Cor Math 1 (ST)

Ch 4. Application aux fonctions élémentaires

Les fonctions classiques : exp, ln, cos, sin, tan, sont déjà connues du lecteur (Terminale).
Nous ajoutons de plus dans ce chapitre des nouvelles fonctions : Ch, Sh, Th, arccos, arcsin, argch, argsh, argth.

4.1 Logarithme népérien :

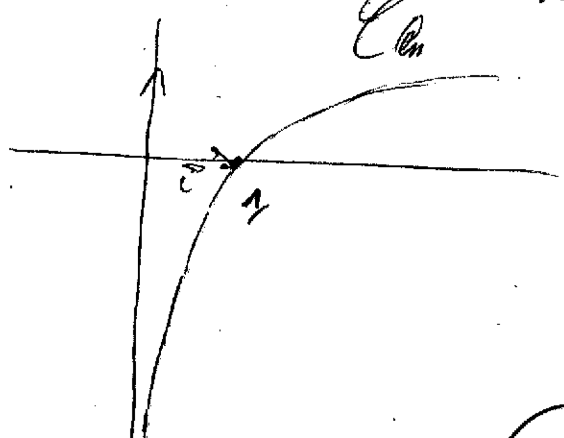
Définion 4.1.

. On appelle logarithme népérien et on note ln la fonction définie de la façon suivante :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln(x)$$

. On a $\ln 1 = 0$,
ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \ln'(x) = \frac{1}{x}$

Propriété 4.1.



1. $\exists\ e \simeq 2,71 : \ln(e) = 1$

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $d, c \in \mathbb{R}_-^*$ alors

2. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
4. $\forall n \in \mathbb{Z} : \ln(a^n) = n \ln a$;

Cor Math 1 (ST)

Propriété 4.2 :

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, 4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$,

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0$, $p \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 4.2 :

On appelle logarithme de base $\underline{\underline{a}}$, et on note $\log_a$, ($a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$) la fonction définie de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{Log}_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \end{aligned}$$

En particulier : $\operatorname{Log}_a = \ln$ $(\operatorname{Log}_e(x) = \ln(x))$

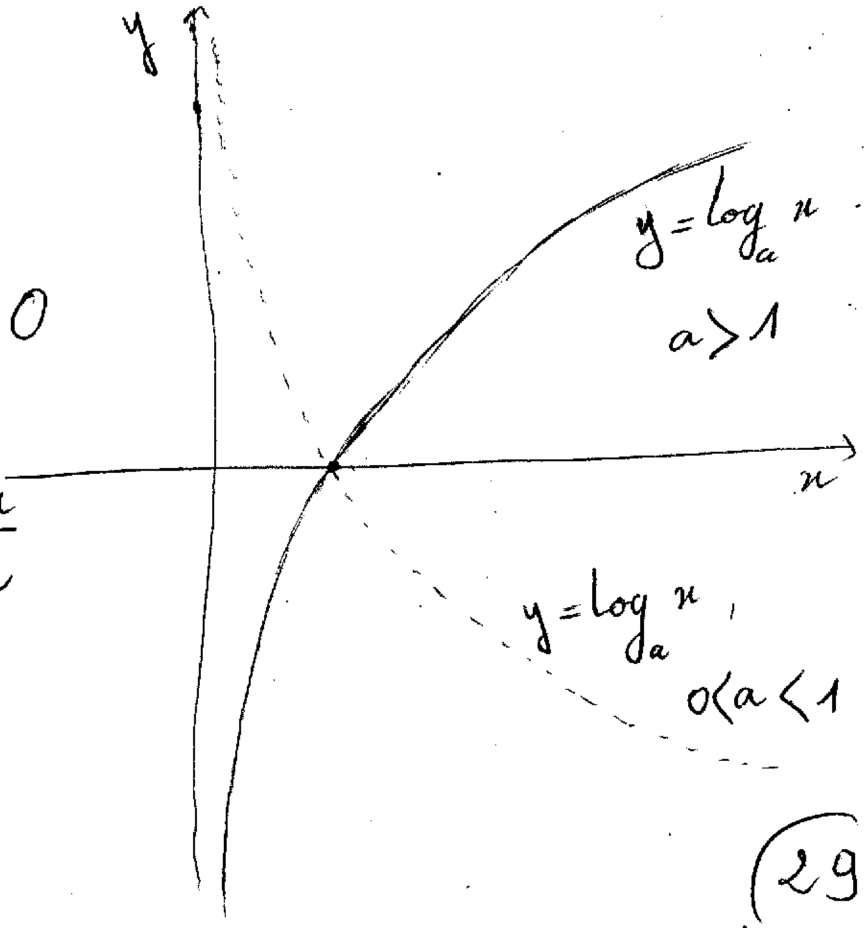
Exemple :

