pour l'analyse de la convergence de la méthode et l'estimation d'erreur correspondante. Nous finissons le chapitre par une application à l'approximation du problème de Poisson. Après l'étude de la convergence, nous montrons comment calculer effectivement les matrices élémentaires associées, et revenant du local vers le global, comment assembler la matrice.

Ces notes ont fait l'objet d'un cours donné dans le cadre du Master EDP et Applications, durant le premier semestre de l'année scolaire 2016-2017, au niveau du Département de Mathématiques de l'Université Mohamed Seddik Benyahia de Jijel.

Chapitre 1

Problèmes variationnels abstraits

Nous commençons par dresser le cadre fonctionnel général fourni par le théorème de Lax-Milgram qui permettra d'étudier la solvabilité des problèmes aux limites que l'on va considérer ultérieurement (typiquement des problèmes aux limites elliptiques). Nous présentons ensuite la méthode de Galerkin qui fournit le cadre abstrait d'étude de la convergence de l'approximation de ces problèmes aux limites par la méthode des éléments finis.

1.1 Problème variationnel

Les formulations variationnelles de la plupart des problèmes aux limites que l'on aura à considérer s'écrivent sous la forme générale suivante

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V, \quad (1.1)$$

où V est un espace de Hilbert dont la norme et le produit scalaire seront notés $\|\cdot\|_V$ et (\cdot, \cdot) , respectivement.

Les hypothèses sur a et F sont comme suit.

1. $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.
2. a est continue, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall (u, v) \in V \times V.$$

3. a est coercive, c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$$

4. F est une forme linéaire et continue sur V (i.e. F est un élément de V' , espace dual de V).

Les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram sont ainsi réunies et permettent d'établir l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnel (1.1). Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.1.1 (Lax-Milgram). *Soit V un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur V et F une forme linéaire et continue sur V . Alors le problème variationnel (1.1) admet une unique solution $u \in V$. De plus, on a l'estimation a priori suivante*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$$

où $\alpha > 0$ est la constante de coercivité de a .

Démonstration. La forme bilinéaire a étant continue sur V , d'après le théorème de Riesz, l'opérateur linéaire A défini par

$$(Au, v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in V$$

est continu de V dans V . La coercivité et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent que

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v) = (Av, v) \leq \|Av\|_V \|v\|_V,$$

et donc

$$\|v\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|Av\|_V. \quad (1.2)$$

Cette inégalité entraîne que A est injectif. En effet, si $Av = 0$, alors $\|Av\|_V = 0$ et d'après (1.2), il vient que $\|v\|_V = 0$, i.e. $v = 0$. De plus, la même inégalité entraîne que l'image de A

$$R(A) = \{w \in V \mid \exists v \in V, Av = w\}$$

est fermée. Pour voir cela, considérons une suite $(v_n)_n$ de V telle que Av_n converge vers w . La suite $(Av_n)_n$ est alors une suite de Cauchy et grâce à (1.2), on obtient

$$\|v_n - v_m\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|Av_n - Av_m\|_V$$

i.e. que la suite $(v_n)_n$ est elle aussi une suite de Cauchy et converge donc vers un élément $v \in V$. La continuité de A implique alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Av_n = Av$$

et par conséquent $Av = w$. Ceci montre que $w \in R(A)$, qui est donc fermé. Le problème (1.1) admettra une solution si $R(A) = V$. Comme $R(A)$ est fermé, il suffit de montrer que si $w \in V$ est orthogonal à $R(A)$, il est forcément nul. Soit donc w tel que

$$(Av, w) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Alors, en particulier, on a

$$0 = (Aw, w) = a(w, w) \geq \alpha \|w\|_V^2$$

et par conséquent $w = 0$. □

1.2 Méthode de Galerkin

L'idée de base de cette méthode est d'approcher les éléments de l'espace V par ceux d'un espace V_h de dimension finie, où h est un paramètre réel positif caractérisant la discrétisation et destiné à tendre vers 0.

La méthode des éléments finis, que l'on va considérer dans le chapitre suivant, est une méthode de Galerkin particulière possédant des propriétés qui la rendent spécialement intéressante pour la résolution des problèmes aux limites.

Soit V_h une famille d'espaces dépendant d'un paramètre positif h , telle que

$$V_h \subset V, \quad \dim V_h = N_h < +\infty \quad \forall h > 0.$$

Le problème approché est tout simplement le pendant discret du problème (1.1). Il prend la forme

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (1.3)$$

et est appelé problème de Galerkin.

Proposition 1.2.1. *Le problème de Galerkin (1.3) admet une solution unique $u_h \in V_h$. Cette solution satisfait l'estimation a priori suivante*

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$$

où α est la constante de coercivité.

Démonstration. Vu que V_h est un sous-espace de dimension finie de V , il est fermé. Muni du produit scalaire de V , V_h est donc un espace de Hilbert. La restriction de la forme bilinéaire a à $V_h \times V_h$ est continue et coercive et la restriction de F à V_h est linéaire et continue. Utilisant le théorème de Lax-Milgram, il vient que (1.3) admet une solution unique satisfaisant l'estimation énoncée. \square

Remarque 1.2.2. L'estimation a priori est uniforme par rapport au paramètre de discrétisation h . Ce résultat garantit la stabilité de la méthode.

Soit $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ une base de V_h et considérons le développement de la solution de (1.3) dans cette base, i.e.

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i.$$

Proposition 1.2.3. Le vecteur $U_h = (u_1, \dots, u_{N_h})^\top$ est solution du système linéaire

$$A_h U_h = B_h,$$

où $A_h = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq N_h}$ et $B_h = (F(\varphi_1), \dots, F(\varphi_{N_h}))^\top$.

Démonstration. Dans la formulation variationnelle du problème approché, on prend successivement $v_h = \varphi_i$, $1 \leq i \leq N_h$. Il résulte donc que résoudre (1.3) est équivalent à trouver les N_h coefficients $(u_j)_{1 \leq j \leq N_h}$ tels que

$$a \left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j, \varphi_i \right) = F(\varphi_i) \quad 1 \leq i \leq N_h.$$

La forme a étant bilinéaire, il vient que

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = F(\varphi_i) \quad 1 \leq i \leq N_h$$

et de manière équivalente $A_h U_h = B_h$. \square

La matrice A_h est appelée *matrice de rigidité*.

Proposition 1.2.4. La matrice A_h est définie positive. Elle est symétrique si a est symétrique.

Démonstration. Nous rappelons tout d'abord qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie positive si

$$v^\top A v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad v^\top A v = 0 \iff v = 0.$$

Soit $v \in \mathbb{R}^{N_h}$. En utilisant la bilinéarité et la coercivité de a , on obtient

$$\begin{aligned} v^\top A_h v &= \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} v_i a(\varphi_j, \varphi_i) v_j = \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} a(v_j \varphi_j, v_i \varphi_i) \\ &= a\left(\sum_{j=1}^{N_h} v_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i\right) \geq \alpha \left\| \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i \right\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Finalement, observons que si $v^\top A_h v = 0$ alors $\sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i = 0$. Tenant en compte le fait que $(\varphi_i)_i$ forme une base, il vient que $v_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N_h$. La matrice A_h est donc définie positive. \square

Remarque 1.2.5. *i) Le résultat d'existence et d'unicité d'une solution approchée énoncé dans la Proposition 1.2.1, peut-être prouvé de manière plus constructive en utilisant les Propositions 1.2.3 et 1.2.4, ainsi que le fait qu'une matrice définie positive est inversible.*

ii) Certaines propriétés de la matrice de rigidité, comme la positivité ou la symétrie, sont indépendantes du choix de la base de V_h et dépendent exclusivement des propriétés du problème faible à approcher. D'autres propriétés, tel le nombre de condition de la matrice ou le fait qu'elle soit creuse, dépendent de la base choisie.

Le résultat suivant est fondamental dans l'étude de la convergence de la méthode de galerkin.

Lemme 1.2.6 (Lemme de Céa). *Soit u la solution de (1.1) et soit u_h la solution de (1.3). Alors,*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Démonstration. Comme (1.1) reste vraie pour tout $v_h \in V_h$, on a

$$a(u, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

En retranchant cette identité à (1.3), on obtient

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

et donc

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) + \underbrace{a(u - u_h, v_h - u_h)}_{=0} \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Tenant en compte la coercivité et la continuité de a , il vient que

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h$$

et donc

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Ceci termine la preuve. \square

Le lemme de Céa montre que pour que la méthode de Galerkin converge, il suffit d'exiger que, pour h tendant vers zéro, l'espace V_h "occupe" l'espace V . Plus précisément, il suffit que la condition de densité

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V \quad \forall v \in V$$

soit satisfaite.

L'espace V_h doit donc être choisi avec soin, de mode à garantir la condition de densité précédente.

Chapitre 2

Méthode des éléments finis en dimension 1

Dans ce chapitre, nous allons introduire les éléments finis les plus simples considérés dans le cas unidimensionnel. Nous construisons des espaces de dimension finis adéquats, engendrés par des fonctions possédant des propriétés intéressantes. Nous introduisons ensuite l'opérateur d'interpolation associé, estimons l'erreur d'interpolation correspondante et analysons la convergence de la méthode. Des remarques finales concernant le conditionnement de la matrice de rigidité sont aussi présentées. Les résultats ainsi obtenus sont ensuite appliqués à un problème aux limites de type Poisson.

2.1 Éléments finis linéaires

2.1.1 Maillage et fonctions de base

Nous allons établir comment construire les fonctions de base de la méthode de Galerkin de manière efficace. Soient $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive et $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire et continue. Soit $u \in V$ la solution exacte du problème variationnel

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \quad (2.1)$$

Pour fixer les idées et simplifier la présentation, nous supposons que $V = H^1(0, 1)$ ou $V = H_0^1(0, 1)$ (le cas d'un intervalle plus général peut-être analysé par une simple adaptation des arguments développés ci-dessous). Dans le cas du problème de Poisson par exemple, ceci correspond aux

choix adaptés aux conditions aux limites de type Neumann et Dirichlet, respectivement.

On introduit une partition de $\bar{\Omega} = [0, 1]$ en $N + 1$ sous-intervalles $]x_{j-1}, x_j[$, appelés *éléments*, de longueur $h_j = x_j - x_{j-1}$ avec

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1.$$

On pose $h = \max_j h_j$. Lorsque les noeuds x_j sont équidistants, le maillage est dit *uniforme*. Dans ce cas

$$x_j = jh \quad \text{avec } h = \frac{1}{N+1}, \quad 0 \leq j \leq N + 1.$$

Par souci de simplicité, nous supposons aussi que le maillage est uniforme.

Notre objectif est de construire des approximations de l'espace V . Nous appliquerons donc la méthode des éléments finis afin de construire des sous-espaces V_h . La base correspondante doit satisfaire les trois critères suivants :

1. La base de fonctions est engendrée par des fonctions simples définies par morceaux sur chaque élément de la grille.
2. Les fonctions de la base sont suffisamment régulières pour appartenir à V . (Pour les problèmes qui nous concernent dans ce cours, l'espace V est typiquement $H^1(0, 1)$ ou $H_0^1(0, 1)$.)
3. Les fonctions de la base sont choisies de sorte que les paramètres définissant la solution approchée u_h soient précisément les valeurs de u_h aux noeuds.

Soit \mathbb{P}_1 l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Considérons l'espace des fonctions continues et affines par morceaux sur chaque élément de la maille, défini par

$$X_h^1 = \left\{ v_h \in C([0, 1]) \text{ tel que } v_h|_{]x_{j-1}, x_j[} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } j = 1, \dots, N + 1 \right\}.$$

Nous pouvons représenter les fonctions de X_h^1 à l'aide des $N + 2$ fonctions de base de Lagrange caractérisées par

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 0, \dots, N + 1$$

où δ représente le symbole de Kronecker.

Les fonctions de cette base ϕ_i satisfont les critères cités précédemment. Pour $j = 0, \dots, N + 1$, ϕ_j est définie par

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1} - x}{h} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

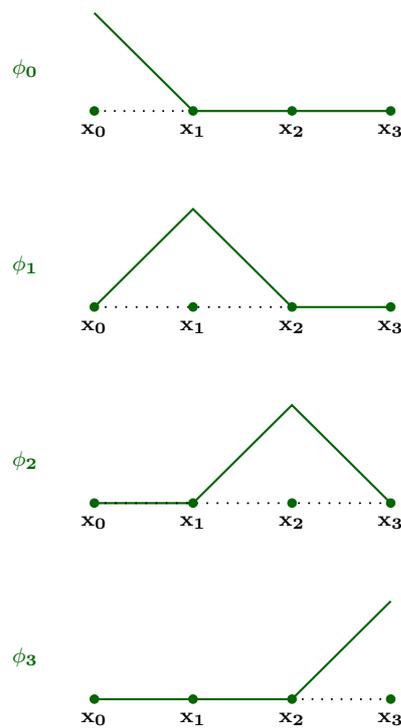


Figure 2.1 - Fonctions de base linéaires par élément pour $N = 2$

Remarque 2.1.1. *Il est évident que*

$$\text{supp } \phi_0 = [x_0, x_1],$$

$$\text{supp } \phi_j = [x_{j-1}, x_j] \cup [x_j, x_{j+1}] \quad 1 \leq j \leq N,$$

$$\text{supp } \phi_{N+1} = [x_N, x_{N+1}],$$

et donc seuls ϕ_{j-1} et ϕ_{j+1} ont un support qui intersecte celui de ϕ_j . Ceci a pour conséquence directe le fait que dans le cas du problème de Poisson, la matrice de rigidité est tridiagonale.

Proposition 2.1.2. Soit $V_h = X_h^1 \cap H^1(0, 1)$. Alors V_h est un sous-espace de $H^1(0, 1)$ de dimension $N + 2$ et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie par

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v_h(x_j) \phi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Démonstration. Tout élément v_h de X_h^1 appartient à $C([0, 1]) \cap H^1(x_j, x_{j+1})$ pour tout $0 \leq j \leq N$. D'après le théorème de recollement de Sobolev, il vient que $v_h \in H^1(0, 1)$ et donc

$$X_h^1 \subset H^1(0, 1) \quad \text{et} \quad V_h = X_h^1.$$

Le reste de la proposition est une conséquence directe de la définition de la base de Lagrange $(\phi_j)_{0 \leq j \leq N+1}$ et du fait qu'elle permet de caractériser les éléments de X_h^1 par leurs valeurs aux noeuds. \square

Il est facile d'intégrer les conditions aux limites homogènes de Dirichlet dans la construction de l'espace discret.

Proposition 2.1.3. Soit $V_h = X_h^1 \cap H_0^1(0, 1)$. L'espace V_h est un sous-espace de $H_0^1(0, 1)$ de dimension N et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie par

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^N v_h(x_j) \phi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Démonstration. D'après la proposition 2.1.2, toute fonction $v_h \in V_h$ est définie par

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v_h(x_j) \phi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Le résultat suit en prenant en compte les conditions aux bord $v_h(x_0) = 0$ et $v_h(x_{N+1}) = 0$. \square

2.1.2 Opérateur d'interpolation et erreur d'interpolation

Le lemme de Céa, considéré dans le chapitre précédent, est un outil fondamental pour l'analyse de la convergence de la solution du problème approché vers la solution du problème continu et l'établissement des estimations

d'erreur correspondantes. Une application efficace de ce résultat nécessiterait que des résultats d'approximation des éléments de l'espace V par des éléments de l'espace V_h soient disponibles. C'est à ce niveau qu'intervient la notion d'interpolation.

Définition 2.1.4. On appelle opérateur d'interpolation Π_h^1 , l'application linéaire de $H^1(0, 1)$ dans V_h définie, pour tout $v \in H^1(0, 1)$, par

$$\Pi_h^1 v(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v(x_i) \phi_i(x). \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.5. Cette définition a bien un sens car, en vertu du théorème de l'injection de Sobolev, les fonctions de $H^1(0, 1)$ sont continues sur $[0, 1]$. L'interpolée d'une fonction v est la fonction affine par morceaux qui coïncide avec v sur les sommets du maillage.

Comme nous le verrons ci-dessous, l'estimation de l'erreur d'interpolation est plus précise dans le cas de fonctions suffisamment régulières.

Lemme 2.1.6. Soit $v \in H^2(0, 1)$ et soit $\Pi_h^1 v \in X_h^1$ la fonction d'interpolation définie par (2.2). Alors les estimations suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h^1 v\|_{L^2(0,1)} &\leq h^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}, \\ \|v' - (\Pi_h^1 v)'\|_{L^2(0,1)} &\leq h \|v''\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Démonstration. Posons $e_h = v - \Pi_h^1 v$. Il est facile de voir que $e_h(x_j) = 0$ pour chaque noeud x_j , $j = 0, \dots, N$. Donc pour $x \in (x_j, x_{j+1})$, on a

$$e_h(x) = \int_{x_j}^x e_h'(s) ds.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |e_h(x)| &\leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |e_h'(s)| ds \\ &\leq \|1\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \|e_h'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} = h^{\frac{1}{2}} \|e_h'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}, \end{aligned}$$

et en intégrant sur (x_j, x_{j+1}) , il vient que

$$\|e_h\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \leq h \|e_h'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}. \quad (2.3)$$

Utilisant le fait que $u \in H^2(0, 1)$ et intégrant par parties, on obtient

$$\|e'_h\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}^2 = (e'_h, e'_h)_{L^2(x_j, x_{j+1})} = - (e''_h, e_h)_{L^2(x_j, x_{j+1})}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.3) donnent alors

$$\begin{aligned} \|e'_h\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}^2 &\leq \|e''_h\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \|e_h\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \\ &\leq h \|e''_h\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \|e'_h\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \\ &= h \|v''\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \|e'_h\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|e'_h\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \leq h \|v''\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}. \quad (2.4)$$

Le résultat suit en tenant en compte les estimations (2.3)-(2.4) et en sommant en j . \square

Dans le cas de fonctions moins régulières, le résultat est moins précis.

Lemme 2.1.7. *Soit $v \in H^1(0, 1)$ et soit $\Pi_h^1 v \in X_h^1$ la fonction d'interpolation définie par (2.2). Alors, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|v - \Pi_h^1 v\|_{L^2(0,1)} \leq 2h \|v'\|_{L^2(0,1)}.$$

De plus, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|v' - (\Pi_h^1 v)'\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

Démonstration. Il est clair que

$$\|(v - \Pi_h^1 v)'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \leq \|v'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} + \|(\Pi_h^1 v)'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}. \quad (2.5)$$

Observons alors que dans l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, toutes les fonctions ϕ_i s'annulent sauf ϕ_j et ϕ_{j+1} (voir Remarque 2.1.1). Il vient alors que pour $x \in (x_j, x_{j+1})$

$$\begin{aligned} (\Pi_h^1 v(x))' &= \left(\sum_{i=0}^{N+1} v(x_i) \phi_i(x) \right)' \\ &= (v(x_j) \phi_j(x) + v(x_{j+1}) \phi_{j+1}(x))' \\ &= \frac{1}{h} (v(x_{j+1}) - v(x_j)) = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(s) ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\left| (\Pi_h^1 v(x))' \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(s)| ds \leq \frac{h^{\frac{1}{2}}}{h} \|v'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}$$

et

$$\left\| (\Pi_h^1 v)' \right\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \leq \|v'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}. \quad (2.6)$$

Tenant en compte (2.3), (2.5) et (2.6), nous obtenons

$$\|v - \Pi_h^1 v\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \leq 2h \|v'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}$$

et la première estimation énoncée suit en sommant en j .

