الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

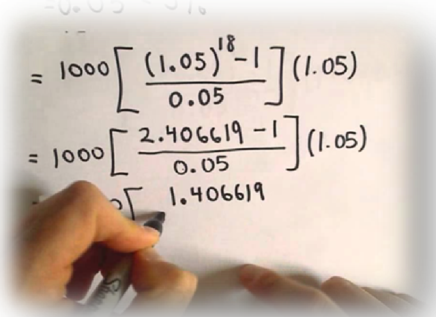
Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة محمد الصديق بن يحي - جيجل

Université Mohammed Seddik Ben Yahia -Jijel

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم المالية والمحاسبة



أعمال موجهة في مقياس:

الرياضيات المالية

مطبوعة مقدمة لطلبة السنة الثانية علوم مالية ومحاسبة

إعداد:

د. باديس بوغرة

السنة الجامعية : 2017-2018

إهداء

إلى الذين نكتب
لهم وعنهم بقلم المحبة
ومداد الوفاء...

مقدمة :

لقد جاءت هذه المطبوعة كعمل يلخص خبرة سنوات في تدريس مقياس الرياضيات المالية لطلبة السنة الثانية علوم المالية والمحاسبة، ولقد اقتصرنا على عرض تمارين الأعمال الموجهة فقط، من خلال تقديم تمارين حول الموضوعات الأساسية لمقياس الرياضيات المالية، والتي جاء بها مقرر وزارة التعليم العالي والبحث العلمي لطلبة السنة الثانية في ميدان العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير.

إن تقديمنا لهذه الموضوعات جاء منسجما ومرتبا وفق تطبيقات الفائدة البسيطة والمركبة، حيث تطرقنا لتطبيقات الفائدة البسيطة في القسم الأول، بدءً بالفائدة البسيطة ثم خصم الديون وتكافؤها، وأيضا عرضنا أهم تطبيقات الفائدة المركبة في القسم الثاني، من خلال التطرق للفائدة المركبة والدفعات الثابتة واستهلاك القروض طويلة الأجل وتقييم السندات.

لقد حرصنا من خلال التمارين المعروضة على توخي البساطة في التقديم والشرح المفصل في الحل، وأملنا أن يلقى عملنا هذا من الطالب القبول والاستحسان.

د. باديس بوغرة
badis_ecodoc@yahoo.fr

مارس 2018

القسم الأول

الفائدة البسيطة وتطبيقاتها

تمارين حول الفائدة البسيطة

أولا- ملخصات الفائدة البسيطة

- **الترميز:**

I : تمثل مبلغ الفائدة البسيطة ؛ C : أصل المبلغ ؛ t : معدل الفائدة ؛ n : المدة بالسنوات.

V : الجملة (القيمة المكتسبة).

❖ **قانون الفائدة البسيطة :**

- حالة السنوات : $I = C \times t \times n$
- حالة الأشهر : $I = C \times t \times \frac{n}{12}$
- حالة الأيام : $I = C \times t \times \frac{n}{360}$

❖ **قانون الفائدة البسيطة الصحيحة :**

- حالة السنوات العادية : $I = C \times t \times \frac{n}{365}$
- حالة السنة الكبيسة : $I = C \times t \times \frac{n}{366}$

❖ **الفائدة البسيطة بطريقة النمر والقواسم :**

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i \times n_i}{\frac{360}{t}}$$

❖ **قانون الجملة بفائدة بسيطة :**

$$V = C\left(1 + t \times \frac{n}{360}\right)$$

ثانيا- تمارين الفائدة البسيطة

التمرين الأول:

أولا- إذا كان معدل الفائدة السنوي هو 6%. أوجد قيمة الفائدة الناتجة عن توظيف المبالغ الآتية:

أ) 6000دج لمدة 65 يوم.

ب) 4000دج لمدة 3 أشهر.

ج) 5000دج لمدة سنتين ونصف.