1. $f(x) = \operatorname{Log}_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} > 0$$

2. $g(x) = \operatorname{Log}_{1/2}(x) = -\frac{\ln x}{\ln 2}$

$$g(x) = -f(x)$$



4.2. Exponentielle :

Puisque $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, alors ($\ln$) elle admet une fonction réciproque appelée exponentielle, notée $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

Propriété 4.3 :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \ (y = e^x \Longleftrightarrow x = \ln y$
2. $e^0 = 1$ car $\ln(1) = 0$
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \ e^{(a+b)} = e^a \cdot e^b, \ e^{(a-b)} = \dfrac{e^a}{e^b}$
4. $\forall \ a \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z} : \ e^{(na)} = (e^a)^n$
5. $\forall \ x \in \mathbb{R}, \ (e^x)' = \dfrac{1}{\ln'(e^x)} = e^x$

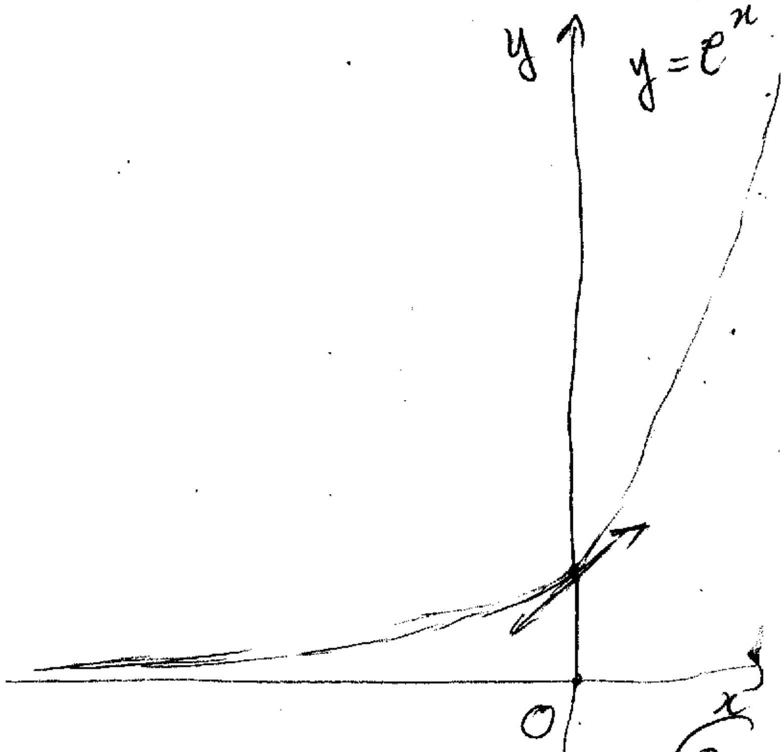
Propriété 4.4 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, On a alors :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \ (a \in \mathbb{R})$
- $\forall \ \alpha > 0$, on a alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{-\alpha}} = +\infty.$$