La démonstration de la seconde assertion se fera en utilisant la densité de $\mathcal{D}([0, 1])$ dans $H^1(0, 1)$. Soit $v \in H^1(0, 1)$ et soit (v_n) une suite de fonctions de $\mathcal{D}([0, 1])$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v - v_n\|_{H^1(0,1)} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \left\| (v - \Pi_h^1 v)' \right\|_{L^2(0,1)} &\leq \|v' - v_n'\|_{L^2(0,1)} + \left\| v_n' - (\Pi_h^1 v_n)' \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\quad + \left\| (\Pi_h^1 (v_n - v))' \right\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Du lemme 2.1.6, nous déduisons que

$$\left\| v_n' - (\Pi_h^1 v_n)' \right\|_{L^2(0,1)} \leq h \left\| v_n^{(2)} \right\|_{L^2(0,1)}.$$

De l'autre côté, en tenant en compte (2.6), nous obtenons

$$\left\| (\Pi_h^1 (v_n - v))' \right\|_{L^2(0,1)} \leq \|v_n' - v'\|_{L^2(0,1)}.$$

Combinant ces estimations, nous déduisons que

$$\left\| (v - \Pi_h^1 v)' \right\|_{L^2(0,1)} \leq 2 \|v_n' - v'\|_{L^2(0,1)} + h \left\| v_n^{(2)} \right\|_{L^2(0,1)}$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| (v - \Pi_h^1 v)' \right\|_{L^2(0,1)} \leq 2 \|v_n' - v'\|_{L^2(0,1)},$$

ce qui donne le résultat. \square

2.1.3 Convergence et estimation d'erreur

Le résultat suivant nous donne une estimation de l'erreur d'approximation par la méthode des éléments finis linéaires.

Théorème 2.1.8. *Soit $u \in V$ la solution de (2.1) et soit $u_h \in V_h$ la solution du problème approché*

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.7)$$

Alors, la méthode des éléments finis converge, i.e.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|u - u_h\|_V = 0.$$

De plus, si $u \in H^2(0, 1)$, alors il existe une constante indépendante de u et de h tel que

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Démonstration. Il est clair que $\Pi_h^1 u \in V_h$. En utilisant le lemme de Céa, il vient que

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^1 u\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^1 u\|_{H^1(0,1)}.$$

Les deux assertions sont une conséquence du lemme 2.1.7 et du lemme 2.1.6, respectivement. \square

2.1.4 Conditionnement de la matrice de rigidité

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que le problème approché s'écrit de manière équivalente sous la forme

$$A_h U_h = B_h,$$

où la matrice de rigidité A_h est une matrice définie positive, symétrique si la forme bilinéaire a est symétrique. Il est bien connu qu'il existe un certain nombre de méthodes numériques adaptées à la résolution de cette classe de problèmes. Cependant, la matrice A_h étant typiquement de grande dimension, il est aussi établi que son conditionnement est un paramètre important à tenir en compte.

Dans ce sens, nous allons à présent donner une évaluation précise du

nombre de condition $\kappa(A_h)$ de la matrice de rigidité A_h , en fonction de h . Nous rappelons que le nombre de condition est défini par

$$\kappa(A_h) = \|A_h\| \|A_h^{-1}\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme matricielle associée. Si la forme bilinéaire a est symétrique, alors la matrice A_h est symétrique, définie positive et le nombre de condition associé à la norme matricielle euclidienne est donné par

$$\kappa_2(A_h) = \frac{\lambda_{\max}(A_h)}{\lambda_{\min}(A_h)},$$

où $\lambda_{\max}(A_h)$ et $\lambda_{\min}(A_h)$ représentent la plus grande et la plus petite valeur propre de A_h , respectivement.

Proposition 2.1.9. *Soit $A_h = (a(\phi_j, \phi_i))_{0 \leq i, j \leq N+1}$ la matrice de rigidité associée au problème discret (2.7) et supposons que A_h est symétrique. Le nombre de condition correspondant satisfait*

$$\kappa_2(A_h) = O\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

En général, quand h décroît vers zéro, le nombre de condition $\kappa_2(A_h)$ augmente et le système associé au problème approché devient de plus en plus mal conditionné. Nous avons alors besoin d'utiliser un préconditionneur. Il est facile de voir que la solution U_h du système linéaire initial est aussi solution du système

$$P^{-1}A_h U_h = P^{-1}B_h, \quad (2.8)$$

où P est n'importe quelle matrice de dimension $N+2$, inversible. L'idée est de trouver une matrice P tel que

$$\kappa_2(P^{-1}A_h) \ll \kappa_2(A_h)$$

en d'autres termes, tel que le système (2.8) soit bien conditionné.

La démonstration de la proposition 2.1.9 s'appuie sur deux lemmes auxiliaires.

Lemme 2.1.10. *Pour tout $v_h = \sum_{j=0}^{N+1} v_j \phi_j \in V_h$, on a*

$$\frac{h}{6} |v|^2 \leq \|v_h\|_{L^2(0,1)}^2 \leq h |v|^2,$$

où $v = (v_0, v_1, \dots, v_{N+1})$.

Démonstration. Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned}
\|v_h\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2 &= \|v_{j-1}\phi_{j-1} + v_j\phi_j\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2 \\
&= v_{j-1}^2 \|\phi_{j-1}\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2 + v_j^2 \|\phi_j\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2 \\
&\quad + 2v_{j-1}v_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \phi_{j-1}(x)\phi_j(x) dx \\
&= \frac{h}{3} (v_{j-1}^2 + v_{j-1}v_j + v_j^2). \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Utilisant le fait que

$$\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \leq a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{2} (a^2 + b^2)$$

il vient que

$$\frac{h}{6} (v_{j-1}^2 + v_j^2) \leq \|v_h\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2 \leq \frac{h}{2} (v_{j-1}^2 + v_j^2).$$

Le résultat vient en sommant en j . □

Lemme 2.1.11 (Inégalité inverse). *Pour tout $v_h = \sum_{j=0}^{N+1} v_j \phi_j \in V_h$, on a*

$$\|v_h'\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{12}{h^2} \|v_h\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|v_h'\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2 &= \|v_{j-1}\phi'_{j-1} + v_j\phi'_j\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2 \\
&= v_{j-1}^2 \|\phi'_{j-1}\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2 + v_j^2 \|\phi'_j\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2 \\
&\quad + 2v_{j-1}v_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \phi'_{j-1}(x)\phi'_j(x) dx \\
&= \frac{1}{h} (v_{j-1}^2 - 2v_{j-1}v_j + v_j^2).
\end{aligned}$$

Prenant en compte (2.9), nous déduisons que

$$\frac{\|v_h'\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2}{\|v_h\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2} = \frac{3}{h^2} \frac{v_{j-1}^2 - 2v_{j-1}v_j + v_j^2}{v_{j-1}^2 + v_{j-1}v_j + v_j^2} \leq \frac{12}{h^2}.$$

Le résultat vient alors en sommant en j . □

Démonstration de la proposition 2.1.9. Nous rappelons qu'une valeur propre λ_h satisfait

$$A_h v = \lambda_h v$$

où v est un vecteur propre associé à λ_h . Soit alors v_h défini par $v_h(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v_i \phi_i(x)$. Nous avons

$$\lambda_h = \frac{v^\top A_h v}{v^\top v}$$

et donc (voir la preuve de la proposition 1.2.4)

$$\lambda_h = \frac{a(v_h, v_h)}{|v|^2},$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne. Utilisant la coercivité et la continuité de a dans V , nous obtenons

$$\alpha \frac{\|v_h\|_V^2}{|v|^2} \leq \lambda_h \leq M \frac{\|v_h\|_V^2}{|v|^2}.$$

En utilisant le lemme 2.1.11 et le lemme 2.1.10, il vient que

$$\lambda_h \leq M \frac{\|v_h\|_V^2}{|v|^2} \leq M \frac{\|v_h\|_{H^1(0,1)}^2}{|v|^2} \leq \left(1 + \frac{12M}{h^2}\right) \frac{\|v_h\|_{L^2(0,1)}^2}{|v|^2} \leq \frac{C_1}{h}.$$

De l'autre côté, l'inégalité de Poincaré (dans le cas $V = H_0^1(0,1)$) et le lemme 2.1.10 entraînent que

$$\lambda_h \geq C\alpha \frac{\|v_h\|_{L^2(0,1)}^2}{|v|^2} \geq C_2 h.$$

Combinant les deux inégalités précédentes, nous déduisons que

$$\kappa_2(A_h) = \frac{\lambda_{\max}(A_h)}{\lambda_{\min}(A_h)} \leq \frac{C_1}{C_2 h^2},$$

ce qui termine la preuve. \square

2.1.5 Application à l'approximation du problème de Poisson

Considérons le problème de Poisson suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{dans }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

où $f \in L^2(0, 1)$. La formulation variationnelle associée, définie dans $V = H_0^1(0, 1)$, est donnée par

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V, \quad (2.11)$$

où

$$a(u, v) = (u', v') = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx$$

$$F(v) = (f, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

La forme bilinéaire a satisfaisant

$$|a(w, v)| \leq \|w'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} = |w|_V |v|_V \quad \forall w, v \in V,$$

est continue sur V . De plus, vu que

$$a(v, v) = \|v'\|_2^2 = |v|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

nous déduisons que a est coercive sur V . Finalement, utilisant l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned} |F(v)| = |(f, v)| &\leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(0,1)} |v|_V \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application linéaire F est continue sur V . Le théorème de Lax-Milgram implique alors que le problème variationnel admet une solution unique $u \in V$.

Le problème approché associé, défini sur $V_h = X_h^1 \cap H_0^1(0, 1)$, est donné par

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.12)$$

D'après ce qui précède, ce problème admet une solution unique dans V_h . Sa décomposition dans la base de Lagrange associée est donnée par

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_h(x_i) \phi_i(x).$$

Nous savons aussi que $U_h = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq N}$ est solution du système linéaire

$$A_h U_h = B_h,$$

où la matrice de rigidité A_h est donnée par $A_h = (a(\phi_j, \phi_i))_{1 \leq i, j \leq N}$ et où le second membre est donné par $B_h = ((f, \phi_i))_{1 \leq i \leq N}$.

Théorème 2.1.12. Soit $u \in V$ la solution de (2.11) et soit $u_h \in V_h$ la solution de (2.12). Alors, il existe une constante indépendante de u et de h tel que

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Démonstration. Le résultat est une conséquence directe du Théorème 2.1.8 et du résultat de régularité qui stipule que si $f \in L^2(0,1)$, alors $u \in H^2(0,1)$ et satisfait l'estimation

$$\|u\|_{H^2(0,1)} \leq C \|f\|_{L^2(0,1)},$$

où C est une constante positive indépendante de u . \square

Comme déjà observé, l'intersection des supports de ϕ_i et ϕ_j est souvent vide. Plus précisément, les supports de ϕ_i et ϕ_j sont disjoints quand $|i-j| > 1$, i.e.

$$\text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j = \emptyset \quad \text{si } j \neq i, \quad j \neq i-1, \quad j \neq i+1.$$

Une conséquence directe est que la plupart des éléments de A_h sont nuls, les éléments non nuls correspondant à $(A_h)_{i,i-1}$, $(A_h)_{i,i}$ et $(A_h)_{i,i+1}$. En effet, de la définition des éléments de la base, nous déduisons que

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un calcul simple montre alors que pour $i = 1, \dots, N$, nous avons

$$\begin{aligned} (A_h)_{i,i} &= a(\phi_i, \phi_i) = \int_0^1 (\phi_i'(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\phi_i'(x))^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx = \frac{2}{h}, \end{aligned}$$

et pour $i = 1, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} (A_h)_{i,i+1} &= a(\phi_{i+1}, \phi_i) = \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_{i+1}'(x) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i'(x) \phi_{i+1}'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h^2} dx = -\frac{1}{h}. \end{aligned}$$

La symétrie de A_h entraîne que pour tout $i = 2, \dots, N$

$$(A_h)_{i,i-1} = (A_h)_{i-1,i} = -\frac{1}{h}.$$

La matrice A_h est par conséquent tridiagonale et de la forme

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Afin de déterminer le second membre B_h , on distinguera deux cas :

- Si f a une forme simple, on calcule explicitement l'intégrale du second membre. Par exemple, si $f(x) = e^x$, alors

$$\begin{aligned} (B_h)_i &= \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x) dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{h} (e^{x_{i+1}} - 2e^{x_i} + e^{x_{i-1}}). \end{aligned}$$

- En général, il n'est pas possible de calculer B_h explicitement et on est amené à utiliser des méthodes d'intégration numérique afin de l'approcher. Par exemple, utilisant la règle du trapèze, pour tout $1 \leq i \leq N$, on a

$$\begin{aligned} (B_h)_i &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x) dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) f(x) dx \\ &\approx \frac{x_i - x_{i-1}}{2h} ((x_i - x_{i-1}) f(x_i) + (x_{i-1} - x_{i-1}) f(x_{i-1})) \\ &\quad + \frac{x_{i+1} - x_i}{2h} ((x_{i+1} - x_i) f(x_i) + (x_{i+1} - x_{i+1}) f(x_{i+1})) \\ &= hf(x_i). \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, le système linéaire à résoudre est de la forme

$$\frac{1}{h^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_C U_h = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

Ce système est identique à celui qu'on obtient en utilisant la méthode des différences finies au problème de Poisson (2.10). Nous savons déjà que

$$\kappa_2(C) = O\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

et que la matrice tridiagonale C est donc, a priori, mal conditionnée quand h tend vers zéro (voir proposition 2.1.9). Dans ce cas particulier, il est possible de calculer explicitement le nombre de condition. En effet, il est facile de vérifier que les valeurs propres de la matrice $C = \text{tridiag}(-1, 2, -1)$ sont données par

$$\lambda_i = 2 - 2 \cos(i\pi h), \quad i = 1, \dots, N$$

et que

$$\kappa_2(C) = \frac{\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\min}(C)} = \frac{\lambda_N}{\lambda_1} \rightarrow +\infty \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

2.2 Éléments finis quadratiques

2.2.1 Maillage et fonctions de base

Dans certaines applications, on peut considérer que l'approximation par des éléments de X_h^1 est trop grossière (fournissant une solution approchée u_h trop éloignée de la solution exacte u). On peut alors essayer d'approcher u par des polynômes de plus haut degré.

Soit \mathbb{P}_2 l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Considérons l'espace des fonctions continues et paraboliques par morceaux sur chaque élément, défini par

$$X_h^2 = \left\{ v_h \in C([0, 1]) \text{ tel que } v_h|_{x_{j-1}, x_j[} \in \mathbb{P}_2 \text{ pour tout } j = 1, \dots, N+1 \right\}.$$

Les fonctions de X_h^2 sont définies de manière univoque une fois assignées les valeurs en trois points distincts de $[x_{j-1}, x_j]$. Afin de garantir la continuité de ces fonctions, ces points seront choisis comme étant les extrémités x_{j-1} et x_j du sous-intervalle et le point milieu correspondant. Ceci définit $2N + 3$ points

$$y_j = \frac{j}{2}h \quad j = 0, \dots, 2N + 2.$$

Nous pouvons représenter les fonctions de X_h^2 à l'aide des $2N + 3$ fonctions de base de Lagrange caractérisées par

$$\phi_i(y_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 0, \dots, 2N + 2$$

où δ représente le symbole de Kronecker. Pour $j = 0, \dots, N + 1$, ces fonctions sont alors définies par

$$\phi_{2j}(x) = \begin{cases} \frac{2}{h^2}(x - y_{2j-1})(x - x_{j-1}) & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{2}{h^2}(y_{2j+1} - x)(x_{j+1} - x) & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et pour $j = 0, \dots, N$, par

$$\phi_{2j+1}(x) = \begin{cases} \frac{4}{h^2}(x_{j+1} - x)(x - x_j) & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.2.1. *i) Soit $V_h = X_h^2 \cap H^1(0, 1)$. Alors V_h est un sous-espace de $H^1(0, 1)$ de dimension $2N + 3$ et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie par*

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v_h(y_{2j})\phi_{2j}(x) + \sum_{j=0}^N v_h(y_{2j+1})\phi_{2j+1}(x) = \sum_{j=0}^{2N+2} v_h(y_j)\phi_j(x)$$

pour tout $x \in [0, 1]$.

ii) Soit $V_h = X_h^2 \cap H_0^1(0, 1)$. L'espace V_h est un sous-espace de $H_0^1(0, 1)$ de dimension $2N + 1$ et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie par

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{2N} v_h(y_j)\phi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Démonstration. Reprendre point par point les arguments dans la preuve des propositions 2.1.2 et 2.1.3. \square

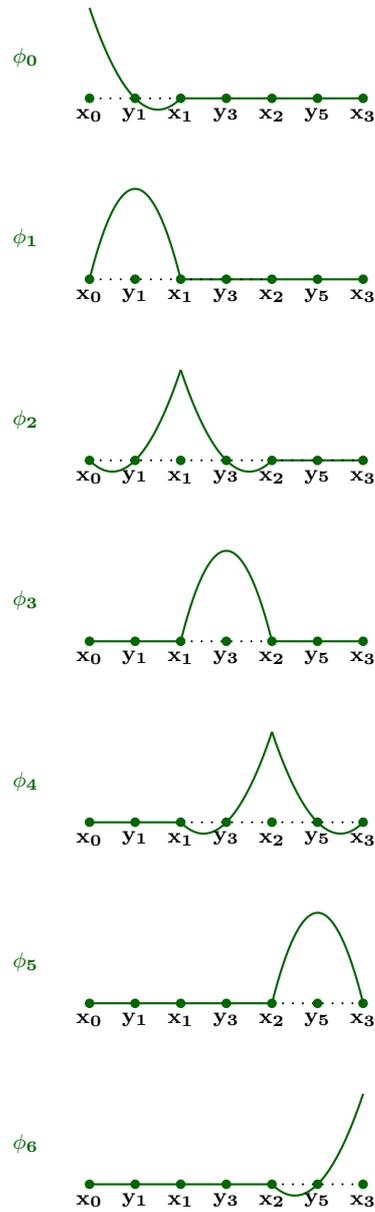


Figure 2.2 - Fonctions de base quadratiques par élément pour $N = 2$

2.2.2 Opérateur d'interpolation et erreur d'interpolation

Définition 2.2.2. On appelle opérateur d'interpolation Π_h^2 , l'application linéaire de $H^1(0, 1)$ dans V_h définie, pour tout $v \in H^1(0, 1)$, par

$$\Pi_h^2 v(x) = \sum_{i=0}^{2N+2} v(y_i) \phi_i(x). \quad (2.13)$$

Lemme 2.2.3. Soit Π_1^2 l'opérateur d'interpolation Π_h^2 correspondant à $h = 1$. Alors, il existe une constante C telle que pour tout $v \in H^3(0, 1)$, on a

$$\left\| (\Pi_1^2 v - v)' \right\|_{L^2(0,1)} \leq C \left\| v^{(3)} \right\|_{L^2(0,1)}.$$

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que notre assertion soit fautive. Il existe alors une suite $v_n \in H^3(0, 1)$ telle que pour tout n ,

$$\left\| (\Pi_1^2 v_n - v_n)' \right\|_{L^2(0,1)} > n \left\| v_n^{(3)} \right\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.14)$$

Observons en premier lieu que pour tout polynôme p de degré 2

$$\Pi_1^2 v_n - v_n = \Pi_1^2 (v_n + p) - (v_n + p) \quad \text{et} \quad v_n^{(3)} = (v_n + p)^{(3)}.$$

Sans perte de généralité, et quitte à modifier v_n par l'ajout d'un tel polynôme, on peut supposer donc que

$$\int_0^1 v_n dx = \int_0^1 v_n' dx = \int_0^1 v_n^{(2)} dx = 0.$$

De plus, quitte à multiplier v_n par une constante, on peut également supposer que

$$1 = \left\| (\Pi_1^2 v_n - v_n)' \right\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.15)$$

L'application successive de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, combinée avec (2.14) et (2.15), donne alors

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{L^2(0,1)} &\leq C_1 \left(\|v_n'\|_{L^2(0,1)} + \left| \int_0^1 v_n dx \right| \right) = C_1 \|v_n'\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq C_1^2 \left(\|v_n^{(2)}\|_{L^2(0,1)} + \left| \int_0^1 v_n' dx \right| \right) = C_1^2 \|v_n^{(2)}\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq C_1^3 \left(\|v_n^{(3)}\|_{L^2(0,1)} + \left| \int_0^1 v_n^{(2)} dx \right| \right) = C_1^3 \|v_n^{(3)}\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \frac{1}{n} \left\| (\Pi_1^2 v_n - v_n)' \right\|_{L^2(0,1)} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(v_n)_n$ est bornée dans $H^3(0,1)$. D'après le théorème de Rellich, il existe une sous-suite (qu'on indexera de la même manière) convergeant fortement vers une limite v dans $H^2(0,1)$. L'opérateur Π_1^2 étant continu dans $H^1(0,1)$, en passant à la limite dans (2.15), nous déduisons que

$$1 = \left\| (\Pi_1^2 v - v)' \right\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.16)$$

De plus,

$$\left\| v^{(3)} \right\|_{L^2(0,1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| v_n^{(3)} \right\|_{L^2(0,1)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{C_1^3 n} = 0$$

impliquant que v est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, et donc

$$\Pi_1^2 v = v.$$

Ceci est en contradiction avec (2.16). \square

Comme nous le verrons ci-dessous, l'estimation de l'erreur d'interpolation est plus précise dans le cas de fonctions suffisamment régulières.