ثانيا- كم عدد الأيام التي يجب أن يستثمر فيها مبلغ 38000دج حتى نحصل على:

أ) جملة قدرها 38950دج بمعدل فائدة سنوية 5%.

ب) فائدة قدرها 190دج بمعدل فائدة سنوية 3%.

التمرين الثاني:

في سنة 2018 أودع شخص المبالغ التالية في أحد البنوك:

المبلغ (دج)	2000	3000	4000	5000
تاريخ الإيداع	1 جانفي	11 جانفي	21 جانفي	10 فيفري

المطلوب: حساب الفوائد وجملة هذه المبالغ في 31 مارس 2018 إذا كان معدل الفائدة 2% سنويا.

التمرين الثالث:

أولا- أحسب الفائدة البسيطة التي تستحق على مبلغ 3000دج لمدة سنتين وشهر واحد، وذلك على أساس:

أ) معدل فائدة سنوي 6%.

ب) معدل فائدة نصف سنوي (سداسي) 4%.

ج) معدل فائدة ربع سنوي (ثلاثي) 1%.

د) معدل فائدة شهري 0,5%.

✍ **ثانيا-** ما مقدار الفائدة أعلاه إذا كانت مدة التوظيف 3 سنوات و 8 أشهر و 24 يوما.

🕮 التمرين الرابع:

✍ أودع أحد الأشخاص مبلغ 2000دج في بنك بفائدة بسيطة بمعدل 3% سنويا.

إذا كانت لديك المدد التالية لتوظيفه:

الحالة	تاريخ الإيداع	تاريخ السحب
1	1 أكتوبر 2015	1 مارس 2016
2	15 فيفري 2015	14 نوفمبر 2015
3	15 جانفي 2015	25 أفريل 2015
4	20 سبتمبر 2015	13 افريل 2016

المطلوب: حساب الفائدة والجملة المحصلة في كل حالة.

🕮 التمرين الخامس:

✍ بتاريخ 15 جانفي 2018، وظف أحد الأشخاص مبلغ 14500دج لدى أحد البنوك بمعدل 3,5%، وبعد مدة معينة وصله من البنك إشعار يفيد بأن قيمة الفوائد قد بلغت 93,04 دج.

المطلوب: ما هو تاريخ تحرير الإشعار.

🕮 التمرين السادس:

✍ يحقق مبلغ موظف بمعدل 4% لمدة معينة جملة محصلة قدرها 14400دج، أما إذا وظف هذا المبلغ خلال مدة أقل من المدة السابقة بسنة واحدة وعلى أساس معدل فائدة 5%، أعطى فائدة مقدراها 2400دج.

المطلوب: أحسب قيمة هذا المبلغ ومدة توظيفه.

🕮 التمرين السابع:

✍ وظف أحد الأشخاص جزءا من أمواله بمعدل فائدة 10%، ووظف الباقي بمعدل 12%. وبعد سنة بلغت الفائدة على مجموعهما 48000دج. فبافتراض أنه تم توظيفهما بمعدل أقل من المعدلين السابقين بـ 1%، فكانت الفائدة على مجموعهما 43800دج.

المطلوب: أحسب قيمة المبلغين.

🕮 التمرين الثامن :

✍ مبلغين وظفا لمدة سنتين بفائدة بسيطة ، حيث وظف المبلغ الأصغر بمعدل فائدة 11% سنويا ، بينما وظف المبلغ الآخر بمعدل 9% سنويا.

إذا علمت أن الفرق بين المبلغين يساوي 1000دج ، وان فائدة المبلغ الأصغر تفوق فائدة المبلغ الآخر بمقدار 280دج.

المطلوب : أحسب قيمة المبلغين.