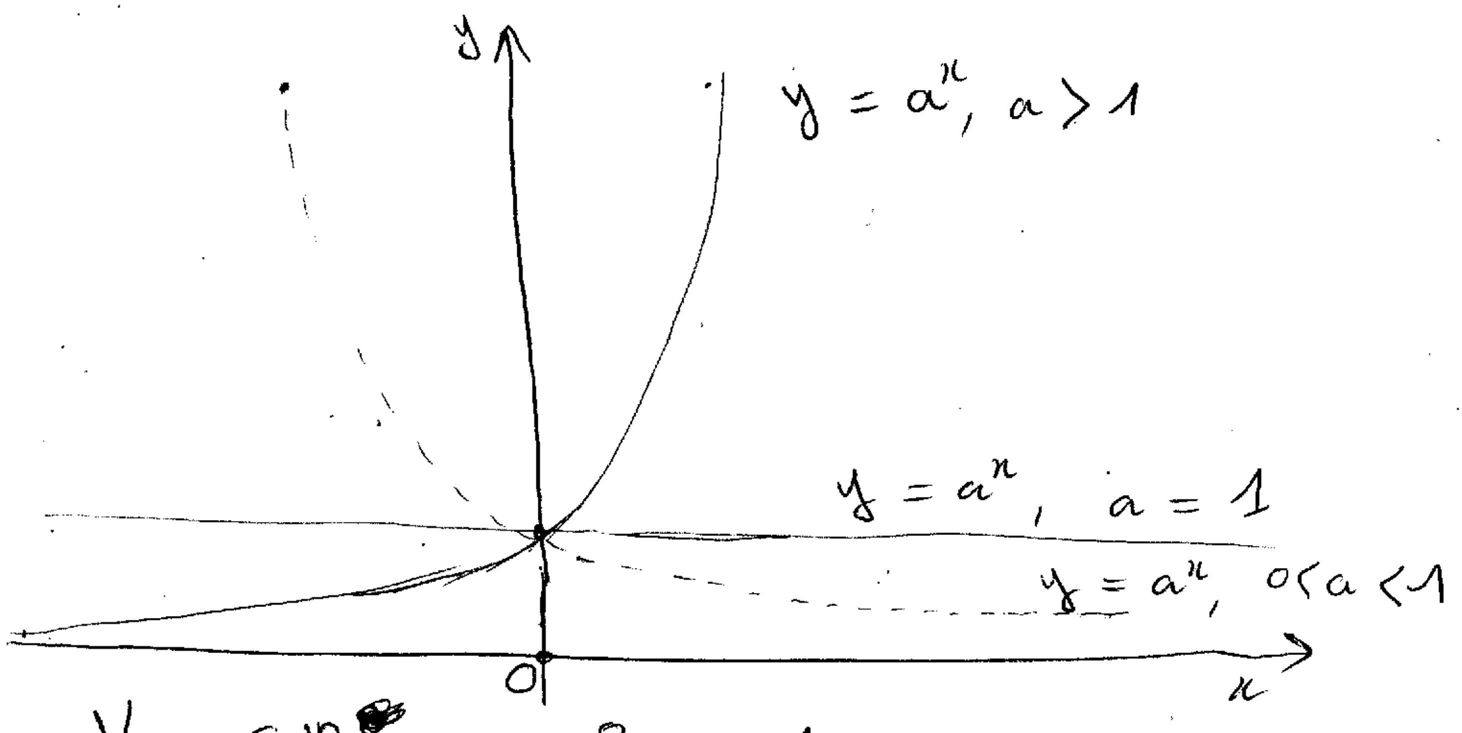
Définition 4.3.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. On appelle exponentielle de base a, et on note $\exp_a$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ réciproque de $\log_a$. On a ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \ (y = \exp_a x \iff x = \log_a y)$$

Proposition 4.1.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp_a x = e^{x \ln a}$
2. $\forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \exp_{\frac{1}{a}}(x) = \dfrac{1}{\exp_a x}$
3. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ a^x = \exp_a x$

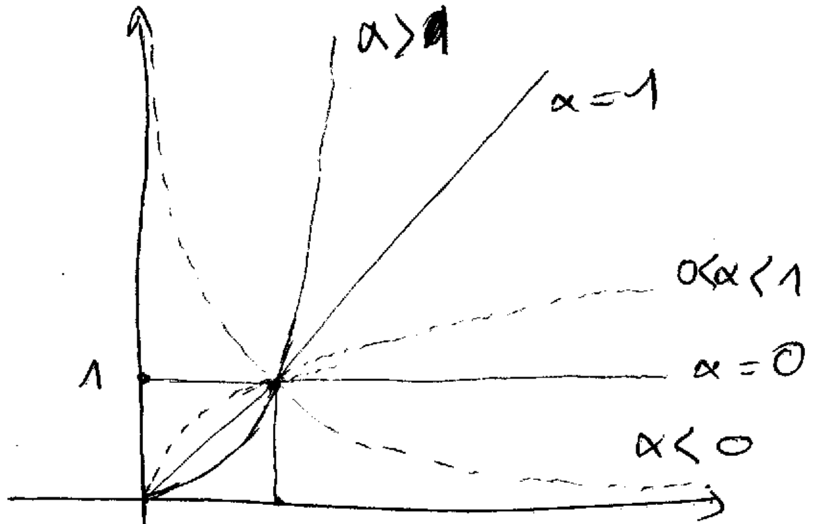


- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad a^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1^x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0^x = 0$
- $0^0 = 1$

4.3. Puissances :

Définition 4.4 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle puissance d'exposant α la fonction notée P_α de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$



4.4. Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles.