Lemme 2.2.4. *Soit $v \in H^3(0,1)$ et soit $\Pi_h^2 v \in X_h^2$ la fonction d'interpolation définie par (2.13). Alors les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\left\| v - \Pi_h^2 v \right\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^3 \left\| v^{(3)} \right\|_{L^2(0,1)},$$

$$\left\| (v - \Pi_h^2 v)' \right\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \left\| v^{(3)} \right\|_{L^2(0,1)},$$

où C est une constante positive indépendante de h .

Démonstration. Il est facile de voir que $(v - \Pi_h^2 v)(x_j) = 0$ pour chaque noeud $x_j, j = 0, \dots, N$. Pour $x \in (x_j, x_{j+1})$, nous avons alors

$$(v - \Pi_h^2 v)(x) = \int_{x_j}^x (v - \Pi_h^2 v)'(s) ds.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |(v - \Pi_h^2 v)(x)| &\leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |(v - \Pi_h^2 v)'(s)| ds \\ &\leq \|1\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \left\| (v - \Pi_h^2 v)' \right\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \\ &= h^{\frac{1}{2}} \left\| (v - \Pi_h^2 v)' \right\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}, \end{aligned}$$

et en intégrant sur (x_j, x_{j+1}) , il vient que

$$\|v - \Pi_h^2 v\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \leq h \left\| (v - \Pi_h^2 v)' \right\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}.$$

Sommant en j , nous obtenons finalement

$$\|v - \Pi_h^2 v\|_{L^2(0,1)} \leq h \left\| (v - \Pi_h^2 v)' \right\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.17)$$

De l'autre côté, on a

$$\begin{aligned} \left\| (v - \Pi_h^2 v)' \right\|_{L^2(0,1)}^2 &= \sum_{j=0}^N \left\| (v - \Pi_h^2 v)' \right\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}^2 \\ &= \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left| \frac{d}{dx} (v(x_j)\phi_{2j} + v(x_{j+1})\phi_{2j+2} - v(x)) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^N \int_0^1 \left| \frac{d}{ds} (v(x_j)\phi_{2j} + v(x_{j+1})\phi_{2j+2} - v(x_j + hs)) \right|^2 ds. \end{aligned}$$

Observons alors que

$$\begin{cases} \phi_{2j}(x_j + sh) = (1 - 2s)(1 - s) = \phi_0^1(s), \\ \phi_{2j+1}(x_j + sh) = 4(1 - s)s = \phi_1^1(s), \\ \phi_{2j+2}(x_j + sh) = s(2s - 1) = \phi_2^1(s), \end{cases}$$

où $\phi_0^1, \phi_1^1, \phi_2^1$ sont les éléments de la base correspondant à $h = 1$. Il vient que

$$\begin{aligned} &\left\| (v - \Pi_h^2 v)' \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{N+1} \int_0^1 \left| (v_j(0)\phi_0^1(s) + v_j\left(\frac{1}{2}\right)\phi_1^1(s) + v_j(1)\phi_2^1(s) - v_j(s))' \right|^2 ds \\ &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{N+1} \int_0^1 \left| (\Pi_1^2 v_j(s) - v_j(s))' \right|^2 ds, \end{aligned}$$

où $v_j(s) = v(x_j + hs)$ et Π_1^2 est l'opérateur d'interpolation Π_h^2 correspondant à $h = 1$. Prenant en compte le lemme 2.2.3, nous déduisons que

$$\left\| (v - \Pi_h^2 v)' \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{C}{h} \sum_{j=0}^{N+1} \left\| v_j^{(3)} \right\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (2.18)$$

En utilisant à nouveau un changement de variable, nous obtenons

$$\|v_j^{(3)}\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 |h^3 v^{(3)}(x_j + sh)|^2 ds = h^5 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v^{(3)}(x)|^2 dx$$

Le résultat vient en tenant en compte les estimations (2.17) et (2.18). \square

Considérons maintenant le cas où aucune hypothèse de régularité n'est assumée.

Lemme 2.2.5. *Soit $v \in H^1(0,1)$ et soit $\Pi_h^2 v \in X_h^2$ la fonction d'interpolation définie par (2.13). Alors, on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|v - \Pi_h^2 v\|_{H^1(0,1)} = 0.$$

Démonstration. Elle reprend les arguments de densité et de continuité du Lemme 2.1.7 en tenant en compte le lemme 2.2.4 et . \square

2.2.3 Convergence et estimation d'erreur

Théorème 2.2.6. *Soit $u \in V$ la solution de (2.1) et soit $u_h \in V_h$ la solution de (2.7) avec $V_h = X_2^h \cap V$. Alors, la méthode des éléments finis converge, i.e.*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|u - u_h\|_V = 0.$$

De plus, si $u \in H^3(0,1)$, alors il existe une constante indépendante de u et de h tel que

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^2 \|u^{(3)}\|_{L^2(0,1)}.$$

Démonstration. Il est clair que $\Pi_h^2 u \in V_h$. En utilisant le lemme de Céa, il vient que

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^2 u\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^2 u\|_{H^1(0,1)}.$$

Les deux assertions sont une conséquence du lemme 2.2.5 et du lemme 2.2.4, respectivement. \square

2.2.4 Application à l'approximation du problème de Poisson

Nous nous intéressons à l'approximation par des éléments finis quadratiques du problème de Poisson (2.10). Le problème approché associé (2.12)

est défini sur $V_h = X_h^2 \cap H_0^1(0, 1)$. D'après ce qui précède, ce problème admet une solution unique dans V_h . Sa décomposition dans la base de Lagrange associée est donnée par

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{2N+1} u_h(y_i) \phi_i(x).$$

Nous savons aussi que $U_h = (u_h(y_j))_{1 \leq j \leq 2N+1}$ est solution du système linéaire

$$A_h U_h = B_h,$$

où la matrice de rigidité A_h est donnée par $A_h = (a(\phi_j, \phi_i))_{1 \leq i, j \leq 2N+1}$ et où le second membre est donné par $B_h = ((f, \phi_i))_{1 \leq i \leq 2N+1}$.

Théorème 2.2.7. *Soit $u \in V$ la solution de (2.11) et soit $u_h \in V_h = X_h^2 \cap H_0^1(0, 1)$ la solution de (2.12). Alors,*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|u - u_h\|_V = 0.$$

De plus, si $f \in H^1(0, 1)$ alors il existe une constante indépendante de u et de h tel que

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^2 \|f\|_{H^1(0,1)}.$$

Démonstration. Le résultat est une conséquence directe du théorème 2.2.6 et du résultat de régularité qui stipule que si $f \in H^1(0, 1)$, alors $u \in H^3(0, 1)$ et satisfait l'estimation suivante

$$\|u\|_{H^3(0,1)} \leq C \|f\|_{H^1(0,1)},$$

où C est une constante positive indépendante de u . □

Dans le cas de X_h^2 , l'intersection des supports de ϕ_i et ϕ_j est souvent vide. Plus précisément, les supports de ϕ_i et ϕ_j sont disjoints quand $|i - j| > 2$, i.e.

$$\text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j = \emptyset \quad \text{si} \quad \begin{cases} j \neq i - 2, \\ j \neq i - 1, \\ j \neq i, \\ j \neq i + 1, \\ j \neq i + 2. \end{cases}$$

Une conséquence directe est que les coefficients non nuls de A_h correspondent aux éléments $(A_h)_{i,i-2}$, $(A_h)_{i,i-1}$, $(A_h)_{i,i}$, $(A_h)_{i,i+1}$ et $(A_h)_{i,i+2}$. De la définition des éléments de la base, nous avons en effet

$$\phi'_{2i}(x) = \begin{cases} \frac{4}{h^2} (x - x_i + \frac{3h}{4}) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{4}{h^2} (x - x_{i+1} + \frac{h}{4}) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\phi'_{2i+1}(x) = \begin{cases} -\frac{8}{h^2} (x - x_{i+1} + \frac{h}{2}) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un calcul simple montre alors que pour $i = 0, \dots, N$, on a

$$\begin{aligned} (A_h)_{2i+1,2i+1} &= a(\phi_{2i+1}, \phi_{2i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi'_{2i+1}(x))^2 dx \\ &= \frac{64}{h^4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1} + \frac{h}{2})^2 dx = \frac{16}{3h}. \end{aligned}$$

Pour $i = 0, \dots, N-1$, on a

$$\begin{aligned} (A_h)_{2i+1,2i+2} &= a(\phi_{2i+1}, \phi_{2i+2}) = \int_0^1 \phi'_{2i+1}(x) \phi'_{2i+2}(x) dx \\ &= -\frac{32}{h^4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1} + \frac{h}{2}) (x - x_{i+1} + \frac{3h}{4}) dx = -\frac{8}{3h}. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, \dots, N$, on a

$$\begin{aligned} (A_h)_{2i,2i} &= a(\phi_{2i}, \phi_{2i}) = \int_0^1 (\phi'_{2i}(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\phi'_{2i}(x))^2 dx \\ &= \frac{16}{h^4} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i + \frac{3h}{4})^2 dx + \frac{16}{h^4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1} + \frac{h}{4})^2 dx = \frac{14}{3h}. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, \dots, N-1$, on a

$$\begin{aligned} (A_h)_{2i,2i+2} &= a(\phi_{2i}, \phi_{2i+2}) = \int_0^1 \phi'_{2i}(x) \phi'_{2i+2}(x) dx \\ &= \frac{16}{h^4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1} + \frac{h}{4}) (x - x_{i+1} + \frac{3h}{4}) dx = \frac{1}{3h}. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Méthode des éléments finis en dimension 2

Dans ce chapitre, nous considérons des éléments finis linéaires dans le cas bidimensionnel. Comme précédemment, nous définissons une triangulation du domaine, des fonctions de base globales et établissons le lien de ces dernières avec les coordonnées barycentriques définies localement. Nous introduisons ensuite l'opérateur d'interpolation associé, estimons l'erreur d'interpolation correspondante et analysons la convergence de la méthode. Les résultats ainsi obtenus sont ensuite appliqués à un problème aux limites de type Poisson. Des remarques finales concernant l'assemblage de la matrice de rigidité sont aussi présentées.

3.1 Éléments finis linéaires dans le cas bidimensionnel

3.1.1 Triangulation

Dans la méthode des éléments finis, la construction du sous-espace discret nécessite la discrétisation préalable du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en éléments géométriques simples. Contrairement au cas d'un intervalle de \mathbb{R} , la discrétisation d'un domaine de \mathbb{R}^2 est un problème technique difficile et la qualité de ce maillage est essentielle pour la qualité de l'approximation.

Soit donc Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et considérons un maillage de $\overline{\Omega}$ formé par des triangles K vérifiant les critères suivants :

1. Les éléments $K \subset \overline{\Omega}$ du maillage doivent recouvrir le domaine, i.e.

leur union est égale à $\bar{\Omega}$.

2. L'intersection de deux éléments distincts doit satisfaire :

$$K \cap K' = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{un sommet,} \\ \text{un côté.} \end{cases}$$

Le premier critère implique que Ω est polygonal ou est approché par un polygone. Le second critère a pour but d'assurer la continuité des fonctions de l'espace discret.



Figure 3.1 - Situations interdites



Figure 3.2 - Situations permises

Dans toute la suite, on supposera que Ω est polygonal. Nous noterons N_h le nombre total de sommets et $(S_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ l'ensemble des sommets des triangles (encore appelés *les noeuds* du maillage). Nous noterons

$$h_K = \text{diam}(K) = \sup_{x, y \in K} \|x - y\|$$

et définissons le *pas du maillage* par

$$h = \max_K h_K$$

Nous désignons par \mathcal{T}_h l'ensemble de tous ces éléments; \mathcal{T}_h s'appelle un *maillage triangulaire* ou *une triangulation* de $\bar{\Omega}$.

3.1.2 Éléments finis linéaires

Dans ce cas, X_h^1 est l'espace des fonctions continues, affines par éléments triangulaires, i.e.

$$X_h^1 = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) \mid v_h|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Théorème 3.1.1. *Soit $V_h = X_h^1$. Alors V_h est un sous-espace de $H^1(\Omega)$.*

Démonstration. Tout élément v_h de X_h^1 appartient à $C(\overline{\Omega}) \cap H^1(K)$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$. D'après le théorème de recollement de Sobolev, il vient que $v_h \in H^1(\Omega)$ et donc $X_h^1 \subset H^1(\Omega)$. \square

Proposition 3.1.2. *Les fonctions de V_h sont entièrement déterminées par leurs valeurs aux sommets S_i^K , $K \in \mathcal{T}_h$.*

Démonstration. Soit $K \in \mathcal{T}_h$ un triangle de sommets $S_i^K = (x_i^K, y_i^K)$, $1 \leq i \leq 3$. La restriction à K d'une fonction $v_h \in V_h$ s'écrit

$$v_h|_K(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Connaissant les valeurs de v_h aux sommets S_1^K, S_2^K, S_3^K , nous déduisons que les coefficients α, β, γ sont solutions du système

$$\begin{cases} \alpha + \beta x_1^K + \gamma y_1^K = v_h(S_1^K), \\ \alpha + \beta x_2^K + \gamma y_2^K = v_h(S_2^K), \\ \alpha + \beta x_3^K + \gamma y_3^K = v_h(S_3^K). \end{cases}$$

Le déterminant de ce dernier est donné par

$$D_K = \begin{vmatrix} 1 & x_1^K & y_1^K \\ 1 & x_2^K & y_2^K \\ 1 & x_3^K & y_3^K \end{vmatrix} = \overrightarrow{S_1^K S_2^K} \wedge \overrightarrow{S_1^K S_3^K} = \pm 2|K| \neq 0,$$

où $|K|$ est l'aire de K . Les coefficients sont alors déterminés de manière unique sur chaque triangle K et la restriction $v_h|_K$ est parfaitement déterminée et est continue. Pour montrer que v_h est continue sur $\overline{\Omega}$, il suffit de montrer que le raccord entre deux triangles K et K' est continu. Soit alors (AB) un côté commun entre les deux triangles et soient $v = v_h|_K$ et $v' = v_h|_{K'}$. On a

$$(v - v')(A) = (v - v')(B) = 0.$$

Soit $M \in [A, B]$. Il existe alors $\lambda \in [0, 1]$ tel que $M = \lambda A + (1 - \lambda)B$. Ainsi

$$\begin{aligned} (v - v')(M) &= (v - v')(\lambda A + (1 - \lambda)B) \\ &= \lambda(v - v')(A) + (1 - \lambda)(v - v')(B) = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre la continuité de v_h sur $\bar{\Omega}$. □

3.1.3 Fonctions de base globales

La construction d'une base de V_h se fait selon la technique classique des bases de Lagrange.

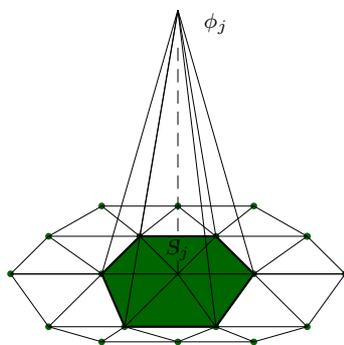


Figure 3.3 - La fonction de base ϕ_j de l'espace X_h^1 et son support

Proposition 3.1.3. V_h est un espace vectoriel de dimension N_h dont une base est donnée par les fonctions $\phi_i \in V_h$, $i = 1, \dots, N_h$ telles que

$$\phi_i(S_j) = \delta_{ij} \quad \forall 1 \leq i, j \leq N_h.$$

Démonstration. Par définition, nous avons que $\phi_i \in V_h$. Montrons que $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ est une famille libre. En effet,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \phi_i(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \\ \implies &\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \phi_i(S_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_h \\ \implies &\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_h. \end{aligned}$$

De l'autre côté, remarquons que tout $v_h \in V_h$ est égal à $w_h = \sum_{i=1}^{N_h} v_h(S_i)\phi_i$ en chaque noeud S_i . D'après la Proposition 3.1.2, il vient que

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_h} v_h(S_i)\phi_i \quad \text{dans } \bar{\Omega}.$$

Ceci montre que $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ est une famille génératrice. C'est donc une base de V_h et $\dim V_h = N_h$. \square

Une conséquence directe est donnée par le résultat suivant.

Proposition 3.1.4. *Tout $v_h \in V_h$ s'écrit sous la forme*

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_h} v_h(S_i)\phi_i.$$

Proposition 3.1.5. *Le support de ϕ_i est réduit à l'union des triangles dont le point S_i est un sommet, i.e.*

$$\text{supp } \phi_i = \bigcup_{S_i \in K} K.$$

Démonstration. Soit K tel que $S_i \notin K$ (i.e. que S_i n'est pas un sommet de K). Il vient que ϕ_i est nulle sur les trois sommets de K et donc $\phi_i|_K = 0$ (la seule fonction affine sur un triangle, nulle aux sommets est la fonction nulle). Par conséquent $K \cap \text{supp } \phi_i = \emptyset$. \square

3.1.4 Fonctions de base sur un triangle quelconque

Nous avons déjà vu que si $v_h \in V_h$, alors sa restriction à un triangle K de sommets $(S_i^K)_{1 \leq i \leq 3}$ s'écrit sous la forme

$$v_h|_K(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y, \quad (3.1)$$

où α, β, γ sont des constantes définies de manière unique (voir la preuve de la proposition 3.1.2). Il faut savoir qu'en pratique, on n'utilise pas (3.1), mais plutôt l'expression utilisant les coordonnées barycentriques.

Définition 3.1.6. *Les coordonnées barycentriques d'un point $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ par rapport au triangle K de sommets $S_i^K, 1 \leq i \leq 3$, sont les nombres réels $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K$ tels que*

$$\begin{cases} \lambda_1^K S_1^K + \lambda_2^K S_2^K + \lambda_3^K S_3^K = M, \\ \lambda_1^K + \lambda_2^K + \lambda_3^K = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Il est clair que le système (3.2) s'écrit de manière équivalente

$$\begin{cases} \lambda_1^K + \lambda_2^K + \lambda_3^K = 1 \\ \lambda_1^K x_1^K + \lambda_2^K x_2^K + \lambda_3^K x_3^K = x, \\ \lambda_1^K y_1^K + \lambda_2^K y_2^K + \lambda_3^K y_3^K = y, \end{cases}$$

et qu'il admet une solution unique. En effet, son déterminant est donné par

$$D_K = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1^K & x_2^K & x_3^K \\ y_1^K & y_2^K & y_3^K \end{vmatrix} = \pm 2|K| \neq 0.$$

Les formules de Cramer donnent alors

$$\begin{aligned} \lambda_1^K &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2^K & x_3^K \\ y & y_2^K & y_3^K \end{vmatrix}}{D_K}, \\ \lambda_2^K &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^K & x & x_3^K \\ y_1^K & y & y_3^K \end{vmatrix}}{D_K}, \\ \lambda_3^K &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^K & x_2^K & x \\ y_1^K & y_2^K & y \end{vmatrix}}{D_K}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nous avons alors les propriétés suivantes.