ثالثا- حلول تمارين الفائدة البسيطة

حل التمرين الأول:

أولا-

أ) 65 يوم:

$$I = C \times t \times \frac{n}{360} = 6000 \times 0,06 \times \frac{65}{360} = 65DA$$

ب) 3 أشهر:

$$I = C \times t \times \frac{n}{12} = 4000 \times 0,06 \times \frac{3}{12} = 60DA$$

ج) سنتين ونصف:

$$I = C \times t \times n = 5000 \times 0,06 \times 2,5 = 750DA$$

ثانيا-

أ)

$$V = C(1 + t\frac{n}{360})$$

$$38950 = 38000(1 + 0,05\frac{n}{360})$$

$$1,025 = 1 + 0,0001388889n$$

$$n = \frac{0,025}{0,0001388889} = 180\ jour$$

ب)

$$I = C \times t \times \frac{n}{12}$$

$$\Rightarrow 190 = 38000 \times 0,03 \times \frac{n}{360}$$

$$n = \frac{190}{3,16666667} = 60\ jours$$

حل التمرين الثاني:

حساب الفوائد:

حساب مدد التوظيف : إلى غاية 31 مارس 2018 :

	Jan	Fév	Mar	
n_1	03	29	31	90
n_2	20	29	31	80
n_3	10	29	31	70
n_4	-	19	31	50

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = C_1 \times t \times \frac{n_1}{360} + C_2 \times t \times \frac{n_2}{360} + C_3 \times t \times \frac{n_3}{360} + C_4 \times t \times \frac{n_4}{360}$$

$$I = 2000 \times 0,02 \times \frac{90}{360} + 3000 \times 0,02 \times \frac{80}{360} + 4000 \times 0,02 \times \frac{70}{360} + 5000 \times 0,02 \times \frac{50}{360}$$

$$I = 10 + 13,33 + 15,55 + 13,88 = 52,76DA$$

حساب الجملة :

جملة المبالغ = مجموع المبالغ + مجموع الفوائد

$$V = \sum_{i=1}^{4} C_i + \sum_{i=1}^{4} I_i = 14000 + 52,76 = 14052,76DA$$

حل التمرين الثالث:

أولا-

أ) معدل فائدة سنوي 6% :

$$I = C \times t \times \frac{n}{12} = 3000 \times 0,06 \times \frac{25}{12} = 375DA$$

ب) معدل فائدة نصف سنوي (سداسي) 4% :

$$I = C \times t \times \frac{n}{6} = 3000 \times 0,04 \times \frac{25}{6} = 500DA$$

ج) معدل فائدة ربع سنوي (ثلاثي) 1% :

$$I = C \times t \times \frac{n}{3} = 3000 \times 0,01 \times \frac{25}{3} = 250DA$$

د) معدل فائدة شهري 0,5% :

$$I = C \times t \times \frac{n}{1} = 3000 \times 0,005 \times \frac{25}{1} = 375DA$$

ثانيا-

مدة التوظيف في هذه الحالة تحسب بالأيام :

المدة $n = 360\times3 + 30\times8+24 = 1080 + 240 + 24 = 1344$ يوم.

أ) معدل فائدة سنوي 6% :

$$I = C\times t\times\frac{n}{360} = 3000\times0,06\times\frac{1344}{360} = 672DA$$

ب) معدل فائدة نصف سنوي (سداسي) 4% :

$$I = C\times t\times\frac{n}{180} = 3000\times0,04\times\frac{1344}{180} = 896DA$$

ج) معدل فائدة ربع سنوي (ثلاثي) 1% :

$$I = C\times t\times\frac{n}{90} = 3000\times0,01\times\frac{1344}{90} = 448DA$$

د) معدل فائدة شهري 0,5% :

$$I = C\times t\times\frac{n}{30} = 3000\times0,005\times\frac{1344}{30} = 672DA$$

حل التمرين الرابع:

الحالة الأولى:

	Oct	Nov	Déc	Jan	Fév	Mar	
n_1	30	30	31	31	29	1	152

$$I = C\times t\times\frac{n}{360} = 2000\times0,03\times\frac{152}{360} = 25,33DA$$

$$V = C(1+t\frac{n}{360}) = 2000\left(1+\times0,03\times\frac{152}{360}\right) = 2025,33DA$$

الحالة الثانية :