Proposition 4.2 :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

2. $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$

3. $\forall a \in]1, +\infty[$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x |x|^\alpha = 0$

4. $\forall \alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$

4.5. Fonctions circulaires réciproques :

1. Arc sin

La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ est continue, strictement croissante alors elle (sin) admet une fonction réciproque notée :

$\text{Arc sin} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Math 1 (ST)

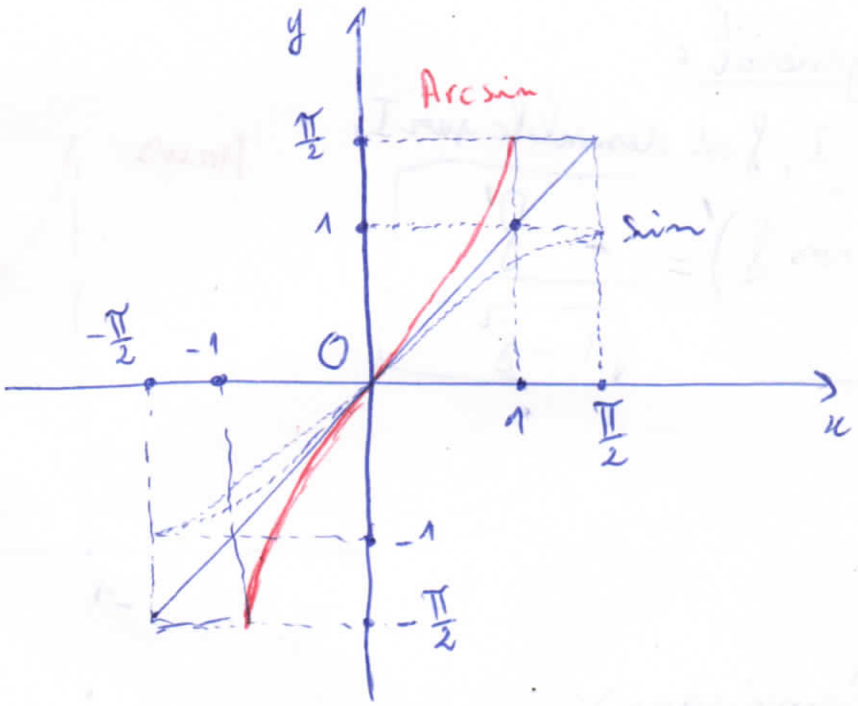
- $\forall (y, x) \in [-1, 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $(y = \sin x \iff x = \text{Arcsin}\, y)$
- Arc sin est impaire
- Puisque sin est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que ($\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\sin' x = \cos x \neq 0$), alors Arc sin est dérivable sur $]-1, 1[$ et: $\forall y \in]-1, 1[$, $\text{Arc}\sin' y = \dfrac{1}{\sin'(\text{Arcsin}\, y)} = \dfrac{1}{\cos(\text{Arcsin}\, y)} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$

$\left(\text{ou } \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

En général,

$x \in I$, f est dérivable sur I

$$(\text{Arc}\sin f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$$



Remarques,

1. $\forall y \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arcsin}\, y) = y$
2. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}(\sin x) = x$

2. Arccos

La fonction $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ est continue, strictement décroissante alors elle ($\cos$) admet une fonction réciproque, notée $\text{Arccos} : [-1,1] \to [0,\pi]$

- $\forall (y,x) \in [-1,1]\times[0,\pi],\ (y = \cos x \iff x = \text{Arccos}\, y)$
- Arccos n'est ni paire ni impaire.
- Puisque $\cos$ est dérivable sur $]0,\pi[$ et que $(\forall x \in]0,\pi[, \cos' x = \sin x \neq 0)$ alors Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

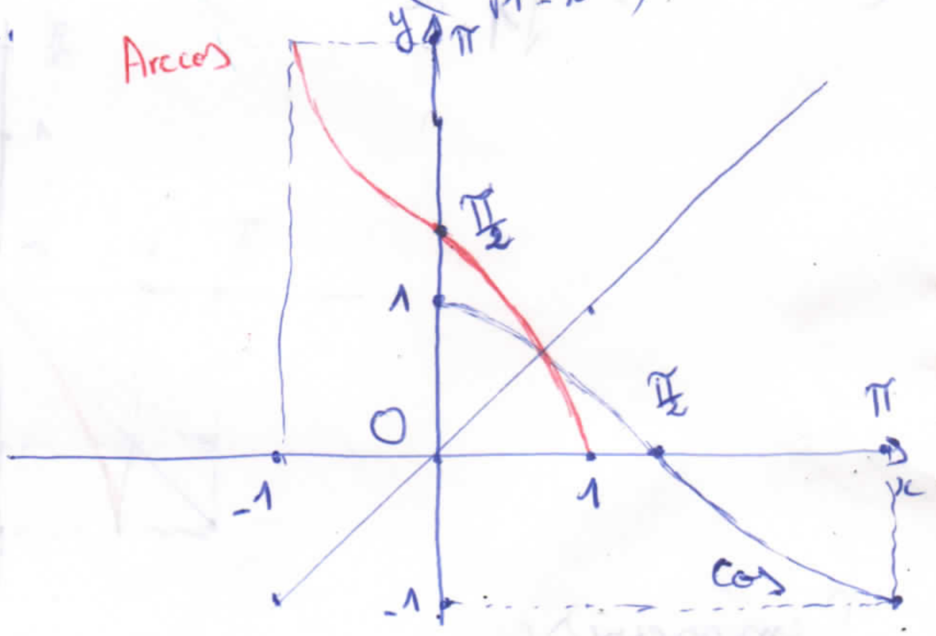
$$\forall y \in]-1,1[,\ \text{Arccos}' y = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}\, y)} = \frac{-1}{\sin(\text{Arccos}\, y)} = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$$\left(\text{ou } \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