Proposition 3.1.7. *Soit K un triangle de sommets S_1^K, S_2^K, S_3^K , soit $M=(x, y)$ un point du plan et $(\lambda_i^K)_{1 \leq i \leq 3}$ les coordonnées barycentriques de M relativement à K . On a alors :*

- i) $\lambda_i^K(S_j^K) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3.$
- ii) λ_i^K est une fonction affine des coordonnées cartésiennes x, y , et les coordonnées cartésiennes sont des fonctions affines des coordonnées barycentriques.
- iii) $M \in K \iff 0 \leq \lambda_i^K(M) \leq 1$ pour $i = 1, 2, 3.$

Démonstration. Les assertions i) et ii) s'obtiennent facilement en prenant en compte les expressions de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ obtenues précédemment. L'assertion iii) suit en remarquant que

$$\lambda_1^K = \frac{|K_1|}{|K|}, \quad \lambda_2^K = \frac{|K_2|}{|K|}, \quad \lambda_3^K = \frac{|K_3|}{|K|},$$

où $K_1 \subset K$ est le triangle de sommets (M, S_2^K, S_3^K) , $K_2 \subset K$ est le triangle de sommets (M, S_1^K, S_3^K) et $K_3 \subset K$ est le triangle de sommets (M, S_1^K, S_2^K) (voir figure 3.4). \square

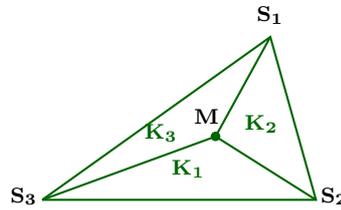


Figure 3.4 - Interprétation des coordonnées barycentriques en termes de rapports d'aires

Remarque 3.1.8. D'un point de vue pratique, l'introduction des coordonnées barycentriques nous permet de vérifier si un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est dans le triangle K (en utilisant la propriété iii)).

Le résultat suivant établit une liaison directe, sur un triangle K , entre les fonctions de base de X_h^1 et les coordonnées barycentriques correspondantes.

Proposition 3.1.9. Soit K un triangle de sommets S_1^K, S_2^K, S_3^K . On a

$$\phi_{i|K}(x, y) = \lambda_i^K(x, y) \quad \forall (x, y) \in K, \quad \forall i = 1, 2, 3,$$

où $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K$ sont les coordonnées barycentriques correspondantes relativement à K .

Démonstration. Montrons d'abord que si $\psi \in \mathbb{P}_1(K)$, alors ψ est donné par l'expression

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^K(x, y) \psi(S_i^K). \quad (3.4)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 \psi(x, y) &= \psi \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^K(x, y) S_i^K \right) \\
 &= \alpha + \beta \sum_{i=1}^3 \lambda_i^K(x, y) x_i^K + \gamma \sum_{i=1}^3 \lambda_i^K(x, y) y_i^K \\
 &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i^K(x, y) (\alpha + \beta x_i^K + \gamma y_i^K) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^K(x, y) \psi(S_i^K).
 \end{aligned}$$

La conclusion vient de (3.4) et du fait que $\phi_{i|K}(S_j^K) = \delta_{ij}$. \square

3.1.5 Élément de référence

Afin d'estimer l'erreur d'approximation, nous allons suivre les mêmes étapes que dans la cas unidimensionnel. La première consistant dans l'établissement d'estimations adéquates pour les erreurs d'interpolation. Afin d'atteindre cet objectif, nous allons obtenir certaines informations utiles faisant intervenir les paramètres géométriques de chaque triangle. De plus, nous allons exploiter les propriétés de l'application affine (et bijective) $F_K : T \mapsto K$ associant à chaque rectangle K , le triangle de référence T . Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

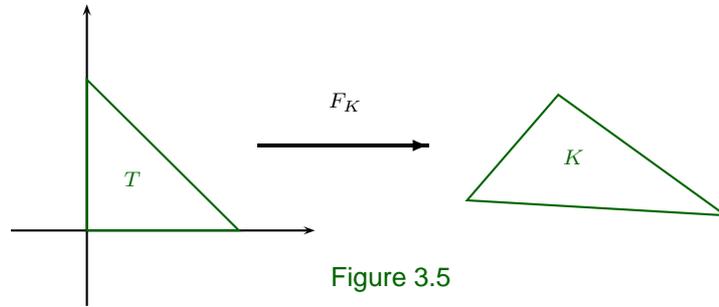


Figure 3.5

Proposition 3.1.10. Soit T le triangle de sommets $S_1 = (0, 0)$, $S_2 = (1, 0)$ et $S_3 = (0, 1)$ et soit K un triangle quelconque de \mathcal{T}_h de sommets $S_i^K = (x_i^K, y_i^K)$, $1 \leq i \leq 3$. Alors l'application F_K définie par

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2^K - x_1^K & x_3^K - x_1^K \\ y_2^K - y_1^K & y_3^K - y_1^K \end{pmatrix}}_{B_K} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^K \\ y_1^K \end{pmatrix}}_{C_K}$$

envoie le triangle T sur K . De plus, F_K est bijective et la fonction inverse est donnée par

$$F_K^{-1}(x, y) = B_K^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - B_K^{-1} C_K \quad (3.5)$$

où

$$B_K^{-1} = \frac{1}{2|K|} \begin{pmatrix} y_3^K - y_1^K & x_1^K - x_3^K \\ y_1^K - y_2^K & x_2^K - x_1^K \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Remarquons que pour $\hat{x}, \hat{y} \in [0, 1]$, on a

$$F_K(0, \hat{y}) = \hat{y} S_3^K + (1 - \hat{y}) S_1^K,$$

$$F_K(\hat{x}, 0) = \hat{x} S_2^K + (1 - \hat{x}) S_1^K,$$

$$F_K(\hat{x}, 1 - \hat{x}) = \hat{x} S_2^K + (1 - \hat{x}) S_3^K,$$

ce qui montre que F_K envoie T sur K . Soit $(x, y) \in K$ et cherchons $(\hat{x}, \hat{y}) \in T$ tel que $F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y)$. Ceci revient à résoudre un système dont le déterminant est égal à

$$\det B_K = \pm 2|K| \neq 0.$$

F_K est donc bijective. La fonction inverse est donnée par (3.5) avec

$$B_K^{-1} = \frac{1}{\det(B_K)} \begin{pmatrix} y_3^K - y_1^K & x_1^K - x_3^K \\ y_1^K - y_2^K & x_2^K - x_1^K \end{pmatrix}.$$

Finalement, observons que pour toute fonction $\psi_K = \psi \circ F_K^{-1}$ continue sur K , on a

$$\int_K \psi_K(x, y) dx dy = \det(B_K) \int_T \psi(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y}.$$

En faisant $\psi = 1$, on obtient

$$\int_K dx dy = \det(B_K) \int_T d\hat{x} d\hat{y}$$

et donc

$$\det(B_K) = \frac{|K|}{|T|} = 2|K|.$$

Ceci termine la preuve. \square

De ce qui précède, il vient qu'à une fonction \hat{v} définie sur T (resp. une fonction v définie sur K), on associe la fonction v définie sur K (resp. la fonction \hat{v} définie sur T) par

$$v = \hat{v} \circ F_K^{-1} \quad (\text{resp. } \hat{v} = v \circ F_K).$$

Proposition 3.1.11. Soit $\phi_{i|K}$ ($1 \leq i \leq 3$) la restriction à K de la fonction de base associée au sommet S_i^K du triangle K . Alors

$$\phi_{i|K} \circ F_K = \hat{\phi}_i$$

où $\hat{\phi}_i$ est la restriction sur T de la fonction de base associée au sommet S_i du triangle de référence T .

Démonstration. Pour $1 \leq i \leq 3$, la fonction $\phi_{i|K} \circ F_K$ est continue sur T (comme composée de deux fonctions continues) et la fonction $\phi_{i|K}$ s'écrit sur K sous la forme

$$\phi_{i|K}(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Il vient que pour $(\hat{x}, \hat{y}) \in T$, on a

$$\begin{aligned} \phi_{i|K} \circ F_K(\hat{x}, \hat{y}) &= \phi_{i|K}(F_K(\hat{x}, \hat{y})) \\ &= \alpha((B_K)_{11}\hat{x} + (B_K)_{12}\hat{y} + (C_K)_1) + \beta((B_K)_{21}\hat{x} + (B_K)_{22}\hat{y} + (C_K)_2) + \gamma \\ &= \hat{\alpha}\hat{x} + \hat{\beta}\hat{y} + \hat{\gamma} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \alpha(B_K)_{11} + \beta(B_K)_{21}, & \hat{\beta} &= \alpha(B_K)_{12} + \beta(B_K)_{22}, \\ \hat{\gamma} &= \alpha(C_K)_1 + \beta(C_K)_2 + \gamma. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\phi_{i|K} \circ F_K \in \mathbb{P}_1(T)$. Finalement, comme pour tout $i, j = 1, 2, 3$, on a

$$\phi_{i|K} \circ F_K(S_j) = \phi_{i|K}(F_K(S_j)) = \phi_{i|K}(S_j^K) = \delta_{i,j} = \hat{\phi}_i(S_j)$$

il vient que

$$\phi_{i|K} \circ F_K = \hat{\phi}_i$$

et la preuve est complète. \square

Proposition 3.1.12. Les fonctions de base sur le triangle de référence T sont données par

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y} = \hat{\lambda}_1(\hat{x}, \hat{y}), \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x} = \hat{\lambda}_2(\hat{x}, \hat{y}), \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y} = \hat{\lambda}_3(\hat{x}, \hat{y}) \end{aligned}$$

où $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ sont les coordonnées barycentriques du point (x, y) relativement au triangle T .

Démonstration. Grâce à la proposition 3.1.9, nous savons que l'on a sur T

$$\widehat{\phi}_1 = \widehat{\lambda}_1, \quad \widehat{\phi}_2 = \widehat{\lambda}_2, \quad \widehat{\phi}_3 = \widehat{\lambda}_3.$$

De l'autre côté, grâce à (3.3), on a

$$\widehat{\lambda}_1(\widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{1}{2|T|} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \widehat{x} & 1 & 0 \\ \widehat{y} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \widehat{x} - \widehat{y},$$

$$\widehat{\lambda}_2(\widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{1}{2|T|} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \widehat{x} & 0 \\ 0 & \widehat{y} & 1 \end{vmatrix} = \widehat{x},$$

$$\widehat{\lambda}_3(\widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{1}{2|T|} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \widehat{x} \\ 0 & 0 & \widehat{y} \end{vmatrix} = \widehat{y}.$$

Ceci termine la preuve. \square

3.1.6 Opérateurs d'interpolation

L'identification des fonctions de base permet de définir un opérateur d'interpolation, i.e. un opérateur défini sur l'espace des fonctions continues et à valeurs dans X_1^h . Pour tout $v \in C(\overline{\Omega})$, nous posons

$$\Pi_h^1(v) = \sum_{i=1}^{N_h} v(S_i) \phi_i,$$

où S_i sont les noeuds sur $\overline{\Omega}$ et ϕ_i les éléments de la base de Lagrange correspondante. De manière analogue, nous pouvons définir un *opérateur d'interpolation local*, i.e. un opérateur agissant sur des fonctions définies sur un triangle K et définissant un polynôme dans \mathbb{P}_1 . Si S_i^K ($1 \leq i \leq 3$) sont les sommets de K , alors nous posons

$$\Pi_K^1(v) = \sum_{i=1}^3 v(S_i^K) \phi_{i|K} \quad \forall v \in C(K).$$

Nous pouvons alors vérifier que

$$\Pi_h^1(v)|_K = \Pi_K^1(v|_K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, v \in C(\overline{\Omega}). \quad (3.6)$$

Lemme 3.1.13 (Lemme de Bramble-Hilbert). *L'opérateur d'interpolation Π_K^1 est linéaire et continu de $H^2(K)$ dans $H^2(K)$ et il existe une constante positive $C(K)$ tel que pour tout $v \in H^2(K)$ on a*

$$\|v - \Pi_K^1 v\|_{H^2(K)} \leq C(K) |v|_{H^2(K)},$$

où $|\cdot|_{H^2(K)}$ est la semi-norme définie par

$$|v|_{H^2(K)} = \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Soit $v \in H^2(K)$. Alors

$$\begin{aligned} \|\Pi_K^1 v\|_{H^2(K)} &= \left\| \sum_{i=1}^3 v(S_i^K) \phi_{i|K} \right\|_{H^2(K)} \leq \sum_{i=1}^3 |v(S_i^K)| \|\phi_{i|K}\|_{H^2(K)} \\ &\leq \|v\|_{C(K)} \sum_{i=1}^3 \|\phi_{i|K}\|_{H^2(K)} \leq C \|v\|_{H^2(K)} \sum_{i=1}^3 \|\phi_{i|K}\|_{H^2(K)} \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème d'injection de Sobolev. Ceci montre que Π_K^1 est continu de $H^2(K)$ dans $H^2(K)$. La suite de la preuve est divisée en deux étapes.

Étape 1. Montrons qu'il existe une constante $C(K) > 0$ tel que pour tout $v \in H^2(K)$ on a

$$\|v\|_{H^2(K)} \leq C(K) \left(|v|_{H^2(K)} + \|\Pi_K^1 v\|_{H^2(K)} \right). \quad (3.7)$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $w_n \in H^2(K)$ tel que

$$\|w_n\|_{H^2(K)} > n \left(|w_n|_{H^2(K)} + \|\Pi_K^1 w_n\|_{H^2(K)} \right).$$

Posons $v_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_{H^2(K)}}$. Il vient que $\|v_n\|_{H^2(K)} = 1$ et comme Π_K^1 est linéaire, on a

$$1 = \|v_n\|_{H^2(K)} > n \left(|v_n|_{H^2(K)} + \|\Pi_K^1 v_n\|_{H^2(K)} \right)$$

et donc

$$|v_n|_{H^2(K)} + \|\Pi_K^1 v_n\|_{H^2(K)} < \frac{1}{n}. \quad (3.8)$$

La suite $(v_n)_n$ est bornée dans $H^2(K)$. Donc, d'après le théorème de Rellich, il existe une sous-suite, encore indexée par n , qui converge dans $H^1(K)$. De plus, comme $|v_n|_{H^2(K)} < \frac{1}{n}$, il vient que $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $H^2(K)$. Cet espace étant complet, on déduit que $(v_n)_n$ converge vers une limite v dans $H^2(K)$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{H^2(K)} = |v|_{H^2(K)} = 0.$$

Le triangle K étant connexe, on a alors que $v \in \mathbb{P}_1(K)$. De l'autre côté, utilisant (3.8) et le fait que l'opérateur Π_K^1 est continu de $H^2(K)$ dans $H^2(K)$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi_K^1 v_n = \Pi_K^1 v \quad \text{dans } H^2(K)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Pi_K^1 v_n\|_{H^2(K)} = \|\Pi_K^1 v\|_{H^2(K)} = 0.$$

Autrement dit $\Pi_K^1 v = 0$. Vu que $v \in \mathbb{P}_1(K)$, nous déduisons que $v = \Pi_K^1 v = 0$. Ceci est en contradiction avec le fait que $\|v\|_{H^2(K)} = 1$.

Étape 2. L'inégalité (3.7) étant valable pour tout $v \in H^2(K)$ est valable pour $v - \Pi_K^1 v$. On obtient alors

$$\|v - \Pi_K^1 v\|_{H^2(K)} \leq C(K) \left(|v - \Pi_K^1 v|_{H^2(K)} + \|\Pi_K^1 (v - \Pi_K^1 v)\|_{H^2(K)} \right).$$

Or, vu que $\Pi_K^1 v \in \mathbb{P}_1(K)$, on a

$$\begin{aligned} |v - \Pi_K^1 v|_{H^2(K)}^2 &= \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha (v - \Pi_K^1 v)\|_{L^2(K)}^2 \\ &= \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L^2(K)}^2 = |v|_{H^2(K)}^2. \end{aligned}$$

D'autre part, utilisant la linéarité de Π_K^1 , il vient que

$$\Pi_K^1 (v - \Pi_K^1 v) = \Pi_K^1 v - \Pi_K^1 v = 0.$$

Ceci complète la preuve. □

Lemme 3.1.14. On a

$$\widehat{\Pi_K^1 v} = \Pi_T^1 \widehat{v}.$$

Démonstration. Soit v une fonction continue sur K . Alors

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi_K^1 v} &= \Pi_K^1 v \circ F_K \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(v(S_i^K) \phi_{i|K} \right) \circ F_K = \sum_{i=1}^3 v(S_i^K) \left(\phi_{i|K} \circ F_K \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 v(S_i^K) \widehat{\phi}_i = \sum_{i=1}^3 (v \circ F_K)(S_i) \widehat{\phi}_i \\ &= \Pi_T^1 (v \circ F_K) = \Pi_T^1 \widehat{v}.\end{aligned}$$

Lemme 3.1.15. *Il existe une constante positive indépendante de K telle que pour tout $v \in H^m(K)$, $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$|\widehat{v}|_{H^m(T)} \leq C \|B_K\|^m |\det(B_K)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{H^m(K)}$$

et

$$|v|_{H^m(K)} \leq C \|B_K^{-1}\|^m |\det(B_K)|^{\frac{1}{2}} |\widehat{v}|_{H^m(K)}.$$

Démonstration. La formule de changement de variables, pour les fonctions à plusieurs variables réelles, donne

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial \widehat{x}_i} = \sum_{j=1}^2 (B_K)_{ji} \frac{\partial v}{\partial x_j} \circ F_K.$$

Par itération, on peut montrer que pour $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2\}$ on a

$$\frac{\partial^m \widehat{v}}{\partial \widehat{x}_{i_1} \dots \partial \widehat{x}_{i_m}} = \sum_{j_1=1}^2 \dots \sum_{j_m=1}^2 (B_K)_{j_1 i_1} \dots (B_K)_{j_m i_m} \frac{\partial^m v}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \circ F_K.$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\partial^m \widehat{v}}{\partial \widehat{x}_{i_1} \dots \partial \widehat{x}_{i_m}} \right| \leq \|B_K\|^m \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v \circ F_K|$$

et par conséquent

$$|\widehat{v}|_{H^m(T)}^2 \leq C \|B_K\|^{2m} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v \circ F_K\|_{L^2(T)}^2,$$

où C ne dépend que de m . Par le changement de variables $(x, y) = F_K(\hat{x}, \hat{y})$ dans le second membre de l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{H^m(T)}^2 &\leq C \|B_K\|^{2m} \sum_{|\alpha|=m} \int_K |D^\alpha v(x, y)|^2 |\det(B_K^{-1})| \, dx dy \\ &= C \|B_K\|^{2m} |\det(B_K^{-1})| \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^2(K)}^2. \end{aligned}$$

Ceci montre la première inégalité. La preuve de la seconde inégalité est identique et s'obtient en inversant le rôle de (x, y) et (\hat{x}, \hat{y}) . \square

À ce stade, nous avons besoin d'estimer $\|B_K\|$ et $\|B_K^{-1}\|$. Pour ce faire, nous rappelons que le diamètre d'un triangle K est

$$h_K = \text{diam}(K) = \max_{x, y \in K} \|x - y\|.$$

Nous définissons aussi la rondeur ρ_K d'un triangle K comme étant le diamètre de la plus grande boule contenue dans K , i.e.

$$\rho_K = \max_{B_r \subset K} (2r).$$

On a toujours

$$\frac{h_K}{\rho_K} > 1.$$

Ce rapport est d'autant plus grand que K est aplati.

