Examen de Maths 1

(Durée : 01h-30 min)

Exercice 1 : (5 points)

Soit f une fonction définie de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ par :

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} 2k = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot n$$

2 1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f(n) = n(n+1) = n^2 + n$

1,5 2) Montrer que f est injective (On montre que : $\forall\, n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}^* : n_1 < n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)$).

1,5 3) L'application f est-elle surjective (par contre-exemple)? Bijective ?

Exercice 2 : (5 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + x & si \quad x \leq 0, \\ \cos x + \sin x & si \quad x > 0. \end{cases}$$

2 1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

1,5 2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. (Vous pouvez utiliser la règle de l'Hôpital)

1,5 3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[-1,0]$ une solution unique.

Exercice 3 : (5 points)

Soit la fonction suivante : $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

2 1) Montrer que f est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

2) Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$. 1

3) Calculer la dérivée de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Conclure si f est croissante ou décroissante sur $]1, +\infty[$? 2

Exercice 4 : (5 points)

1,5 1) Peut-on appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$? Calculer cette limite.

2) a. Donner les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions $\sin x^3$, $e^{\sin x}$ 2

b. En déduire la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x^3}$. 1,5

Indication :

$\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$, $\quad (\arccos f)' = \dfrac{-f'}{\sqrt{1 - f^2}}$.

On donne les développements limités suivantes :

$e^x \quad = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + 0(x^3)$, $\qquad \sin x \ = x - \dfrac{x^3}{3!} + 0(x^3)$

التمرين 1:

ليكن التابع f المعرف من N^* نحو N^* بـ:

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}2k=2\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+2\cdot n$$

1) برهن بالتراجع على انه من أجل كل $n\in N^*$: $f(n)=n(n+1)=n^2+n$

2) برهن أن f متباين (نبرهن أنه : $\forall n_1,n_2\in N^* : n_1<n_2 \Rightarrow f(n_1)<f(n_2)$).

3) هل التابع f غامر (بمثال مضاد)؟ تقابلي؟

التمرين 2:

نعتبر التابع f المعرف من $\Re$ نحو $\Re$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}+x & si \quad x\le 0,\\ \cos x+\sin x & si \quad x>0.\end{cases}$$

1) أدرس استمرار f على $\Re$.

2) أدرس قابلية اشتقاق f على $\Re$. (يمكنكم استعمال قاعدة لوبيتال)

3) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[-1,0]$.

التمرين 3:

ليكن التابع التالي : $f(x)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

1) برهن أن f معرف و مستمر على $]1,+\infty[$.

2) أحسب نهايات f عند 1 و عند $+\infty$.

3) أحسب مشتق f على المجال $]1,+\infty[$. استنتج إذا كان f متزايد أو متناقص على $]1,+\infty[$.

التمرين 4:

1) هل يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال من أجل حساب نهاية $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$ ؟ أحسب هذه النهاية.

2) a. أعطي النشر المحدود حتى الرتبة 3 في جوار 0 للتوابع $\sin x^3$ ، $e^{\sin x}$.

b. استنتج نهاية $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{\sin x^3}$.

إرشاد :

$$\arccos:[-1,1]\to[0,\pi],\quad (\arccos f)'=\frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}.$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+0(x^3),\qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+0(x^3)$$

Math 1 Corrigé - Examen (ST)

Ex 01 :

1)

Pour $n \geq 1$, notons $P(n)$ la proposition suivante

$$2.1+2.2+\dots+2.n = n(n+1)$$

Initialisation

Pour $n=1$ nous avons

$$2 = 2.1 = 1.(1+1) = 2$$ 0,5

Donc $P(1)$ est vraie

Hérédité

Supposons que $P(n)$ est vraie

$$2.1+2.2+\dots+2.n = n(n+1)$$

Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie

$$2.1+2.2+\dots+2.n+2.(n+1) \overset{?}{=} (n+1)(n+2)$$

On a

$$\underbrace{2.1+2.2+\dots+2.n}+2.(n+1) = n(n+1)+2(n+1)$$
$$=(n+1)(n+2)$$ 1,5

Donc $P(n+1)$ est vraie, par suite $P(n)$ est vraie

2)

- Injective

Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, $n_1 < n_2$ ... ① alors

$(n_1+1) < (n_2+1)$ ... ②

de ① et ② : $n_1(n_1+1) < n_2(n_2+1) \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)$

donc f est injective (1,5)