En général :

$\forall x \in I$, f est dérivable sur I,

$$\boxed{(\text{Arccos}\, f)' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}}$$



Remarques :

1. $\forall x \in [0,\pi] : \text{Arccos}(\cos x) = x$
2. $\forall y \in [-1,1] : \cos(\text{Arccos}\, y) = y$
3. $\forall y \in [-1,1] : \text{Arccos}\, y = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, y$

3. Arc tan

La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante alors elle (tan) admet une fonction réciproque, notée :

$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

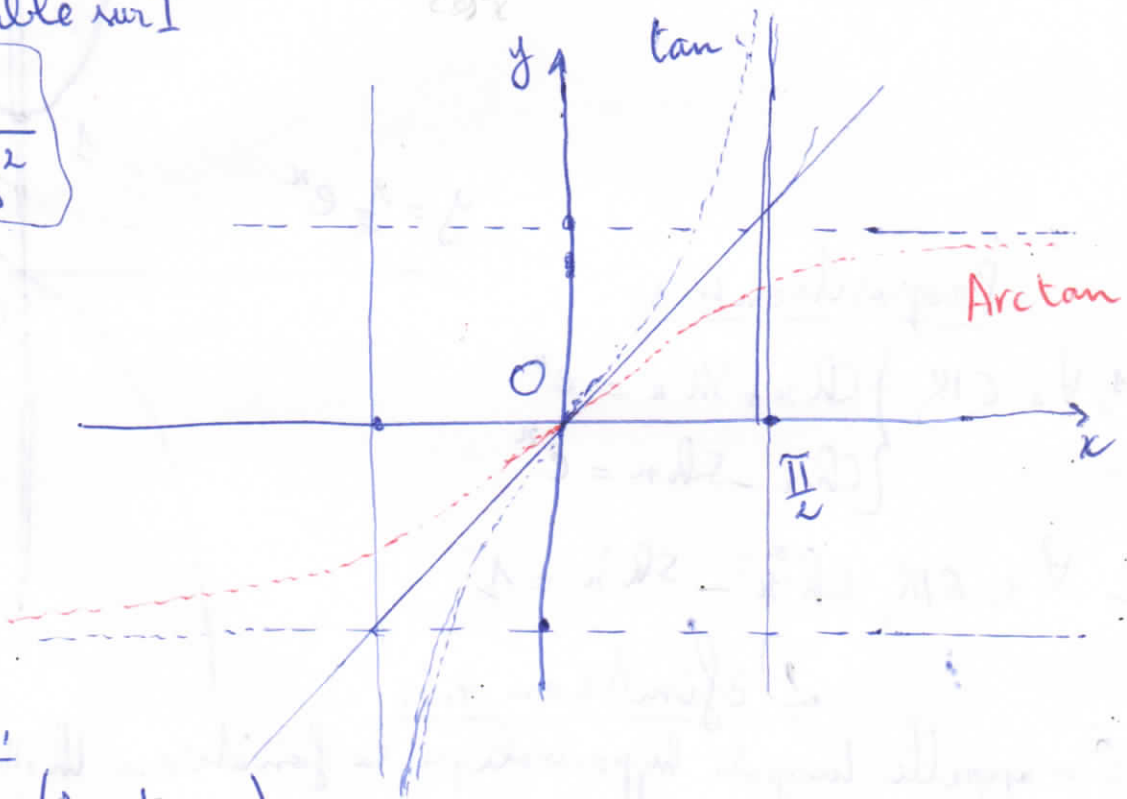
- $\forall (y, x) \in \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ (y = \tan x \iff x = \text{Arctan}\, y)$
- Arctan est impaire
- Puisque tan est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $(\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \tan' x = 1 + \tan^2 x \neq 0)$ alors Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$

et, $\forall y \in \mathbb{R}$: $\text{Arctan}' y = \dfrac{1}{\tan'(\text{Arctan}\, y)} = \boxed{\dfrac{1}{1 + y^2}}$ $\left(\text{ou } \dfrac{1}{1 + x^2}\right)$