Lemme 3.1.16.

$$\|B_K\| \leq \frac{h_K}{\rho_T}, \quad \|B_K^{-1}\| \leq \frac{h_T}{\rho_K}.$$

Démonstration. On a

$$\|B_K\| = \sup_{\|\zeta\|=1} \|B_K \zeta\| = \frac{1}{\rho_T} \sup_{\|\zeta\|=\rho_T} \|B_K \zeta\|.$$

Soit $\zeta \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|\zeta\| = \rho_T$. Il existe $\zeta_1, \zeta_2 \in T$ tel que $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$. Donc

$$B_K \zeta = B_K(\zeta_1 - \zeta_2) = F_K(\zeta_1 - \zeta_2) = F_K(\zeta_1) - F_K(\zeta_2).$$

Or $F_K(\zeta_1), F_K(\zeta_2) \in K$. Par conséquent,

$$\|B_K \zeta\| \leq \|F_K(\zeta_1) - F_K(\zeta_2)\| \leq h_K \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|\zeta\| = \rho_T.$$

Donc

$$\sup_{\|\zeta\|=\rho_T} \|B_K \zeta\| \leq h_K$$

et $\|B_K\| \leq \frac{h_K}{\rho_T}$. La seconde inégalité peut-être démontrée de la même manière. \square

Lemme 3.1.17. *On suppose que $h_K \leq 1$. Il existe une constante positive C , indépendante de K , tel que pour tout $v \in H^2(K)$*

$$\|v - \Pi_K^1 v\|_{H^1(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)}.$$

Démonstration. Soit $v \in H^2(K)$. D'après le lemme 3.1.15, on a

$$\|v - \Pi_K^1 v\|_{L^2(K)} \leq C |\det(B_K)|^{\frac{1}{2}} \left\| \widehat{v - \Pi_K^1 v} \right\|_{L^2(T)}.$$

De l'autre côté, le lemme 3.1.14 donne

$$\begin{aligned} \widehat{v - \Pi_K^1 v} &= (v - \Pi_K^1 v) \circ F_K = v \circ F_K - (\Pi_K^1 v) \circ F_K \\ &= \widehat{v} - \widehat{\Pi_K^1 v} = \widehat{v} - \Pi_T^1 \widehat{v}. \end{aligned}$$

Utilisant les lemmes 3.1.13, 3.1.15 et 3.1.16 on obtient alors

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_K^1 v\|_{L^2(K)} &\leq C |\det(B_K)|^{\frac{1}{2}} \|\widehat{v} - \Pi_T^1 \widehat{v}\|_{L^2(T)} \\ &\leq C |\det(B_K)|^{\frac{1}{2}} \|\widehat{v} - \Pi_T^1 \widehat{v}\|_{H^2(T)} \\ &\leq C |\det(B_K)|^{\frac{1}{2}} C(T) |\widehat{v}|_{H^2(T)} \\ &\leq C |\det(B_K)|^{\frac{1}{2}} C(T) \|B_K\|^2 |\det(B_K)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{H^2(K)} \\ &\leq C(T) \frac{h_K^2}{\rho_K} \frac{\rho_K}{\rho_T^2} |v|_{H^2(K)}. \end{aligned}$$

On sait que

$$\rho_K \leq h_K \leq 1$$

et donc

$$\|v - \Pi_K^1 v\|_{L^2(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)}.$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned} |v - \Pi_K^1 v|_{H^1(K)} &\leq C \|B_K^{-1}\| |\det(B_K)|^{\frac{1}{2}} |\widehat{v} - \Pi_T^1 \widehat{v}|_{H^1(T)} \\ &\leq C(T) \|B_K^{-1}\| |\det(B_K)|^{\frac{1}{2}} |\widehat{v}|_{H^2(T)} \\ &\leq C(T) \|B_K^{-1}\| \|B_K\|^2 |v|_{H^2(K)} \\ &\leq C(T) \frac{h_T}{\rho_K} \frac{h_K^2}{\rho_T^2} |v|_{H^2(K)} \\ &\leq C(T) \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)}. \end{aligned}$$

La conclusion vient en combinant les deux estimations. \square

Définition 3.1.18. Soit $(\tau_h)_h$ une suite de maillages de Ω . On dit que c'est une suite de maillages réguliers si

1. La suite $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ tend vers 0.
2. Il existe une constante C telle que pour tout $h > 0$ et tout $K \in \mathcal{T}_h$, on a

$$1 \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq C.$$

Proposition 3.1.19. Soit $(\tau_h)_h$ une suite de maillages réguliers de Ω . Alors pour tout $v \in H^2(\Omega)$, l'interpolée $\Pi_h^1 v$ est bien définie et il existe une constante positive C , indépendante de h et de v , tel que

$$\|v - \Pi_h^1 v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch |v|_{H^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Grâce au lemme 3.1.17 et à la régularité du maillage, on a

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h^1 v\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v - \Pi_h^1 v\|_{H^1(K)}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C \frac{h_K^4}{\rho_K^2} |v|_{H^2(K)}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} Ch_K^2 |v|_{H^2(K)}^2 \\ &\leq Ch^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(K)}^2 = Ch^2 |v|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. \square

3.1.7 Convergence et estimation d'erreur

Comme dans le cas unidimensionnel, et pour fixer les idées, supposons que $V = H^1(\Omega)$ ou $V = H_0^1(\Omega)$. Dans le cas du problème de Poisson par exemple, ceci correspond aux choix adaptés aux conditions aux limites de type Neumann et Dirichlet, respectivement.

Soient $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive et $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire et continue. Soit $u \in V$ la solution du problème variationnel

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V, \quad (3.9)$$

et soit $u_h \in V_h = V \cap X_h^1$ la solution du problème approché

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.10)$$

Théorème 3.1.20. *Soit Ω un polygone de \mathbb{R}^2 et soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une suite de maillages réguliers de Ω . Soient $u \in V$ la solution de (3.9) et $u_h \in V_h$ la solution de (3.10). Si $u \in H^2(\Omega)$, alors la méthode des éléments finis converge. De plus, il existe une constante indépendante de u et de h tel que*

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch |u|_{H^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Il est clair que $\Pi_h^1 u \in V_h$. En utilisant le lemme de Céa, il vient que

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^1 u\|_V = \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^1 u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Le résultat est alors une cons equance de la proposition 3.1.19. \square

3.2 Application à l'approximation du problème de Poisson

3.2.1 Problème continu

Considérons le problème de Poisson suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + \gamma u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.11)$$

où γ est une constante positive et $f \in L^2(\Omega)$. La formulation variationnelle associée, définie dans $V = H^1(\Omega)$, est donnée par

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V, \quad (3.12)$$

où

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) + \gamma (u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \gamma uv) \, dx dy$$

$$F(v) = (f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx dy.$$

La forme bilinéaire a satisfaisant

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\leq \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \gamma \|w\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max(1, \gamma) \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall w, v \in V, \end{aligned}$$

est continue sur V . De plus, vu que

$$a(v, v) = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \min(1, \gamma) \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

nous déduisons que a est coercive sur V . Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} |F(v)| = |(f, v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application linéaire F est continue sur V . Le théorème de Lax-Milgram implique alors que le problème variationnel admet une solution unique $u \in V$.

3.2.2 Problème discret

Le problème approché associé, défini sur $V_h = X_h^1$, est donné par

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.13)$$

D'après ce qui précède, ce problème admet une solution unique dans V_h . Sa décomposition dans la base de Lagrange associée est donnée par

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_h(S_i) \phi_i.$$

De plus, le vecteur $U_h = (u_h(S_j))_{1 \leq j \leq N_h}$ est solution du système linéaire

$$A_h U_h = F_h, \quad (3.14)$$

où la matrice A_h est donnée par $A_h = (a(\phi_j, \phi_i))_{1 \leq i, j \leq N_h}$ et où le second membre est donné par $F_h = (F(\phi_i))_{1 \leq i \leq N_h}$.

3.2.3 Convergence

Théorème 3.2.1. *Soit $u \in V$ la solution de (3.12) et soit $u_h \in V_h$ la solution de (3.13). Il existe une constante indépendante de u et de h tel que*

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Le résultat est une conséquence directe du Théorème 3.1.20 et du résultat de régularité qui stipule que si $f \in L^2(\Omega)$, alors $u \in H^2(\Omega)$ et satisfait l'estimation suivante

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est une constante positive indépendante de u . □

3.2.4 Assemblage de la matrice

Il est clair que

$$\begin{aligned} (A_h)_{ij} &= \int_{\Omega} (\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j + \gamma \phi_i \phi_j) \, dx dy \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\nabla \phi_i|_K \cdot \nabla \phi_j|_K + \gamma \phi_i|_K \phi_j|_K) \, dx dy \end{aligned} \quad (3.15)$$

et

$$(F_h)_i = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx dy = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f \phi_i|_K \, dx dy. \quad (3.16)$$

Cette écriture montre que le calcul de A_h et de F_h se ramène à une somme de contributions élémentaires sur chacun des triangles formant la triangulation.

À ce stade, il est intéressant d'interpréter la procédure donnée dans (3.15). Soit K un élément fini type. Formellement, sur K , la solution exacte $u \in V$ satisfait

$$\int_K (\nabla u \cdot \nabla v + \gamma uv) \, dx dy = \int_K f \cdot v \, dx dy \quad \forall v \in V.$$

Soit u_h la solution approchée correspondante. Alors,

$$\int_K (\nabla u_h|_K \cdot \nabla v_h|_K + \gamma u_h|_K v_h|_K) \, dx dy = \int_K f v_h|_K \, dx dy \quad (3.17)$$

pour tout $v_h \in V_h$. Rappelons alors que

$$v_h|_K = \sum_{r=1}^3 v_h(S_r^K) \lambda_r^K$$

où $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K$ sont les coordonnées barycentriques correspondant à K . De (3.17), on déduit que $(u_h(S_1^K), u_h(S_2^K), u_h(S_3^K))^{\top}$ est solution du système élémentaire suivant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11}^K & A_{12}^K & A_{13}^K \\ A_{21}^K & A_{22}^K & A_{23}^K \\ A_{31}^K & A_{32}^K & A_{33}^K \end{pmatrix}}_{A^K} \begin{pmatrix} u_h(S_1^K) \\ u_h(S_2^K) \\ u_h(S_3^K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^K \\ F_2^K \\ F_3^K \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

où

$$A_{rs}^K = \int_K (\nabla \lambda_r^K \cdot \nabla \lambda_s^K + \gamma \lambda_r^K \lambda_s^K) dx dy,$$

et

$$F_r^K = \int_K f \lambda_r^K dx dy.$$

Soit $\ell_K : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, \dots, N_h\}$ tel que

$$S_r^K = S_{\ell_K(r)}.$$

Il vient alors que

$$u_{h|K}(S_r^K) = u_h(S_{\ell_K(r)}).$$

Supposons que $\ell_K(1) = i$, $\ell_K(2) = j$ et $\ell_K(3) = k$ avec $i < j < k$. Le système (3.18) s'écrit de manière équivalente sous la forme

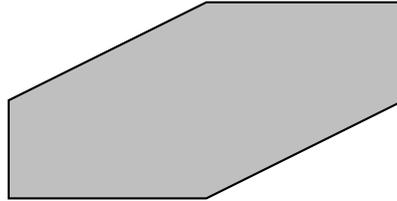
$$A^K \begin{pmatrix} u_h(S_i) \\ u_h(S_j) \\ u_h(S_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^K \\ F_2^K \\ F_3^K \end{pmatrix}.$$

L'idée maintenant est d'étendre les matrices dans le système précédent à des matrices de même dimension que celles apparaissant dans le système global. Ainsi le système (3.18) sera équivalent à

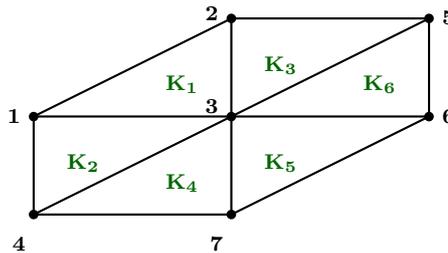
$$\begin{array}{c} \begin{matrix} i & j & k \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \rightarrow \\ j \rightarrow \\ k \rightarrow \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{11}^K & \dots & A_{12}^K & \dots & A_{13}^K & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{21}^K & \dots & A_{22}^K & \dots & A_{23}^K & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{31}^K & \dots & A_{32}^K & \dots & A_{33}^K & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h(S_1) \\ \vdots \\ u_h(S_i) \\ u_h(S_{i+1}) \\ \vdots \\ u_h(S_j) \\ u_h(S_{j+1}) \\ \vdots \\ u_h(S_k) \\ \vdots \\ u_h(S_{N_h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_1^K \\ 0 \\ \vdots \\ F_2^K \\ 0 \\ \vdots \\ F_3^K \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système global (3.14) est alors obtenu en assemblant les matrices précédentes le long de tous les éléments de la triangulation.

Exemple. Considérons le problème de Poisson avec des conditions au bord de type Neuman, défini sur le domaine suivant



Notre objectif est de déterminer la forme de la matrice de rigidité. Nous divisons Ω en 6 éléments et 7 noeuds numérotés comme dans la figure suivante



Élément K_1 . (Sommets 1, 2, 3)

Les matrices associées sont de la forme

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & A_{33}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^1 = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Élément K_2 . (Sommets 1, 3, 4)

La matrice associée est de la forme

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & 0 & A_{12}^2 & A_{13}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^2 & 0 & A_{22}^2 & A_{23}^2 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31}^2 & 0 & A_{32}^2 & A_{33}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^2 = \begin{pmatrix} F_1^2 \\ 0 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Élément K_3 . (Sommets 2, 3, 5)

La matrice associée est de la forme

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}^3 & A_{12}^3 & 0 & A_{13}^3 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21}^3 & A_{22}^3 & 0 & A_{23}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{31}^3 & A_{32}^3 & 0 & A_{33}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \\ 0 \\ F_3^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Élément K_4 . (Sommets 3, 4, 7)

La matrice associée est de la forme

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11}^4 & A_{12}^4 & 0 & 0 & A_{13}^4 \\ 0 & 0 & A_{21}^4 & A_{22}^4 & 0 & 0 & A_{23}^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31}^4 & A_{32}^4 & 0 & 0 & A_{33}^4 \end{pmatrix}, \quad F^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^4 \\ F_2^4 \\ 0 \\ 0 \\ F_3^4 \end{pmatrix}.$$

Élément K_5 . (Sommets 3, 6, 7)

La matrice associée est de la forme

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11}^5 & 0 & 0 & A_{12}^5 & A_{13}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^5 & 0 & 0 & A_{22}^5 & A_{23}^5 \\ 0 & 0 & A_{31}^5 & 0 & 0 & A_{32}^5 & A_{33}^5 \end{pmatrix}, \quad F^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ F_2^5 \\ F_3^5 \end{pmatrix}.$$

Élément K_6 . (Sommets 3, 5, 6)

La matrice associée est de la forme

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11}^6 & 0 & A_{12}^6 & A_{13}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^6 & 0 & A_{22}^6 & A_{23}^6 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31}^6 & 0 & A_{32}^6 & A_{33}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^6 \\ 0 \\ F_2^6 \\ F_3^6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En sommant les différentes contributions, il vient que la matrice de rigidité est de la forme

$$A = \sum_{i=1}^6 A^i = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & A_{25} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} & 0 & 0 & A_{47} \\ 0 & A_{52} & A_{53} & 0 & A_{55} & A_{56} & 0 \\ 0 & 0 & A_{63} & 0 & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ 0 & 0 & A_{73} & A_{74} & 0 & A_{76} & A_{77} \end{pmatrix}.$$

3.2.5 Calcul effectif de la matrice élémentaire

En utilisant le changement de variables $(x, y)^\top = F_K(\hat{x}, \hat{y})$ (voir la proposition 3.1.10) et en prenant en compte la proposition 3.1.11, on obtient

$$\lambda_r^K(x, y) = \lambda_r^K(F_K(\hat{x}, \hat{y})) = \hat{\lambda}_r(\hat{x}, \hat{y})$$

et

$$\begin{aligned}\nabla \lambda_r^K &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_r^K}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda_r^K}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_r^K}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_r^K}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda_r^K}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_r^K}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{x}} \nabla \hat{x} + \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{y}} \nabla \hat{y}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\nabla \lambda_r^K \cdot \nabla \lambda_s^K &= \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\lambda}_s}{\partial \hat{x}} |\nabla \hat{x}|^2 + \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\lambda}_s}{\partial \hat{y}} |\nabla \hat{y}|^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\lambda}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\lambda}_s}{\partial \hat{x}} \right) \nabla \hat{x} \cdot \nabla \hat{y}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

D'autre part, on a

$$\nabla \hat{x} = \frac{1}{2|K|} \begin{pmatrix} y_3^K - y_1^K \\ x_1^K - x_3^K \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla \hat{y} = \frac{1}{2|K|} \begin{pmatrix} y_1^K - y_2^K \\ x_2^K - x_1^K \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}|\nabla \hat{x}|^2 &= \frac{1}{4|K|^2} \left((y_3^K - y_1^K)^2 + (x_3^K - x_1^K)^2 \right) = \frac{1}{4|K|^2} \left| \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \right|^2 \\ |\nabla \hat{y}|^2 &= \frac{1}{4|K|^2} \left((y_1^K - y_2^K)^2 + (x_1^K - x_2^K)^2 \right) = \frac{1}{4|K|^2} \left| \overrightarrow{S_1^K S_2^K} \right|^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\nabla \hat{x} \cdot \nabla \hat{y} &= -\frac{1}{4|K|^2} \left((y_3^K - y_1^K)(y_2^K - y_1^K) + (x_3^K - x_1^K)(x_2^K - x_1^K) \right) \\ &= -\frac{1}{4|K|^2} \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_1^K S_2^K}.\end{aligned}$$

Substituant dans (3.19), on obtient

$$\begin{aligned}\nabla \lambda_r^K \cdot \nabla \lambda_s^K &= \frac{1}{4|K|^2} \left(\frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\lambda}_s}{\partial \hat{x}} \left| \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \right|^2 + \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\lambda}_s}{\partial \hat{y}} \left| \overrightarrow{S_1^K S_2^K} \right|^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{4|K|^2} \left(\frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\lambda}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{\lambda}_r}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\lambda}_s}{\partial \hat{x}} \right) \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_1^K S_2^K}.\end{aligned}$$

Rappelons alors que

$$\hat{\lambda}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}, \quad \hat{\lambda}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}, \quad \hat{\lambda}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}.$$

Après intégration, il vient que les coefficients de la matrice de rigidité élémentaire sont donnés par

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{11}^K &= \frac{1}{4|K|} \left(|\overrightarrow{S_1^K S_3^K}|^2 + |\overrightarrow{S_1^K S_2^K}|^2 - 2\overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_1^K S_2^K} \right) \\ &= \frac{1}{4|K|} |\overrightarrow{S_1^K S_3^K} - \overrightarrow{S_1^K S_2^K}|^2 = \frac{1}{4|K|} |\overrightarrow{S_2^K S_3^K}|^2, \\ \mathcal{K}_{12}^K &= \frac{1}{4|K|} \left(-|\overrightarrow{S_1^K S_3^K}|^2 + \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_1^K S_2^K} \right) \\ &= \frac{1}{4|K|} \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot (\overrightarrow{S_1^K S_2^K} - \overrightarrow{S_1^K S_3^K}) = \frac{1}{4|K|} \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_3^K S_2^K}, \\ \mathcal{K}_{13}^K &= \frac{1}{4|K|} \left(-|\overrightarrow{S_1^K S_2^K}|^2 + \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_1^K S_2^K} \right) \\ &= \frac{1}{4|K|} \overrightarrow{S_1^K S_2^K} \cdot (\overrightarrow{S_1^K S_3^K} - \overrightarrow{S_1^K S_2^K}) = \frac{1}{4|K|} \overrightarrow{S_1^K S_2^K} \cdot \overrightarrow{S_2^K S_3^K}, \\ \mathcal{K}_{22}^K &= \frac{1}{4|K|} |\overrightarrow{S_1^K S_3^K}|^2, \\ \mathcal{K}_{23}^K &= -\frac{1}{4|K|} \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_1^K S_2^K} = \frac{1}{4|K|} \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_2^K S_1^K}, \\ \mathcal{K}_{33}^K &= \frac{1}{4|K|} |\overrightarrow{S_1^K S_2^K}|^2.\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la formule

$$\int_K (\lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda_2)^{\alpha_2} (\lambda_3)^{\alpha_3} dx dy = 2 \frac{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2)!} |K|$$

nous obtenons

$$\int_K \lambda_r^K \lambda_s^K dx dy = \begin{cases} \frac{|K|}{6} & \text{si } r = s, \\ \frac{|K|}{12} & \text{si } r \neq s. \end{cases}$$

En combinant les résultats précédents, nous obtenons que la matrice élémentaire A^K est donnée par

$$A^K = \frac{1}{4|K|} \begin{pmatrix} |\overrightarrow{S_2^K S_3^K}|^2 & \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_3^K S_2^K} & \overrightarrow{S_1^K S_2^K} \cdot \overrightarrow{S_2^K S_3^K} \\ \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_3^K S_2^K} & |\overrightarrow{S_1^K S_3^K}|^2 & \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_2^K S_1^K} \\ \overrightarrow{S_1^K S_2^K} \cdot \overrightarrow{S_2^K S_3^K} & \overrightarrow{S_1^K S_3^K} \cdot \overrightarrow{S_2^K S_1^K} & |\overrightarrow{S_1^K S_2^K}|^2 \end{pmatrix} + \frac{\gamma|K|}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Dans $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, on résout le problème de Poisson avec

des conditions de type Neumann à l'aide d'éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_1 .
On utilise le maillage suivant :

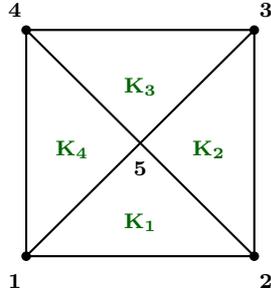


Figure 3.6 - Exemple de maillage et de numérotation des noeuds

Notre objectif est de déterminer la matrice de rigidité correspondante.