	Fév	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Aoû	Sep	Oct	Nov	
n_2	13	31	30	31	30	31	31	30	31	41	722

$$I = C\times t\times\frac{n}{360} = 2000\times0,03\times\frac{272}{360} = 40DA$$

$$V = C(1+t\frac{n}{360}) = 2000\left(1+\times 0,03\times\frac{272}{360}\right) = 2045,33DA$$

الحالة الثالثة :

	Jan	Fév	Mar	Avr	
n_3	16	28	31	25	100

$$I = C\times t\times\frac{n}{360} = 2000\times 0,03\times\frac{100}{360} = 16,66DA$$

$$V = C(1+t\frac{n}{360}) = 2000\left(1+\times 0,03\times\frac{100}{360}\right) = 2016,66DA$$

الحالة الرابعة :

	Sep	Oct	Nov	Déc	Jan	Fév	Mar	Avr	
n_4	10	31	30	31	31	29	31	13	206

$$I = C\times t\times\frac{n}{360} = 2000\times 0,03\times\frac{206}{360} = 34,33DA$$

$$V = C(1+t\frac{n}{360}) = 2000\left(1+\times 0,03\times\frac{206}{360}\right) = 2034,33DA$$

حل التمرين الخامس:

حساب تاريخ وصول الإشعار :

$$I = C\times t\times\frac{n}{360}$$

$$\Rightarrow 93,04 = 14500\times 0,035\times\frac{n}{360}$$

$$\Rightarrow 33494,4 = 507,5n$$

$$\Rightarrow n = \frac{33494,4}{507,5} = 66\,jour$$

	Jan	Fév	Mar	
n	16	28	22	66 *jours*

بحذفنا لليوم الأول من التوظيف نجد أن تاريخ تحرير الإشعار هو 22 مارس 2018.

حل التمرين السادس:

من المعطيات :

$C(1+0,04n)=14400................(1)$

$C\times 0,05(n-1)=2400..............(2)$

بقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2) نحصل على :

$$\frac{C(1+0,04n)}{C\times 0,05(n-1)}=\frac{14400}{2400}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+0,04n)}{0,05(n-1)}=6 \Rightarrow \frac{0,04n+1}{0,05n-0,05}=6$$

$$\Rightarrow 0,04n+1=0,3n-0,3$$

$$\Rightarrow 1+0,3=0,3n-0,04n$$

$$\Rightarrow n=\frac{1,3}{0,26}=5$$

$$n=5ans$$

من المعادلة (1) نجد قيمة المبلغ :

$$C(1+0,04n)=14400$$

$$C(1,2)=14400$$

$$C=\frac{14400}{1,2}=12000DA$$

حل التمرين السابع:

t_1=10%, t_2= 12%

$$I=C_1\times t_1+C_2\times t_2=48000$$

يمكن كتابة معطيات التمرين في المعادلتين التاليتين :

$0,1C_1+0,12C_2=48000...........(1)$

$0,09C_1+0,11C_2=43800..........(2)$

من المعادلة (1) نجد:

$$0,1C_1=\frac{48000-0,12C_2}{0,1}$$

$$\Rightarrow C_1=480000-1,2C_2...........(3)$$

بتعويض (3) في (1) نجد:

$$0,09(480000-1,2C_2)+0,11C_2=43800$$

$$43200-0,108C_2+0,11C_2=43800$$

$0,002C_2 = 600$

$C_2 = 300000DA$

بتعويض C_2 بقيمتها في المعادلة (3) نجد :

$C_1 = 480000 - 1,2 \times 300000 = 120000$

$C_1 = 120000DA$

حل التمرين الثامن :

نفترض أن C_1 هو المبلغ الأصغر و C_2 هو المبلغ الأكبر.