En général :

$\forall x \in I$, f est dérivable sur I

$$\boxed{(\text{Arctan} f)' = \frac{f'}{1 + f^2}}$$



Remarques :

1. $\forall y \in \mathbb{R}, \ \tan(\text{Arctan}\, y) = y$
2. $\forall x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \text{Arctan}(\tan x) = x$
3. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \ \text{Arctan}\, y + \text{Arctan}\, \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sgn}\, y$

4.6 Fonctions hyperboliques directes :

Définition 4.5 :

On appelle : sinus hyperbolique la fonction : $Sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto Sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

cosinus — — : $Ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

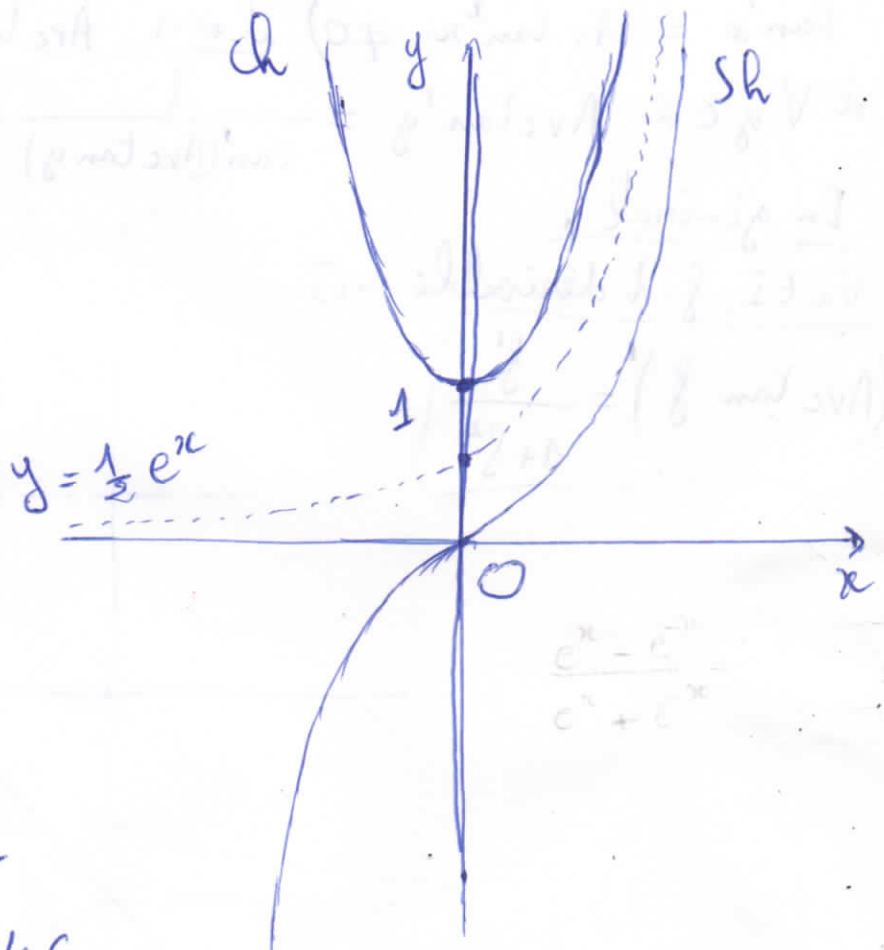
$$x \mapsto Ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- Les fonctions Sh et Ch sont de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et : $Sh' = Ch$, $Ch' = Sh$,

Sh est impaire et Ch est paire.