Élément K_1 . (Sommets 1, 2, 5) Soient $S_1^1 = (0, 0)$, $S_2^1 = (1, 0)$ et $S_3^1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La matrice de rigidité élémentaire correspondante est donnée par

$$\mathcal{K}^1 = \frac{1}{4|T_1|} \begin{pmatrix} |\overrightarrow{S_1^1 S_3^1}|^2 & \overrightarrow{S_1^1 S_3^1} \cdot \overrightarrow{S_3^1 S_2^1} & \overrightarrow{S_1^1 S_3^1} \cdot \overrightarrow{S_2^1 S_3^1} \\ \overrightarrow{S_1^1 S_3^1} \cdot \overrightarrow{S_3^1 S_2^1} & |\overrightarrow{S_1^1 S_3^1}|^2 & \overrightarrow{S_1^1 S_3^1} \cdot \overrightarrow{S_2^1 S_1^1} \\ \overrightarrow{S_1^1 S_3^1} \cdot \overrightarrow{S_2^1 S_3^1} & \overrightarrow{S_1^1 S_3^1} \cdot \overrightarrow{S_2^1 S_1^1} & |\overrightarrow{S_1^1 S_2^1}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Étendant cette matrice à une matrice de dimension 5×5 , on obtient

$$A^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Élément K_2 . (Sommets 2, 3, 5) Soient $S_1^2 = (1, 0)$, $S_2^2 = (1, 1)$, $S_3^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La matrice de rigidité élémentaire correspondante est donnée par

$$\mathcal{K}^2 = \frac{1}{4|T_2|} \begin{pmatrix} |\overrightarrow{S_2^2 S_3^2}|^2 & \overrightarrow{S_1^2 S_3^2} \cdot \overrightarrow{S_3^2 S_2^2} & \overrightarrow{S_1^2 S_3^2} \cdot \overrightarrow{S_2^2 S_3^2} \\ \overrightarrow{S_1^2 S_3^2} \cdot \overrightarrow{S_3^2 S_2^2} & |\overrightarrow{S_1^2 S_3^2}|^2 & \overrightarrow{S_1^2 S_3^2} \cdot \overrightarrow{S_2^2 S_1^2} \\ \overrightarrow{S_1^2 S_3^2} \cdot \overrightarrow{S_2^2 S_3^2} & \overrightarrow{S_1^2 S_3^2} \cdot \overrightarrow{S_2^2 S_1^2} & |\overrightarrow{S_1^2 S_2^2}|^2 \end{pmatrix} = \mathcal{K}^1.$$

Étendant cette matrice à une matrice de dimension 5×5 , on obtient

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Élément K_3 . (Sommets 3, 4, 5)

$$S_1^3 = (1, 1), \quad S_2^3 = (0, 1), \quad S_3^3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Utilisant les mêmes arguments, nous obtenons la matrice

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Élément K_4 . (Sommets 1, 4, 5)

$$S_1^4 = (0, 1), \quad S_2^4 = (0, 0), \quad S_3^4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

De même, on a

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, en rassemblant ces résultats, nous obtenons la matrice globale suivante

$$\begin{aligned} A &= A^1 + A^2 + A^3 + A^4 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple. Appliquer la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

dans le carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ avec le maillage triangulaire uniforme de pas $h = \frac{1}{N+1}$ (il y a donc $N + 2$ noeuds sur chaque bord du domaine).

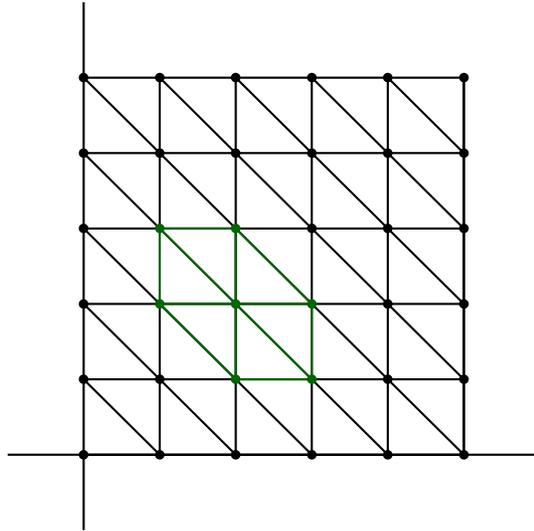


Figure 3.7 - Maillage triangulaire uniforme d'un carré

On notera $X_{i,j} = (ih, jh)$, $1 \leq i, j \leq N$ les noeuds du maillage. On numérote ces noeuds par ordre croissant de j et pour tout j , par ordre croissant de i . Ainsi on peut associer à (i, j) , l'entier naturel $\ell = i + (j - 1)N$ et on pose $S_\ell = X_{i,j}$. On notera alors ϕ_ℓ la fonction de base associée au sommet S_ℓ .

- Le gradient $\nabla \phi_\ell$ est nul sur tout Ω à l'exclusion des 6 triangles K_1, \dots, K_6 , contenant S_ℓ (voir figure ci-dessous). Calculons $\nabla \phi_\ell$ dans chacun de ces triangles.

Élément K_1 . Posons

$$S_1^1 = S_{\ell-N}, \quad S_2^1 = S_{\ell-N+1}, \quad S_3^1 = S_\ell.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}\nabla\phi_\ell &= \nabla\lambda_3^1 = \frac{\partial\hat{\lambda}_3}{\partial\hat{x}}\nabla\hat{x} + \frac{\partial\hat{\lambda}_3}{\partial\hat{y}}\nabla\hat{y} \\ &= \nabla\hat{y} = \frac{1}{2|K_1|} \begin{pmatrix} y_1^{K_1} - y_2^{K_1} \\ x_2^{K_1} - x_2^{K_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

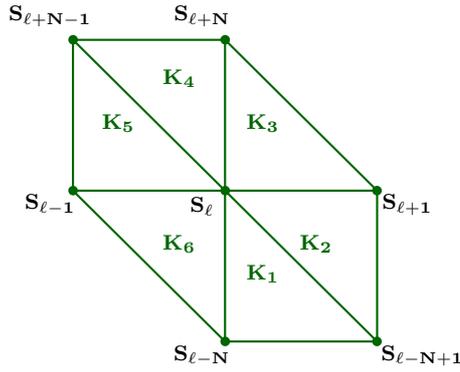


Figure 3.8 - Sommets voisins à S_ℓ

Élément K_2 . Posons

$$S_1^2 = S_{\ell-N+1}, \quad S_2^2 = S_\ell, \quad S_3^2 = S_{\ell+1}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\nabla\phi_\ell &= \nabla\lambda_2^2 = \frac{\partial\hat{\lambda}_2}{\partial\hat{x}}\nabla\hat{x} + \frac{\partial\hat{\lambda}_2}{\partial\hat{y}}\nabla\hat{y} \\ &= \nabla\hat{x} = \frac{1}{2|K_2|} \begin{pmatrix} y_3^{K_2} - y_1^{K_2} \\ x_1^{K_2} - x_3^{K_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Élément K_3 . De manière similaire, posons

$$S_1^3 = S_\ell, \quad S_2^3 = S_{\ell+1}, \quad S_3^3 = S_{\ell+N}.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}\nabla\phi_\ell &= \nabla\lambda_1^3 = \frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\hat{x}}\nabla\hat{x} + \frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\hat{y}}\nabla\hat{y} \\ &= -\nabla\hat{x} - \nabla\hat{y} = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Élément K_4 . Posons

$$S_1^4 = S_\ell, \quad S_2^4 = S_{\ell+N-1}, \quad S_3^4 = S_{\ell+N}.$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla \phi_\ell &= \nabla \lambda_1^4 = \frac{\partial \hat{\lambda}_1}{\partial \hat{x}} \nabla \hat{x} + \frac{\partial \hat{\lambda}_1}{\partial \hat{y}} \nabla \hat{y} \\ &= -\nabla \hat{x} - \nabla \hat{y} = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -h \\ -h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Élément K_5 . Soient

$$S_1^5 = S_{\ell-1}, \quad S_2^5 = S_\ell, \quad S_3^5 = S_{\ell+N-1}.$$

On a

$$\nabla \phi_\ell = \nabla \lambda_2^5 = \nabla \hat{x} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Élément K_6 . Posons

$$S_1^6 = S_{\ell-N}, \quad S_2^6 = S_{\ell-1}, \quad S_3^6 = S_\ell.$$

On a

$$\nabla \phi_\ell = \nabla \lambda_3^6 = \nabla \hat{y} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -h \\ -h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

Ces résultats sont résumés dans la figure suivante.

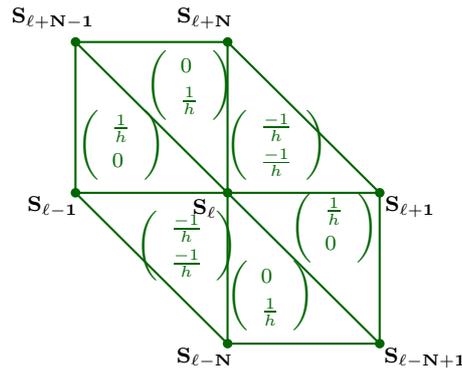


Figure 3.9 - Valeurs du gradient de la fonction de base ϕ_ℓ

• Ainsi

$$\begin{aligned}
 a(\phi_\ell, \phi_\ell) &= \int_{\Omega} |\nabla \phi_\ell|^2 dx \\
 &= \int_{\text{supp } \phi_\ell} |\nabla \phi_\ell|^2 dx \\
 &= \int_{\cup_{i=1}^6 K_i} |\nabla \phi_\ell|^2 dx \\
 &= \sum_{i=1}^6 \int_{K_i} |\nabla \phi_\ell|^2 dx \\
 &= \frac{h^2}{2} \frac{8}{h^2} = 4.
 \end{aligned}$$

De même, prenant en compte la figure 3.10

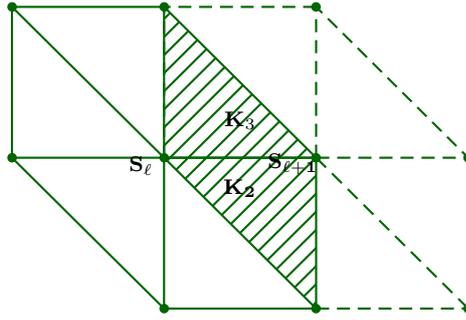


Figure 3.10 - $\text{supp } \phi_\ell \cap \text{supp } \phi_{\ell+1}$

on obtient

$$\begin{aligned}
 a(\phi_\ell, \phi_{\ell+1}) &= \int_{\Omega} \nabla \phi_\ell \cdot \nabla \phi_{\ell+1} dx = \int_{\text{supp } \phi_\ell \cap \text{supp } \phi_{\ell+1}} \nabla \phi_\ell \cdot \nabla \phi_{\ell+1} dx \\
 &= \int_{K_2 \cup K_3} \nabla \phi_\ell \cdot \nabla \phi_{\ell+1} dx \\
 &= \int_{K_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} \end{pmatrix} dx + \int_{K_3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} dx \\
 &= -\frac{h^2}{2} \frac{2}{h^2} = -1.
 \end{aligned}$$

Des arguments similaires montrent que

$$\begin{aligned}
 a(\phi_\ell, \phi_{\ell-1}) &= \int_{\text{supp } \phi_\ell \cap \text{supp } \phi_{\ell-1}} \nabla \phi_\ell \cdot \nabla \phi_{\ell-1} \, dx \\
 &= \int_{K_5 \cup K_6} \nabla \phi_\ell \cdot \nabla \phi_{\ell-1} \, dx \\
 &= \int_{K_5} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \, dx + \int_{K_6} \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} \, dx \\
 &= -\frac{h^2}{2} \frac{2}{h^2} = -1.
 \end{aligned}$$

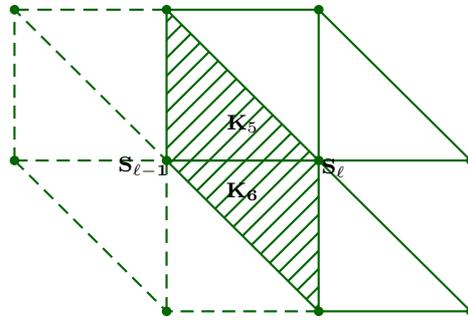
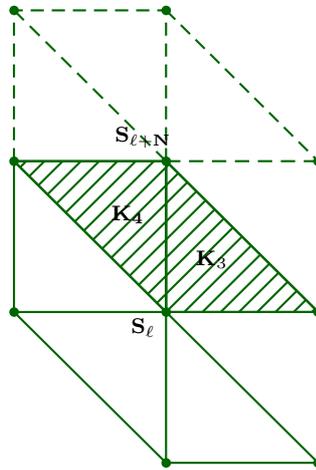
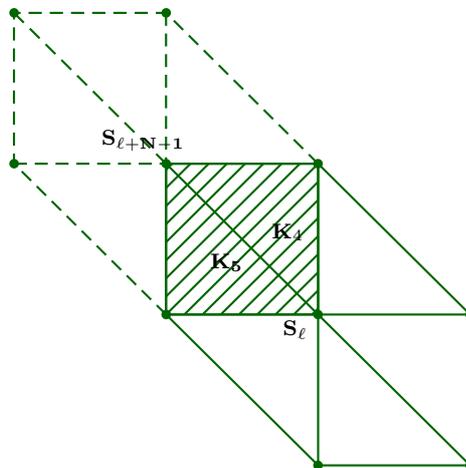


Figure 3.11 - $\text{supp } \phi_\ell \cap \text{supp } \phi_{\ell-1}$

De même (voir figure 3.12)

$$\begin{aligned}
 a(\phi_\ell, \phi_{\ell+N}) &= \int_{\text{supp } \phi_\ell \cap \text{supp } \phi_{\ell+N}} \nabla \phi_\ell \cdot \nabla \phi_{\ell+N} \, dx \\
 &= \int_{K_3 \cup K_4} \nabla \phi_\ell \cdot \nabla \phi_{\ell-1} \, dx \\
 &= \int_{K_3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} \, dx + \int_{K_4} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \, dx \\
 &= -\frac{h^2}{2} \frac{2}{h^2} = -1,
 \end{aligned}$$

et de la même manière, nous obtenons $a(\phi_\ell, \phi_{\ell-N}) = -1$.

Figure 3.12 - $\text{supp } \phi_\ell \cap \text{supp } \phi_{\ell+N}$ Figure 3.13 - $\text{supp } \phi_\ell \cap \text{supp } \phi_{\ell+N-1}$

Finalement, prenant en compte la figure 3.13, on a

$$\begin{aligned}
 a(\phi_\ell, \phi_{\ell+N-1}) &= \int_{\text{supp } \phi_\ell \cap \text{supp } \phi_{\ell+N-1}} \nabla \phi_\ell \cdot \nabla \phi_{\ell+N} \, dx \\
 &= \int_{K_4 \cup K_5} \nabla \phi_\ell \cdot \nabla \phi_{\ell-1} \, dx \\
 &= \int_{K_4} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} \, dx + \int_{K_5} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} \, dx \\
 &= -\frac{h^2}{2} \frac{2}{h^2} = -1,
 \end{aligned}$$

et de la même manière $a(\phi_\ell, \phi_{\ell-N+1}) = 0$.

La matrice globale correspondante est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} D & I_N & & 0 \\ -I_N & D & -I_N & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -I_N & D & -I_N \\ 0 & & & -I_N & D \end{pmatrix},$$

où I_N est la matrice identité de dimension N et où D est la matrice tri-diagonale de dimension N définie par $D = \text{tridiag}(-1, 4, -1)$. Il est clair que la matrice A est identique à la matrice obtenue en utilisant la méthode classique des différences finies.

Bibliographie

- [1] G. Allaire, *Analyse Numérique et Optimisation*, École Polytechnique, 2007.
- [2] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [3] A. Quarteroni, *Numerical Models for Differential Problems*, Springer, Milan, 2008.
- [4] A. Quarteroni, A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, Berlin, 1994.

Programme de l'UE

Semestre3

Intitulé du Master : **EDP et applications**

Intitulé de l'UE : **UEF6**

Intitulé de la matière : **Méthode des éléments finis**

Crédits : **5**

Coefficients : **3**

Objectifs de l'enseignement

Etude de la méthode des éléments finis en dimensions 1 et 2 : présentation de la méthode, convergence et estimation d'erreur.

Connaissances préalables recommandées

Analyse fonctionnelle, espaces de Sobolev, analyse matricielle.

Contenu de la matière :

- I. Méthode des éléments finis en une variable d'espace.
- II. Méthode des éléments finis en deux variables d'espace.
- III. Opérateur d'interpolation, erreur d'approximation et convergence de la méthode.

Mode d'évaluation :

(Note examen final x 2 + Note de travail personnel) x 1/3

Références :

- G. Allaire, Analyse numérique et optimisation, LES EDITIONS DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE, Paris, 2009.
- Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, North Holland, 1978.
- P. A. Raviart et J. M. Thomas. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, MASSON, 1983.



Master EDP et applications
Méthode des éléments finis

Liste 1

Exercice 1. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où α, β, γ sont trois fonctions continues sur $[0, 1]$ et où $f \in L^2(0, 1)$. Écrire le problème sous une forme variationnelle.

Exercice 2. On considère le problème de Poisson avec des conditions au bord de type Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -u''(x) + \gamma u(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où $\gamma \geq$ est une constante et $f \in L^2(0, 1)$.

1. Écrire la formulation variationnelle correspondant à (1). Montrer qu'il existe une solution unique u dans $H_0^1(0, 1)$.
2. Écrire le problème approché correspondant, obtenu par application de la méthode des éléments finis linéaires. Déterminer la matrice de rigidité correspondante et montrer que le problème approché admet une unique solution u_h .
3. Que peut-on dire concernant la convergence de u_h vers u ? Quel est l'ordre de convergence de la méthode?

Exercice 3. On considère le problème de Poisson avec des conditions au bord de type Neumann

$$\begin{cases} -u''(x) + \gamma u(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

où $\gamma > 0$ est une constante et $f \in L^2(0, 1)$.

1. Écrire la formulation variationnelle correspondant à (2). Montrer qu'il existe une solution unique u dans $H^1(0, 1)$.
2. Écrire le problème approché correspondant, obtenu par application de la méthode des éléments finis linéaires. Déterminer la matrice de rigidité correspondante et montrer que le problème approché admet une unique solution u_h .
3. Que peut-on dire concernant la convergence de u_h vers u ? Quel est l'ordre de convergence de la méthode?