- Surjective

$\forall m \in \mathbb{N}^*, \overset{?}{\exists} n \in \mathbb{N}^* : m \overset{?}{=} f(n)$

$\exists m = 1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : f(n) \neq 1$

(car $\forall n \in \mathbb{N}^* : f(n) > 1$)

donc f n'est pas surjective (1)

- Par conséquent f n'est pas bijective (0,5)

Exo 2 :

1)

Continuité :

a. sur $]-\infty, 0[$: $f(x) = e^{-x^2} + x$

est continue car c'est la somme et la composé des fonctions continues sur $]-\infty, 0[$ (0,25)

Math 1 Corrigé - Examen (ST)

Ex 02. (suite)

b. Sur $]0,+\infty[$: $f(x) = \cos x + \sin x$
est continue car c'est la somme de deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ (0,25)

c. Au point $x=0$

On a $f(0) = 1$

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} e^{-x^2} + x = 1$

(1,5)

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \cos x + \sin x = 1$

D'où $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$. Par conséquent f est continue en $x=0$ et donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Dérivabilité :

a. Sur $]-\infty,0[$: $f(x) = e^{-x^2} + x$
est dérivable car c'est la somme et la composé des fonctions dérivables sur $]-\infty,0[$ (0,25)

b. Sur $]0,+\infty[$: $f(x) = \cos x + \sin x$
est dérivable car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ (0,25)

c. Au point $x=0$

- $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \dfrac{e^{-x^2}+x-1}{x}$

En appliquant la règle de l'Hôpital, on obtient

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \dfrac{(e^{-x^2}+x-1)'}{x'} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \dfrac{-2x\,e^{-x^2}+1}{1} = 1$

Donc $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

D'où f est dérivable à ~~droite~~ gauche

- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{\cos x+\sin x-1}{x}$

En appliquant toujours la règle de l'Hôpital, on trouve

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{(\cos x+\sin x-1)'}{x'} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{-\sin x+\cos x}{1} = 1$

Donc $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

D'où f est dérivable à droite

et comme

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

alors f est dérivable en $x=0$. 1

Par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Math 1 Corrigé - Examen (ST)

Ex 02 : (Suite)

3)

On a $f(0) = e^{0} + 0 = 1$ / $f(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$

et f est continue sur $[-1, 0]$, $f(0) . f(1) < 0$

alors $\exists\, c \in]-1, 0[$, $f(c) = 0$ 1,5

Ex 03 :

1)

On a : Arccos : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

f est définie ssi $-1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$

On commence par

$$-1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \iff \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \leq 1 \overset{(\sqrt{x} \geq 0)}{\iff} \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$$

$$\iff \frac{1}{x} \leq 1 \iff x \geq 1$$

Donc $\forall\, x \in [1, +\infty[$: $-1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$

D'où f est définie sur $[1, +\infty[$ 1,5

- f est continue sur $[1, +\infty[$ (car c'est la composé de deux fonctions continues) 0,5

$$[1, +\infty[\xrightarrow{f_1} [0, 1] \subset \underset{[-1,1]}{D_{f_2}} \xrightarrow{f_2} [0, \pi]$$

3)

On pose $U(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, on a $(\arccos(f))' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$

$$U' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{-1}{2\sqrt{x}^3}$$

$$\sqrt{1-U^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$$

d'où

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}^3} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} > 0$$

1,5

(car $x \geq 1$)

- f est croissante (car $f'(x) > 0$)

0,5

2)

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \arccos(1) = 0$$

0,5

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

0,5

Exo4 :

1)

On a $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$ sont continues et dérivables au voisinage de 0,

6

Math 1 Corrigé - Examen (ST)

Ex 04. (Suite)

et $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ et $g'(x) = \cos x \neq 0$ au voisinage de 0, cependant

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

n'existe pas (car $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas)

donc on ne peut pas appliquer la règle de l'Hôpital. 0,5

• Pour calculer cette limite il suffit de l'écrire d'une façon plus simple

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}} = \frac{0}{1} = 0$$

car $\sin \frac{1}{x}$ est bornée 1

2) a.

$\sin x^3 = x^3 + o(x^3)$ 0,5 / $\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{Q_3(x)} + o(x^3)$

$e^{x} = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}_{P_3(x)} + o(x^3)$

$(P_3 \circ Q_3)(x) = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3$

$(P_3 \circ Q_3)(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2$

par suite

$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^3)$ 1,5

b.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x^3} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}}\right) - \left(\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{6} + o(1) = -\frac{1}{6}$

1,5