On a :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ Ch\,x > 0$
- $Sh\,0 = 0,\ Ch\,0 = 1$
- $Sh'\,0 = 1,\ Ch'\,0 = 0$



Proposition 4.3 :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} Ch\,x + Sh\,x = e^x \\ Ch\,x - Sh\,x = e^{-x} \end{cases}$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ Ch^2 x - Sh^2 x = 1$

Définition 4.6 :

On appelle tangente hyperbolique la fonction $th : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto th\,x = \frac{Sh\,x}{Ch\,x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Cotangente — — $Coth : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto Coth\,x = \frac{1}{th\,x} = \frac{Ch\,x}{Sh\,x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

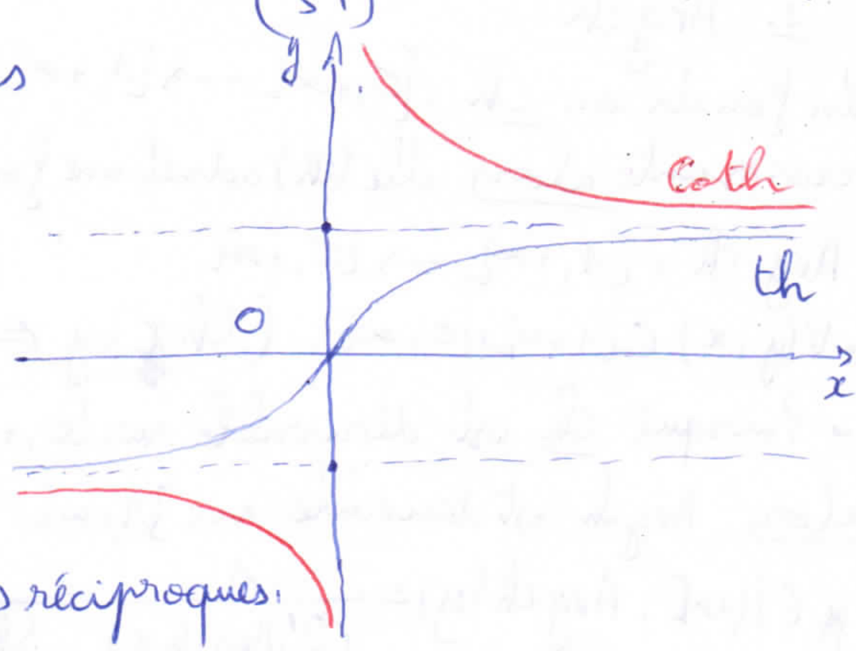
Les fonctions th et $coth$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ respectivement.

$$th' = \frac{1}{Ch^2} = 1 - th^2 \quad / \quad Coth' = \frac{-1}{Sh^2} = 1 - coth^2$$

Math 1

• th, coth sont impaires

(ST)



4.7. Fonctions hyperboliques réciproques.

1. Argsh

La fonction $Sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, alors elle (Sh) admet une fonction réciproque, notée $Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

• $\forall (y, x) \in \mathbb{R}^2$, $\left(y = Sh\, x \iff x = Argsh\, y \right)$

• Argsh est impaire.

• Puisque Sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que ($\forall x \in \mathbb{R}$, $Sh'x = Ch\, x \geq 1$) alors Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$:

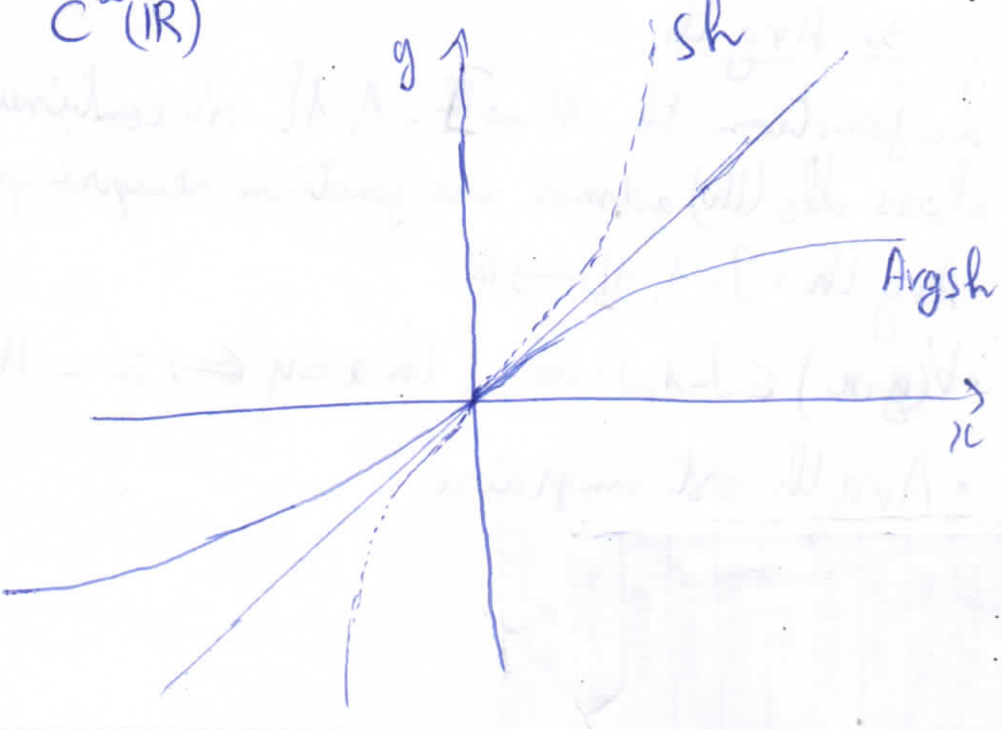
$$Argsh'(y) = \frac{1}{Sh'(Argsh\, y)} = \frac{1}{Ch(Argsh\, y)} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}} \quad \left(\text{ou } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