Exercice 4. 1. On considère le problème (1). Écrire le problème approché correspondant, obtenu par application de la méthode des éléments finis quadratiques. Déterminer la matrice de rigidité correspondante et montrer que le problème approché admet une unique solution u_h .

2. Que peut-on dire concernant la convergence de u_h vers u . Quel est l'ordre de convergence de la méthode si $f \in H^1(0, 1)$?

Exercice 5. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

où $f \in L^2(0, 1)$ et $\alpha, \gamma \in C[0, 1]$ satisfont

$$\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \quad \text{et} \quad \gamma(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

1. Écrire la formulation variationnelle correspondant à (3). Montrer qu'il existe une solution unique u dans $H_0^1(0, 1)$.
2. Écrire le problème approché correspondant, obtenu par application de la méthode des éléments finis linéaires. Déterminer la matrice de rigidité correspondante et montrer que le problème approché admet une unique solution u_h .
3. Que peut-on dire concernant la convergence de u_h vers u ?
4. Approcher les éléments de la matrice de rigidité en utilisant la méthode du trapèze.
5. i) Supposons que $\alpha(x) = \alpha_0 > 0$ et $\gamma(x) = \gamma_0 \geq 0$. Calculer explicitement la matrice A_h .
ii) Considérons le cas de conditions au bord non-homogènes

$$u(0) = a \quad \text{et} \quad u(1) = b \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Pour se ramener au cas de conditions au bord homogènes, on définit une fonction aussi simple que possible $R : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions au bord, i.e. $R(0) = a$

et $R(1) = b$ (une telle fonction est appelée relèvement). Puis on décompose $u = \tilde{u} + R$ où \tilde{u} satisfait des conditions au bord homogènes.

Donner un exemple de fonction R . Écrire l'EDP satisfaite par \tilde{u} , la forme variationnelle correspondante et le système linéaire associé au problème approché correspondant, obtenu par application des éléments finis linéaires.

Exercice 6. Dans la pratique (spécialement en dimension supérieure), il n'est pas toujours possible de considérer un relèvement pour transformer le problème avec des conditions au bord de Dirichlet non-homogènes en un problème avec des conditions au bord homogène. Une alternative est l'objet du présent exercice.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = a \quad u(1) = b, \end{cases} \quad (4)$$

où $f \in L^2(0, 1)$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Écrire une formulation variationnelle correspondant à (4) avec des fonctions-test dans $H_0^1(0, 1)$. Peut-on appliquer le théorème de Lax-Milgram?
2. Écrire le problème approché correspondant, obtenu par application de la méthode des éléments finis linéaires. Déterminer la matrice de rigidité correspondante et montrer que le problème approché admet une unique solution $u_h \in X_1^h$. (Vérifier que les valeurs associées aux conditions aux limites apparaissent dans le second membre du système.)
3. Que peut-on dire concernant la convergence de u_h ?

Exercice 7. (Problème de diffusion-transport) On considère le problème de diffusion-transport donné par

$$\begin{cases} -\mu u''(x) - b u'(x) = 0 & x \in (0, 1), \\ u(0) = 0 \quad u(1) = 1, \end{cases} \quad (5)$$

où $\mu > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Utiliser un relèvement approprié pour reformuler la formulation variationnelle de (5). Montrer qu'il existe une solution unique à ce problème.
2. Utiliser la méthode des éléments finis linéaires pour approcher (5). Montrer que si on dénote $u_i = u_h(x_i)$ alors

$$\begin{cases} (\mathbb{P}e - 1) u_{i+1} + 2u_i - (\mathbb{P}e + 1) u_{i-1} = 0 & i = 1, \dots, N - 1 \\ u_0 = 0, \\ u_N = 1, \end{cases} \quad (6)$$

avec $\mathbb{P}e = \frac{|b|h}{2\mu}$ (appelé nombre de Peclet).

3. Chercher les solutions de (6) sous la forme $u_i = \rho^i$. Montrer que

$$u_i = \frac{1 - \left(\frac{1+\mathbb{P}e}{1-\mathbb{P}e}\right)^i}{1 - \left(\frac{1+\mathbb{P}e}{1-\mathbb{P}e}\right)^N} \quad i = 1, \dots, N.$$

Exercice 8. (Équation de la chaleur) Soit $T > 0$ fixé. On considère le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \alpha u(x, t) = f(x, t) & (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = 0 & x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (7)$$

où $\mu > 0$, $\alpha \geq 0$ et $f \in L^2(]0, 1[\times]0, T[)$.

1. Donner une formulation variationnelle de (7) sous la forme

$$\begin{cases} \text{Pour tout } t \in]0, T[\text{ chercher } u(t) \in V \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v \right) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V, \\ u(x, 0) = 0 \quad x \in]0, 1[. \end{array} \right. \end{cases} \quad (8)$$

Expliciter V et a .

2. La semi-discrétisation de (8) par la méthode des éléments finis s'écrit

$$\begin{cases} \text{Pour tout } t \in]0, T[\text{ chercher } u_h(t) \in V_h \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, v \right) + a(u_h(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v_h \in V_h, \\ u(x, 0) = 0 \quad x \in]0, 1[. \end{array} \right. \end{cases} \quad (9)$$

Montrer que (9) peut s'écrire de manière équivalente sous la forme du système de EDO suivant

$$\begin{cases} \text{Déterminer } U(t) \in \mathbb{R}^N \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{l} M \frac{dU(t)}{dt} + AU(t) = F(t) \quad t \in (0, T), \\ U(0) = 0, \end{array} \right. \end{cases} \quad (10)$$

où $U(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$.

3. Utiliser un θ schéma pour discrétiser (10). Expliciter le cas correspondant à $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = 1$.

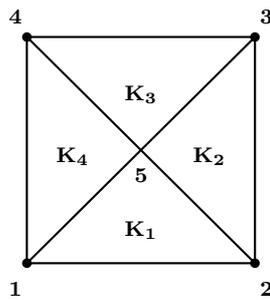


Master EDP et applications

Méthode des éléments finis

Liste 2

Exercice 1. On considère le carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ maillé suivant la figure suivante



Calculer la matrice de rigidité des éléments finis \mathbb{P}_1 appliqués au problème de Poisson avec des conditions aux limites de type Neumann.

Exercice 2. Appliquer la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

dans le carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ avec le maillage triangulaire uniforme de pas $h = \frac{1}{N+1}$. On notera $X_{i,j} = (ih, jh)$, $1 \leq i, j \leq N$ les noeuds du maillage. On numérote ces noeuds par ordre croissant de j et pour tout j , par ordre croissant de i . Ainsi on peut associer à (i, j) , l'entier naturel $\ell = i + (j-1)N$ et on pose $S_\ell = X_{i,j}$. On notera alors ϕ_ℓ la fonction de base associée au sommet S_ℓ .

1. Déterminer $\nabla\phi_\ell$ sur le support de ϕ_ℓ .
2. En déduire les valeurs de $(\nabla\phi_\ell, \nabla\phi_k)$, où S_ℓ et S_k sont les noeuds voisins dont les

supports ne sont pas disjoints.

3. Déterminer la matrice de rigidité correspondante.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 à frontière régulière et soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème variationnelle suivant

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \left(\int_{\Omega} u \, dx \right) \left(\int_{\Omega} v \, dx \right) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

où $\lambda \geq 1$.

Partie I. 1. Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \int_{\Omega} v \, dx \right|^2 \right) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (1)$$

2. Montrer que (P_λ) admet une solution unique u et que cette solution vérifie

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $C_2 > 0$ est une constante indépendante de λ .

3. Montrer qu'il existe une constante $C_3 > 0$, indépendante de λ , tel que

$$\left| \int_{\Omega} u \, dx \right| \leq \frac{C_3}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

4. Écrire formellement le problème associé à (P_λ) .

5. En déduire que la solution de (P_λ) est dans $H^2(\Omega)$ et vérifie

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_4 \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $C_4 > 0$ est une constante indépendante de λ .

Partie II. Soit \mathcal{T}_h une triangulation de Ω , où h désigne la taille maximale des triangles. Soit

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) \mid v_h|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

On suppose que \mathcal{T}_h est régulière.

1. Proposer une discrétisation de (P_λ^h) et montrer que le problème approché est bien posé. On notera u_h sa solution.

2. Appliquer le lemme de Céa pour montrer que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_5 \left(h + \sqrt{\lambda} h^2 \right) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

où $C_5 > 0$ est indépendante de h et de λ .

3. Montrer que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \lambda \left| \int_{\Omega} (u - u_h) dx \right|^2 \leq C \left(\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \lambda \left| \int_{\Omega} (u - v_h) dx \right|^2 \right).$$

4. En déduire qu'il existe une constante $C_6 > 0$ indépendante de λ et de h tel que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_6 h \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Partie III. On note u_λ la solution du problème (P_λ) . On définit l'espace

$$W = \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} w dx = 0 \right\},$$

et on désigne par u la solution du problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in W \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in W. \end{cases}$$

Montrer que

$$\int_{\Omega} \nabla (u_\lambda - u) \cdot \nabla v dx = 0 \quad \forall v \in W.$$

En déduire que

$$\lambda (u_\lambda - u) = \frac{1}{|\Omega|^2} \int_{\Omega} f dx$$

et que

$$\|u_\lambda - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est une constante indépendante de λ . Commenter.



MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Interrogation Écrite - 19 Novembre 2016

Durée 1h30

Toutes les réponses doivent être justifiées

Problème. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + \gamma(x)u(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u'(0) = \alpha, & u'(1) = \beta, \end{cases} \quad (1)$$

où $\gamma \in C[0, 1]$ satisfait $\gamma(x) \geq \gamma_0 > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, $f \in L^2(0, 1)$, et où α et β sont deux nombres réels.

1. Écrire la formulation variationnelle correspondant à (1). Montrer qu'il existe une solution unique u dans $H^1(0, 1)$.
2. Écrire le problème approché correspondant, obtenu par application de la méthode des éléments finis linéaires. Déterminer la matrice de rigidité correspondante et montrer que le problème approché admet une unique solution u_h .
3. Que peut-on dire concernant la convergence de u_h vers u ?
4. Les coefficients de la matrice de rigidité dépendent de γ , quel type d'approximation supplémentaire doit-on faire pour effectuer les calculs? Quelles sont les possibles conséquences sur la convergence de la méthode.
5. Considérons le cas $\gamma = 0$. Peut-on appliquer le théorème de Lax-Milgram? Si le problème (1) admet une solution, est-elle unique? Peut-on garantir, en général, que le problème discret associé admet une solution unique?
6. Considérons finalement le cas des conditions au bord de type Dirichlet $u(0) = \alpha$ et $u(1) = \beta$. Discuter succinctement comment traiter numériquement le problème dans le cas de conditions au bord homogènes et dans le cas de conditions au bord non-homogènes.



MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Solution de l'interrogation - 19 Novembre 2016

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + \gamma(x)u(x) = f(x) & \text{dans } (0, 1), \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta, \end{cases} \quad (1)$$

où $\gamma \in C[0, 1]$ satisfait $\gamma(x) \geq \gamma_0 > 0$, $f \in L^2(0, 1)$, α et β sont deux constantes réelles.

1. Multipliant l'équation (1) par une fonction test $v \in H^1(0, 1)$ et intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} (u', v') + (\gamma u, v) &= (f, v) + [u'(x)v(x)]_0^1 \\ &= (f, v) + \beta v(1) - \alpha v(0), \end{aligned}$$

où $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) dx$. Autrement dit, la formulation variationnelle de (1) est de la forme

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(0, 1) \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(0, 1) \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (u', v') + (\gamma u, v), \\ F(v) &= (f, v) + \beta v(1) - \alpha v(0). \end{aligned}$$

La forme bilinéaire a est continue dans $H^1(0, 1) \times H^1(0, 1)$. En effet,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq |(u', v')| + |(\gamma u, v)| \\ &\leq \|u'\|_2 \|v'\|_2 + \|\gamma\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &\leq \max(\|\gamma\|_\infty, 1) (\|u'\|_2 \|v'\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2) \\ &\leq \max(\|\gamma\|_\infty, 1) (\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2)^{\frac{1}{2}} (\|v\|_2^2 + \|v'\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \max(\|\gamma\|_\infty, 1) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \forall u, v \in H^1(0, 1). \end{aligned}$$

De l'autre côté, on a

$$\begin{aligned} |a(v, v)| &= \|v'\|_2^2 + (\gamma v, v) \\ &\geq \|v'\|_2^2 + \gamma_0 (v, v) \\ &\geq \min(1, \gamma_0) \|v\|_{H^1}^2 \quad \forall v \in H^1(0, 1) \end{aligned}$$

prouvant ainsi que a est coercive dans $H^1(0, 1) \times H^1(0, 1)$. Montrons finalement que la forme linéaire F est continue dans $H^1(0, 1)$. On a

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \|f\|_2 \|v\|_2 + |\alpha| |v(0)| + |\beta| |v(1)| \\ &\leq \|f\|_2 \|v\|_{H^1} + (|\alpha| + |\beta|) \|v\|_{C([0,1])} \quad \forall v \in H^1(0, 1). \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Sobolev, il vient que

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \|f\|_2 \|v\|_{H^1} + (|\alpha| + |\beta|) \|v\|_{C([0,1])} \\ &\leq \|f\|_2 \|v\|_{H^1} + C_S (|\alpha| + |\beta|) \|v\|_{H^1(0,1)} \\ &\leq (\|f\|_2 + C_S (|\alpha| + |\beta|)) \|v\|_{H^1(0,1)} \quad \forall v \in H^1(0, 1) \end{aligned}$$

où C_S est une constante de Sobolev. Les conditions du théorème de Lax-Milgram étant satisfaites, il existe donc une solution unique u au problème (2). Posant $v = u$ dans la formulation correspondente, nous obtenons

$$\min(1, \gamma_0) \|u\|_{H^1}^2 \leq a(u, u) = F(u) \leq (\|f\|_2 + C_S (|\alpha| + |\beta|)) \|u\|_{H^1}$$

et donc

$$\|u\|_{H^1} \leq \frac{1}{\min(1, \gamma_0)} (\|f\|_2 + C_S (|\alpha| + |\beta|)).$$

2. Le problème approché associé à (2) est donné par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (3)$$

où $V_h = X_h^1$. Soit $(\phi_i)_{i=0, \dots, N+1}$ la base de Lagrange de X_h^1 . Dans la formulation variationnelle (3), on choisit successivement $v_h = \phi_i, i = 0, \dots, N+1$ et on obtient

$$a \left(\sum_{j=0}^{N+1} u_h(x_j) \phi_j, \phi_i \right) = F(\phi_i) \quad 0 \leq i \leq N+1.$$

La forme a étant bilinéaire, il vient que

$$\sum_{j=0}^{N+1} u_h(x_j) a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i) \quad 0 \leq i \leq N+1.$$

Donc $U_h = (u_h(x_j))_{0 \leq j \leq N+1}$ est solution du système linéaire

$$A_h U_h = B_h, \quad (4)$$

où la matrice A_h est donnée par $A_h = (a(\phi_j, \phi_i))_{0 \leq i, j \leq N+1}$ et où le second membre est donné par $B_h = (F(\phi_i))_{0 \leq i \leq N+1}$.

Comme on le sait, les supports de ϕ_i et ϕ_j sont disjoints quand $|i - j| > 1$, i.e.

$$\text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j = \emptyset \quad \text{si } j \neq i, \quad j \neq i - 1, \quad j \neq i + 1.$$

Une conséquence directe est que la plupart des éléments de A_h sont nuls. Les éléments non nuls correspondent à $(A_h)_{i, i-1}$, $(A_h)_{i, i}$ et $(A_h)_{i, i+1}$. En effet, en tenant en compte la définition des éléments de la base, nous avons

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} -\frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un calcul simple montre alors que

$$\begin{aligned} (A_h)_{0,0} &= a(\phi_0, \phi_0) = \int_0^1 \left((\phi'_0(x))^2 + \gamma(x) \phi_0^2(x) \right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left((\phi'_0(x))^2 + \gamma(x) \phi_0^2(x) \right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\left(-\frac{1}{h}\right)^2 + \gamma(x) \left(\frac{x_1-x}{h}\right)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} \gamma(x) (x_1 - x)^2 dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_h)_{N+1, N+1} &= a(\phi_{N+1}, \phi_{N+1}) = \int_0^1 \left((\phi'_{N+1}(x))^2 + \gamma(x) \phi_{N+1}^2(x) \right) dx \\ &= \int_{x_N}^{x_{N+1}} \left((\phi'_{N+1}(x))^2 + \gamma(x) \phi_{N+1}^2(x) \right) dx \\ &= \int_{x_N}^{x_{N+1}} \left(\left(\frac{1}{h}\right)^2 + \gamma(x) \left(\frac{x-x_N}{h}\right)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{x_N}^{x_{N+1}} \gamma(x) (x - x_N)^2 dx, \end{aligned}$$

et pour $i = 1, \dots, N$, on a

$$\begin{aligned}
(A_h)_{i,i} &= a(\phi_i, \phi_i) = \int_0^1 \left((\phi_i'(x))^2 + \gamma(x) \phi_i^2(x) \right) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left((\phi_i'(x))^2 + \gamma(x) \phi_i^2(x) \right) dx \\
&= \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma(x) (x - x_{i-1})^2 dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \gamma(x) (x_{i+1} - x)^2 dx,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(A_h)_{i,i+1} &= a(\phi_{i+1}, \phi_i) = \int_0^1 \left(\phi_i'(x) \phi_{i+1}'(x) + \gamma(x) \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) \right) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\phi_i'(x) \phi_{i+1}'(x) + \gamma(x) \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) \right) dx \\
&= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \gamma(x) (x_{i+1} - x) (x - x_i) dx.
\end{aligned}$$

La matrice A_h est symétrique, définie positive. Le système (4) admet donc une solution unique.

3. D'après le lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \|u - v_h\|_{H^1(0,1)} \quad \forall v - h \in V_h.$$

En choisissant $v_h = \Pi_h u \in V_h$, nous obtenons

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{H^1(0,1)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

De plus, vu que $f \in L^2(0, 1)$, on a $u \in H^2(0, 1)$ et

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}$$

où C est une constante positive indépendante de h .

4. La matrice de rigidité dépendant de γ , nous avons besoin d'approcher les intégrales du type

$$\int_{\text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j} \gamma(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx.$$

Cette approximation introduit une source d'erreur supplémentaire. La matrice étant mal conditionnée (quand h tend vers 0), il est important de choisir avec soin la méthode

d'intégration numérique. utilisant par exemple la méthode des trapèzes nous obtenons

$$\begin{aligned}
(A_h)_{0,0} &= \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} \gamma(x) (x_1 - x)^2 dx \\
&\approx \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \frac{h}{2} (\gamma(x_0) (x_1 - x_0)^2 + \gamma(x_1) (x_1 - x_1)^2) \\
&= \frac{1}{h} + \frac{h}{2} \gamma(x_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_h)_{N+1,N+1} &= \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{x_N}^{x_{N+1}} \gamma(x) (x - x_N)^2 dx \\
&\approx \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \frac{h}{2} (\gamma(x_N) (x_N - x_N)^2 + \gamma(x_{N+1}) (x_{N+1} - x_N)^2) \\
&= \frac{1}{h} + \frac{h}{2} \gamma(x_{N+1}),
\end{aligned}$$

et pour $i = 1, \dots, N$, on a

$$\begin{aligned}
(A_h)_{i,i} &= \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma(x) (x - x_{i-1})^2 dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \gamma(x) (x_{i+1} - x)^2 dx \\
&\approx \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \frac{h}{2} (\gamma(x_{i-1}) (x_{i-1} - x_{i-1})^2 + \gamma(x_i) (x_i - x_{i-1})^2) \\
&\quad + \frac{1}{h^2} \frac{h}{2} (\gamma(x_i) (x_{i+1} - x_i)^2 + \gamma(x_{i+1}) (x_{i+1} - x_{i+1})^2) \\
&= \frac{2}{h} + h \gamma(x_i),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(A_h)_{i,i+1} &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \gamma(x) (x_{i+1} - x) (x - x_i) dx \\
&= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \frac{h}{2} (\gamma(x_i) (x_{i+1} - x_i) (x_i - x_i) + \gamma(x_{i+1}) (x_{i+1} - x_{i+1}) (x_{i+1} - x_i)) \\
&= -\frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A_h est approchée par

$$\tilde{A}_h = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{2} \gamma(x_0) & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} + \frac{h}{2} \gamma(x_1) & -\frac{1}{h} & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} + \frac{h}{2} \gamma(x_N) & -\frac{1}{h} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} + \frac{h}{2} \gamma(x_{N+1}) \end{pmatrix}.$$

5. Considérons $\gamma = 0$. La forme bilinéaire n'étant pas nécessairement coercive sur $H^1(0,1)$, on ne peut plus appliquer le théorème de Lax-Milgram (ce qui ne veut pas

dire pour autant que le problème n'admet pas de solution faible). Si le problème (1) admet une solution u , alors il est facile de vérifier que toutes les fonctions de la forme $u + \text{constante}$ sont aussi solutions de (1). De la même manière, la matrice A_h correspondant à problème discret étant singulière, il n'est pas possible de garantir l'unicité de la solution pour le problème approché.