يمكن كتابة معطيات التمرين في المعادلتين التاليتين :

$C_2 - C_1 = 1000$...........(1)

$I_1 - I_2 = 280$.............(2)

من (2) نجد :

$(C_1 \times 0,11 \times 2) - (C_2 \times 0,09 \times 2) = 280$

$0,22C_1 - 0,18C_2 = 280$.......(3)

من (1) نجد :

$C_1 = C_2 - 1000$......(4)

بتعويض C_1 بما يقابلها في المعادلة (3) نجد :

$0,22(C_2 - 1000) - 0,18C_2 = 280$

$0,22C_2 - 220 - 0,18C_2 = 280$

$0,04C_2 - 220 = 280$

$0,04C_2 = 500$

$C_2 = \dfrac{500}{0,04} = 12500DA$

$C_1 = 12500 - 1000 = 11500DA$

تمارين حول خصم الديون بفائدة بسيطة

أولا- ملخصات خصم الديون بفائد بسيطة

- الترميز:

Vn : للقيمة الاسمية.	n : المدة.
Va : القيمة الحالية التجارية.	t : معدل الخصم.
Ec : الخصم التجاري.	t_r : معدل الخصم الحقيقي.
Va' : القيمة الحالية الصحيحة.	$Agio$: الآجيو.
ER : الخصم الصحيح.	Com : العمولة.
	$F.enc$: مصاريف التحصيل.

❖ **قانون الخصم التجاري والقيمة الحالية التجارية:**

$$Ec = Vn \times t \times \frac{n}{360}$$

$$Va = Vn\left(1 - t \times \frac{n}{360}\right)$$

❖ **قانون الخصم الصحيح والقيمة الحالية الصحيحة:**

$$ER = Va' \times t \times \frac{n}{360}$$

$$ER = \frac{Vn \times t \times n}{360 + t \times n}$$

تستبدل 360 بـ 12 في حالة الأشهر و بـ 1 في حالة السنوات.

$$Va' = \frac{Vn}{1 + t\dfrac{n}{360}}$$

❖ **معدل الخصم الحقيقي:**

$$t_r = \frac{Agio}{Vn \times \dfrac{n}{360}}$$

ثانيا - تمارين خصم الديون بفائد بسيطة

التمرين الأول:

دين قدره 1800دج يستحق بعد سنة ونصف. فإذا تمت تسوية هذا الدين بمعدل فائدة بسيطة 8%.

المطلوب: أحسب:

1) الخصم التجاري والقيمة الحالية التجارية لهذا الدين.

2) الخصم الصحيح والقيمة الحالية الصحيحة.

التمرين الثاني:

اشترى موظف ثلاجة وقام بدفع مبلغ 30000دج نقدا، واتفق مع البائع على دفع 10000دج بعد شهر، ودفع مبلغ 15000دج بعد شهرين. إذا علمت أن معدل الخصم هو 18%.

المطلوب: ما ثمن الثلاجة النقدي:

1) بإتباع طريقة الخصم التجاري.

2) بإتباع طريقة الخصم الصحيح.

التمرين الثالث:

أحسب القيمة المجهولة في كل حالة من الحالات الموضحة في الجدول التالي:

القيم	الحالة 1	الحالة 2	الحالة 3	الحالة 4
القيمة الاسمية	1000	؟	؟	1030
القيمة الحالية التجارية	؟	؟	1940	؟
القيمة الحالية الصحيحة	؟	1000	؟	1000
الخصم التجاري	؟	؟	60	؟
الخصم الصحيح	؟	؟	؟	؟
معدل الخصم أو الفائدة	8%	5%	؟	9%
المدة	36 يوما	72 يوما	4 شهور	؟ يوم

🕮 التمرين الرابع:

✍ القيمة الحالية لورقة تجارية 11846دج، خصمت بتاريخ 25 أوت بمعدل 7%. وإذا خصمت هذه الورقة قبل 30 يوما من تاريخ استحقاقها لكانت قيمة الخصم أقل بـ 87دج من الخصم الأول.

المطلوب: أحسب القيمة الاسمية للورقة التجارية وتاريخ استحقاقها.

🕮 التمرين الخامس:

✍ خصمت ثلاث أوراق تجارية قيمها الاسمية على الترتيب: 1250دج، 1700دج، 1980دج، وهذا بمعدل خصم 4,5%.