• Argsh est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$

En général,

$\forall x \in I$, f est dérivable sur I

$$\boxed{\left(Argsh\, f \right)' = \frac{f'}{\sqrt{1+f^2}}}$$



• $\forall y \in \mathbb{R}$:

$Argsh\, y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2} \right)$

2. Arg ch

La fonction Ch : $[0,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[$ est continue, strictement croissante alors elle (ch) admet une fonction réciproque notée

$\text{Arg ch} : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$

- $\forall (y,x) \in [1,+\infty[\times [0,+\infty[, \ (\text{Ch}\, x = y \Longleftrightarrow x = \text{Arg ch}\, y)$
- Puisque ch est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que ($\forall x \in]0,+\infty[$, $\text{Ch}'x = \text{Sh}x \neq 0$)

alors Argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et :

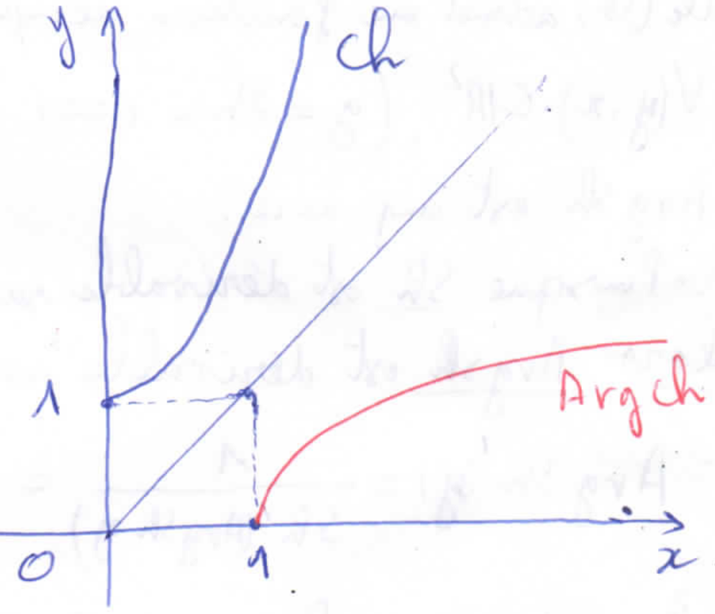
$$\boxed{\forall y \in]1,+\infty[, \ \text{Arg ch}'(y) = \frac{1}{\text{Ch}'(\text{Arg ch}\, y)} = \frac{1}{\text{Sh}(\text{Arg ch}\, y)} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}}$$

- $\text{Arg ch} \in C^\infty(]1,+\infty[)$ $\left(\text{ou } \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

En général :

$\forall x \in I$, f est dérivable sur I

$$\boxed{(\text{Arg ch}\, f)' = \frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}}$$



- $\forall y \in [1,+\infty[$,

$\text{Arg ch}\, y = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$

3. Arg th

La fonction th : $\mathbb{R} \rightarrow]-1,1[$ est continue, strictement croissante alors elle (th) admet une fonction réciproque notée

$\text{Arg th} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

- $\forall (y,x) \in]-1,1[\times \mathbb{R}, \ (\text{th}\, x = y \Longleftrightarrow x = \text{Arg th}\, y)$
- Arg th est impaire

Math 1 (ST)

. Puisque th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R},\ th' x = 1 - th^2 x > 0)$ alors Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et, $\forall y \in]-1,1[$

$$Argth' y = \frac{1}{th'(Argth\, y)} = \boxed{\frac{1}{1-y^2}} \left(ou\ \frac{1}{1-x^2}\right)$$

En général,

$\forall x \in I$, f est dérivable sur I.

$$\boxed{(Argth\, f)' = \frac{f'}{1-f^2}}$$

. $Argth \in C^\infty]-1,1[$

. $\forall y \in]-1,1[$,

$$\boxed{Argth\, y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$$