Matière : Maths 1

Série de TD N°2

Exercice 1 :

a. Pour chacune des applications f suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective :
1) $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, 2) $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^*, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, 3) $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

b. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ? Que faudrait-il modifier pour qu'elle devienne bijective ?

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \times [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ telle que $f(x, y) = (x, y^2 - 1)$.

a. Montrer que l'application f est bijective.
b. Déterminer sa réciproque f^{-1}.

Exercice 3 :

a. Soient les applications $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Montrer que $g \circ f = -g$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Dans les exemples suivants, déterminer deux fonctions f et g telles que $h_i = f \circ g$:

$$h_1(x) = \sqrt{3x - 1}, \qquad h_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad h_3(x) = \frac{1}{x + 7} .$$

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = 2x/(1 + x^2)$,

1) f est-elle bijective ?
2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3) Montrer que la restriction $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.