6i) On peut utiliser un relèvement R , par exemple un polynôme de degré 1 tel que $R(0) = \alpha$ et $R(1) = \beta$. Si u est une solution de (1), alors $\tilde{u} = u - R$ sera une solution d'un problème du même type avec des conditions aux limites homogènes. Appliquer alors la méthode d'approximation précédente.

ii) Une autre possibilité est de considérer $V_h = X_h^1 \cap H_0^1(0, 1)$.



MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Examen - 17 Janvier 2017

Durée 2h

Toutes les réponses doivent être justifiées

Exercice 1. On considère le problème de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} -\mu u'' + \sigma u = 0 & \text{dans } (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

où μ et σ sont deux constantes positives.

1. Montrer que la formulation variationnelle de (1) est de la forme

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(0, 1) \text{ avec } u(0) = 0 \text{ et } u(1) = 1, \text{ tel que} \\ a(u, v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \end{cases} \quad (2)$$

où a est une forme bilinéaire symétrique à déterminer.

2. En utilisant un relèvement approprié R des conditions au bord, montrer que (2) peut-être reformulée de la manière suivante

$$\begin{cases} \text{Chercher } \tilde{u} \in H_0^1(0, 1) \text{ tel que} \\ a(\tilde{u}, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \end{cases} \quad (3)$$

avec $u = \tilde{u} + R$ et où F est une forme linéaire à déterminer. Montrer que le problème (3) admet une solution unique dans $H_0^1(0, 1)$. En déduire que (2) admet une solution unique dans $H^1(0, 1)$.

3. On subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en N sous-intervalles de même longueur h . Écrire le problème approché correspondant à (2), obtenu par application de la méthode des éléments finis linéaires. Déterminer la matrice de rigidité et la matrice de masse correspondantes et montrer que le problème approché admet une unique solution u_h .

4. Montrer que si on dénote $u_i = \bar{u}_h(x_i)$, alors

$$\begin{cases} (\mathbb{P}e - 1) u_{i+1} + 2(1 + 2\mathbb{P}e) u_i + (\mathbb{P}e - 1) u_{i-1} = 0, & i = 1, \dots, N - 1 \\ u_0 = 0, \quad u_N = 1, \end{cases} \quad (4)$$

avec

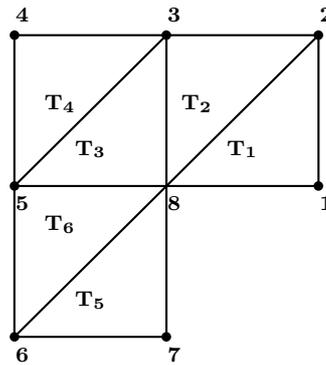
$$\mathbb{P}e = \frac{\sigma h^2}{6\mu}.$$

5. Chercher la solution de (4) sous la forme $u_i = \rho^i$. Montrer que

$$u_i = \frac{\left(\frac{1+2\mathbb{P}e+\sqrt{3\mathbb{P}e(\mathbb{P}e+2)}}{1-\mathbb{P}e} \right)^i - \left(\frac{1+2\mathbb{P}e-\sqrt{3\mathbb{P}e(\mathbb{P}e+2)}}{1-\mathbb{P}e} \right)^i}{\left(\frac{1+2\mathbb{P}e+\sqrt{3\mathbb{P}e(\mathbb{P}e+2)}}{1-\mathbb{P}e} \right)^N - \left(\frac{1+2\mathbb{P}e-\sqrt{3\mathbb{P}e(\mathbb{P}e+2)}}{1-\mathbb{P}e} \right)^N}$$

pour $i = 1, \dots, N$.

Exercice 2. Soit $\Omega =]-1, 1[\times]0, 1[\cup]-1, 0[\times]-1, 0[$ maillé suivant le figure suivante :



On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5)$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

1. Écrire la formulation variationnelle correspondant à (5). Montrer qu'il existe une solution unique dans $H^1(\Omega)$.
2. Écrire le problème approché correspondant, obtenu par application de la méthode des éléments finis linéaires.
3. Déterminer, sans calculer les coefficients, la forme des matrices élémentaires correspondant à la contribution de chacun des éléments finis. Assembler la matrice globale.
4. Déterminer la matrice locale correspondant au triangle T_1 .



MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Solution de l'examen - 17 Janvier 2017

Exercice 1. On considère le problème de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} -\mu u'' + \sigma u = 0 & \text{dans } (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

où μ et σ sont deux constantes positives.

1. Multipliant l'équation (1) par une fonction test $v \in H_0^1(0, 1)$ et intégrant, nous obtenons

$$\mu \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \sigma \int_0^1 u(x)v(x) dx = [u'(x)v(x)]_0^1 = 0.$$

Autrement dit, la formulation variationnelle de (1) est de la forme

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(0, 1) \text{ avec } u(0) = 0 \text{ et } u(1) = 1, \text{ tel que} \\ a(u, v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$a(u, v) = \mu \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \sigma \int_0^1 u(x)v(x) dx.$$

2. Les conditions au bord étant de type Dirichlet non-homogènes, nous considérons un relèvement approprié. Soit $R : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la fonction définie par $R(x) = x$. Il est clair que $R(0) = 0$ et $R(1) = 1$. De plus, posant $u = \tilde{u} + R$, il est facile de vérifier que (2) peut-être reformulée de la manière suivante

$$\begin{cases} \text{Chercher } \tilde{u} \in V = H_0^1(0, 1) \text{ tel que} \\ a(\tilde{u}, v) = F(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (3)$$

où F est la forme linéaire définie par

$$\begin{aligned} F(v) &= -a(R, v) = -\mu \int_0^1 v'(x) dx - \sigma \int_0^1 xv(x) dx \\ &= \mu (v(0) - v(1)) - \sigma \int_0^1 xv(x) dx = -\sigma \int_0^1 xv(x) dx. \end{aligned}$$

Des arguments classiques, avec l'inégalité de Poincaré, montrent que

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\leq \mu \|w'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \sigma \|w\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (\mu + c\sigma) |w|_V |v|_V \quad \forall w, v \in V \end{aligned}$$

prouvant que la forme bilinéaire a est continue sur V . De plus, vu que

$$a(v, v) = \mu \|v'\|_{L^2}^2 + \sigma \|v\|_{L^2}^2 \geq \mu |v|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

nous déduisons que a est coercive sur V . Finalement, utilisant l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left| \sigma \int_0^1 xv(x) dx \right| \leq \sigma |R|_{L^2} |v|_{L^2} \\ &\leq c\sigma |v|_V \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application linéaire F est continue sur V . Le théorème de Lax-Milgram implique alors que le problème variationnel (3) admet une solution unique $\tilde{u} \in V$.

Il est clair que si \tilde{u} est solution de (3), alors $u = R + \tilde{u}$ est solution de (2). Pour prouver l'unicité, supposons que le problème (2) admet deux solutions u_1 et u_2 dans $H^1(0, 1)$. Il est alors clair que $u_1 - u_2$ appartient à V et que

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

En particulier, pour $v = u_1 - u_2$, nous obtenons

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \mu \|u_1' - u_2'\|_{L^2}^2 + \sigma \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 = 0$$

i.e. $u_1 = u_2$.

3. Le problème approché associé à (2) est donné par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in X_h^1 \text{ avec } u_h(x_0) = 0 \text{ et } u_h(x_N) = 1, \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (4)$$

où $V_h = X_h^1 \cap H_0^1(0, 1)$. Soit $(\phi_i)_{i=0, \dots, N}$ la base de Lagrange de X_h^1 . Dans la formulation variationnelle (4), on choisit successivement $v_h = \phi_i$, $i = 1, \dots, N - 1$. En prenant en compte le fait que $u_h(x_0) = 0$ et $u_h(x_N) = 1$, il en résulte que

$$a \left(\sum_{j=1}^N u_h(x_j) \phi_j, \phi_i \right) = 0 \quad 1 \leq i \leq N - 1.$$

La forme a étant bilinéaire, il vient que

$$\sum_{j=1}^{N-1} u_h(x_j) a(\phi_j, \phi_i) + a(\phi_N, \phi_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

Donc $U_h = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq N-1}$ est solution du système linéaire

$$A_h U_h = B_h, \quad (5)$$

où la matrice A_h est donnée par $A_h = (a(\phi_j, \phi_i))_{1 \leq i, j \leq N-1}$ et où le second membre est donné par $B_h = (-a(\phi_N, \phi_i))_{1 \leq i \leq N-1}$.

Comme on le sait, les supports de ϕ_i et ϕ_j sont disjoints quand $|i - j| > 1$, i.e.

$$\text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j = \emptyset \quad \text{si } j \neq i, \quad j \neq i-1, \quad j \neq i+1.$$

Une conséquence directe est que la plupart des éléments de A_h sont nuls. Les éléments non nuls correspondants à $(A_h)_{i, i-1}$, $(A_h)_{i, i}$ et $(A_h)_{i, i+1}$. En effet, en tenant en compte la définition des éléments de la base, nous avons

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} -\frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un calcul simple montre alors que pour $i = 1, \dots, N-1$, on a

$$\begin{aligned} (A_h)_{i, i} &= a(\phi_i, \phi_i) = \int_0^1 (\mu (\phi'_i)^2 + \sigma \phi_i^2) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\mu (\phi'_i)^2 + \sigma \phi_i^2) dx \\ &= \frac{2\mu}{h} + \frac{2\sigma h}{3}. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, \dots, N-2$, on a

$$\begin{aligned} (A_h)_{i, i+1} &= a(\phi_{i+1}, \phi_i) = \int_0^1 (\mu \phi'_i \phi'_{i+1} + \sigma \phi_i \phi_{i+1}) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\mu \phi'_i \phi'_{i+1} + \sigma \phi_i \phi_{i+1}) dx \\ &= -\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{6}. \end{aligned}$$

Finalement, comme A_h est symétrique, il vient que

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{h} + \frac{2\sigma h}{3} & -\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{6} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{6} & \frac{2\mu}{h} + \frac{2\sigma h}{3} & -\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{6} & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & -\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{6} & \frac{2\mu}{h} + \frac{2\sigma h}{3} & -\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{6} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{6} & \frac{2\mu}{h} + \frac{2\sigma h}{3} \end{pmatrix}.$$

De la même manière, nous pouvons montrer que

$$\begin{cases} (B_h)_i = 0 & i = 1, \dots, N-2, \\ (B_h)_{N-1} = -a(\phi_N, \phi_{N-1}) = -\left(-\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{6}\right). \end{cases}$$

La matrice A_h est symétrique, définie positive. Le système (5) admet donc une solution unique.

4. Il est facile de voir que si on dénote $u_i = u_h(x_i)$, alors

$$\begin{cases} \left(-\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{6}\right) u_{i+1} + 2\left(\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{3}\right) u_i + \left(-\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{6}\right) u_{i-1} = 0, & i = 1, \dots, N-1 \\ u_0 = 0, \quad u_N = 1. \end{cases}$$

Multipliant ces équations par $\frac{h}{\mu}$ nous obtenons finalement

$$\begin{cases} (\mathbb{P}e - 1) u_{i+1} + 2(1 + 2\mathbb{P}e) u_i + (\mathbb{P}e - 1) u_{i-1} = 0, & i = 1, \dots, N-1 \\ u_0 = 0, \quad u_N = 1, \end{cases}$$

avec

$$\mathbb{P}e = \frac{\sigma h^2}{6\mu}.$$

5. Ce système est une équation aux différences linéaires à trois termes. On peut trouver des solutions du type $u_i = \rho^i$. Ainsi, après substitution, on obtient

$$(\mathbb{P}e - 1) \rho^2 + 2(1 + 2\mathbb{P}e) \rho + (\mathbb{P}e - 1) = 0$$

dont les racines sont

$$\rho_1 = \frac{1+2\mathbb{P}e - \sqrt{3\mathbb{P}e(\mathbb{P}e+2)}}{1-\mathbb{P}e} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{1+2\mathbb{P}e + \sqrt{3\mathbb{P}e(\mathbb{P}e+2)}}{1-\mathbb{P}e}.$$

La solution est alors de la forme

$$u_i = C_1 \rho_1^i + C_2 \rho_2^i$$

où les constantes C_1 et C_2 sont données par les conditions aux limites $u_0 = 0$ et $u_N = 1$, i.e.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \rho_1^N + C_2 \rho_2^N = 1 \end{cases} \iff C_2 = -C_1 = \frac{1}{\rho_2^N - \rho_1^N}.$$

Ainsi,

$$u_i = \frac{\rho_2^i - \rho_1^i}{\rho_2^N - \rho_1^N}.$$

Exercice 2. Soit $\Omega =]-1, 1[\times]0, 1[\cup]-1, 0[\times]-1, 0[$. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6)$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

1. C'est un problème de Poisson avec condition au bord de type Neumann. La formulation variationnelle associée, définie dans $V = H^1(\Omega)$, est donnée par

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V, \quad (7)$$

où

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) + (u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx dy$$

$$F(v) = (f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx dy.$$

La forme bilinéaire a satisfaisant

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\leq \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|w\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall w, v \in V, \end{aligned}$$

est continue sur V . De plus, vu que

$$a(v, v) = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

nous déduisons que a est coercive sur V . Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} |F(v)| = |(f, v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application linéaire F est continue sur V . Le théorème de Lax-Milgram implique alors que le problème variationnel admet une solution unique $u \in V$.

2. Nous subdivisons Ω en 6 triangles. Les 6 éléments et 8 noeuds sont numérotés comme dans la figure. Le problème approché associé, défini sur l'espace des fonctions continues, affines par éléments triangulaires, i.e.

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \mid v_h|_{T_i} \in \mathbb{P}_1, \forall i = 1, \dots, 6\}$$

est donné par

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (8)$$

D'après ce qui précède, ce problème admet une solution unique dans V_h . Sa décomposition dans la base de Lagrange associée est donnée par

$$u_h = \sum_{i=1}^8 u_h(S_i) \phi_i.$$

Nous savons aussi que $U_h = (u_h(S_j))_{1 \leq j \leq 8}$ est solution du système linéaire

$$A_h U_h = F_h, \quad (9)$$

où la matrice A_h est donnée par $A_h = (a(\phi_j, \phi_i))_{1 \leq i, j \leq 8}$ et où le second membre est donné par $F_h = (F(\phi_i))_{1 \leq i \leq 8}$.

3. Maintenant, nous déterminons (sans calculer les coefficients), la forme des matrices élémentaires correspondant à la contribution de chacun des éléments et leur extension en des matrices 8×8 .

Élément T_1 . Les sommets correspondants sont 1, 2 et 8. L'extension est de la forme

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{23}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33}^1 \end{pmatrix}.$$

Élément T_2 . Les sommets correspondants sont 2, 3 et 8. L'extension est de la forme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}^2 & A_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13}^2 \\ 0 & A_{21}^2 & A_{22}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{23}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{31}^2 & A_{32}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33}^2 \end{pmatrix}.$$

Élément T_3 . Les sommets correspondants sont 3, 5 et 8. L'extension est de la forme

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11}^3 & 0 & A_{12}^3 & 0 & 0 & A_{13}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^3 & 0 & A_{22}^3 & 0 & 0 & A_{23}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31}^3 & 0 & A_{32}^3 & 0 & 0 & A_{33}^3 \end{pmatrix}.$$

Élément T_4 . Les sommets correspondants sont 3, 4 et 5. L'extension est de la forme

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11}^4 & A_{12}^4 & A_{13}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^4 & A_{22}^4 & A_{23}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31}^4 & A_{32}^4 & A_{33}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Élément T_5 . Les sommets correspondants sont 6, 7 et 8. L'extension est de la forme

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11}^5 & A_{21}^5 & A_{13}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^5 & A_{22}^5 & A_{23}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{31}^5 & A_{32}^5 & A_{33}^5 \end{pmatrix}.$$

Élément T_6 . Les sommets correspondants sont 5, 6 et 8. L'extension est de la forme

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11}^6 & A_{12}^6 & 0 & A_{13}^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^6 & A_{22}^6 & 0 & A_{23}^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{31}^6 & A_{32}^6 & 0 & A_{33}^6 \end{pmatrix}.$$

Prenant en compte le fait que ces matrices sont symétriques, nous obtenons après assemblage

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13}^1 \\ A_{12}^1 & A_{22}^1 + A_{11}^2 & A_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{23}^1 + A_{13}^2 \\ 0 & A_{12}^2 & A_{22}^2 + A_{11}^3 + A_{11}^4 & A_{12}^4 & A_{12}^3 + A_{13}^4 & 0 & 0 & 0 & A_{23}^2 + A_{13}^3 \\ 0 & 0 & A_{21}^4 & A_{22}^4 & A_{23}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{12}^3 + A_{13}^4 & A_{23}^4 & A_{22}^3 + A_{33}^4 + A_{11}^6 & A_{12}^6 & 0 & 0 & A_{23}^3 + A_{13}^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^6 & A_{11}^5 + A_{22}^6 & A_{21}^5 & A_{13}^5 + A_{23}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^5 & A_{22}^5 & A_{23}^5 & 0 \\ A_{13}^1 & A_{23}^1 + A_{13}^2 & A_{23}^2 + A_{13}^3 & 0 & A_{23}^3 + A_{13}^6 & A_{13}^5 + A_{23}^6 & A_{23}^5 & \sum_{i=1}^6 A_{33}^i - A_{33}^4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Soient $S_1^1 = (0, 0)$, $S_2^1 = (1, 0)$ et $S_3^1 = (1, 1)$ les sommets du triangle T_1 . La matrice de rigidité élémentaire est donnée par

$$\mathcal{K}^1 = \frac{1}{4|T_1|} \begin{pmatrix} |\overrightarrow{S_2^1 S_3^1}|^2 & \overrightarrow{S_1^1 S_3^1} \cdot \overrightarrow{S_3^1 S_2^1} & \overrightarrow{S_1^1 S_2^1} \cdot \overrightarrow{S_2^1 S_3^1} \\ \overrightarrow{S_1^1 S_3^1} \cdot \overrightarrow{S_3^1 S_2^1} & |\overrightarrow{S_1^1 S_3^1}|^2 & \overrightarrow{S_1^1 S_3^1} \cdot \overrightarrow{S_2^1 S_1^1} \\ \overrightarrow{S_1^1 S_2^1} \cdot \overrightarrow{S_2^1 S_3^1} & \overrightarrow{S_1^1 S_3^1} \cdot \overrightarrow{S_2^1 S_1^1} & |\overrightarrow{S_1^1 S_2^1}|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule

$$\int_{T^1} \lambda_r^1 \lambda_s^1 dx dy = \begin{cases} \frac{|T_1|}{6} & \text{si } r = s, \\ \frac{|T_1|}{12} & \text{si } r \neq s, \end{cases}$$

nous obtenons la matrice de masse élémentaire

$$M^1 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice élémentaire correspondante au triangle T_1 est alors donnée par

$$A^1 = \mathcal{K}^1 + M^1.$$