إذا علمت أنها أعطت في مجموعها صافي قيمة حالية قدرها 4853,95دج، وأن الورقة الثانية تستحق بعد شهرين، وأن الورقة الأولى تستحق قبل الثالثة بشهرين.

المطلوب: أحسب المدة المتبقية لاستحقاق الورقتين الأولى والثالثة.

🕮 التمرين السادس:

✍ ورقة تجارية تم خصمها بمعدل 3% فكانت قيمتها الحالية 33233دج، ولو خصمت قبل تاريخ استحقاقها بـ 15 يوم لانخفضت قيمة الخصم بـ125,25دج عن قيمته السابقة.

المطلوب: أحسب:

1) القيمة الاسمية لهذه الورقة.

2) المدة الباقية للاستحقاق عند الخصم الأول.

🕮 التمرين السابع:

✍ بتاريخ 2011/04/17 تم خصم ورقة تجارية بمعدل 3% فكان خصمها التجاري يساوي 24دج.

إذا علمت أن قيمتها الاسمية 2400دج.

المطلوب: أحسب: 1) تاريخ استحقاقها.

2) المبلغ الإجمالي للآجيو إذا كان: - معدل العمولة 0,2%. - مصاريف التحصيل 0,1% و5دج كحد أدنى.

3) صافي ما يتحصل عليه صاحب الورقة التجارية.

4) معدل الخصم الحقيقي الذي طبقه البنك.

ثالثا- حلول تمارين خصم الديون بفائد بسيطة

حل التمرين الأول:

- الخصم التجاري والقيمة الحالية التجارية:

$$EC = Vn \times t \times \frac{n}{360} = 1800 \times 0,08 \times \frac{540}{360} = 216DA$$

$$Va = Vn\left(1 - t \times \frac{n}{360}\right) = Vn - EC = 1800 - 216 = 1584DA$$

- الخصم الصحيح والقيمة الحالية الصحيحة:

$$ER = \frac{Vn \times t \times n}{360 + t \times n} = \frac{1800 \times 0,08 \times 540}{360 + (0,08 \times 540)} = \frac{77760}{403,2} = 192,86DA$$

$$Va' = Vn - ER = 1800 - 192,85 = 1607,14DA$$

أو بطريقة أخرى:

$$Va' = \frac{360 \times Vn}{360 + t \times n} = \frac{360 \times 1800}{360 + 0,08 \times 540} = \frac{648000}{403,2} = 1607,14DA$$

حل التمرين الثاني:

- طريقة الخصم التجاري:

نبحث عن القيمة الحالية للمبالغ الثلاثة: علما أن قيمة المبلغ الأول هي نفسها القيمة الحالية له بما أن المدة 0.

$$Va = Va_1 + Va_2 + Va_3 = Vn_1\left(1 - t \times \frac{n_1}{12}\right) + Vn_2\left(1 - t \times \frac{n_2}{12}\right) + Vn_3\left(1 - t \times \frac{n_3}{12}\right)$$

$$Va = 30000 + 10000\left(1 - 0,18 \times \frac{1}{12}\right) + 15000_1\left(1 - 0,18 \times \frac{2}{12}\right)$$

$$Va = 30000 + 9850 + 14550 = 54400DA$$

طريقة الخصم الصحيح:

$$Va' = Va'_1 + Va'_2 + Va'_3 = \left(\frac{12 \times Vn_1}{12 + t \times n}\right) + \left(\frac{12 \times Vn_2}{12 + t \times n}\right) + \left(\frac{12 \times Vn_3}{12 + t \times n}\right)$$

$$Va' = 30000 + \left(\frac{12\times10000}{12+0{,}18\times1}\right) + \left(\frac{12\times15000}{12+0{,}18\times2}\right)$$

$$Va' = 30000 + 9852{,}22 + 14563{,}10 = 54415{,}32DA$$

حل التمرين الثالث:

الحالة الأولى:

- الخصم التجاري والقيمة الحالية التجارية :

$$EC = Vn \times t \times \frac{n}{360} = 1000 \times 0{,}08 \times \frac{36}{360} = 8DA$$

$$Va = Vn\left(1 - t \times \frac{n}{360}\right) = Vn - EC = 1000 - 8 = 992DA$$

- الخصم الصحيح والقيمة الحالية الصحيحة :

$$ER = \frac{Vn \times t \times n}{360 + t \times n} = \frac{1000 \times 0{,}08 \times 36}{360 + (0{,}08 \times 36)} = \frac{2880}{362{,}88} = 7{,}93DA$$

$$Va' = Vn - ER = 1000 - 7{,}93 = 992{,}07DA$$

أو بطريقة أخرى :

$$Va' = \frac{360 \times Vn}{360 + t \times n} = \frac{360 \times 1000}{360 + 0{,}08 \times 36} = \frac{360000}{362{,}88} = 992{,}06DA$$

الحالة الثانية :

- الخصم الصحيح :

$$ER = Va' \times t \times \frac{n}{360} = 1000 \times 0{,}05 \times \frac{72}{360} = 10DA$$

- القيمة الاسمية :

$$Vn = Va'(1 + t\frac{n}{360}) = 1000(1 + 0{,}05\frac{72}{360}) = 1010DA$$

الخصم التجاري والقيمة الحالية التجارية :

$$EC = Vn \times t \times \frac{n}{360} = 1010 \times 0{,}05 \times \frac{72}{360} = 10{,}1DA$$

$$Va = Vn\left(1 - t \times \frac{n}{360}\right) = Vn - EC = 1010 - 10{,}1 = 999{,}9DA$$

الحالة الثالثة :

- القيمة الاسمية Vn :

$$Vn = Va + EC = 1940 + 60 = 2000DA$$

- معدل الخصم :

$$EC = Vn \times t \times \frac{n}{12}$$
$$\Rightarrow 60 = 2000 \times t \times \frac{4}{12}$$
$$\Rightarrow 60 = 666,66t$$
$$t = 0,09 = 9\%$$

- الخصم الصحيح والقيمة الحالية الصحيحة :

$$ER = \frac{Vn \times t \times n}{360 + t \times n} = \frac{2000 \times 0,09 \times 120}{360 + (0,09 \times 120)} = \frac{21600}{370,8} = 58,25DA$$

$$Va' = Vn - ER = 2000 - 58,25 = 1941,75DA$$

الحالة الرابعة :

- المدة :

$$Va' = \frac{360 \times Vn}{360 + t \times n}$$
$$\Rightarrow 1000 = \frac{360 \times 1030}{360 + 0,09 \times n}$$
$$\Rightarrow 1000 \times (360 + 0,09 \times n) = 370800$$
$$\Rightarrow 360000 + 90n = 370800$$
$$\Rightarrow 90n = 10800$$
$$\Rightarrow n = \frac{10800}{90} = 120 Jours$$

- الخصم التجاري والقيمة الحالية التجارية :

$$EC = Vn \times t \times \frac{n}{360} = 1030 \times 0,09 \times \frac{120}{360} = 30,9DA$$

$$Va = Vn\left(1 - t \times \frac{n}{360}\right) = Vn - EC = 1030 - 30,9 = 999,1DA$$

- الخصم الصحيح :

$ER = Vn - Va' = 1030 - 1000 = 30DA$

القيم	الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة	الحالة الرابعة
القيمة الاسمية	1000	1010	2000	1030
القيمة الحالية التجارية	992	999,9	1940	999,1
القيمة الحالية الصحيحة	992,07	1000	1941,75	1000
الخصم التجاري	8	10,1	60	30,9
الخصم الصحيح	7,93	10	58,25	30
معدل الخصم أو الفائدة	%8	%5	%9	%9
المدة	36 يوما	72 يوما	4 شهور	120 يوم

حل التمرين الرابع:

- حساب القيمة الاسمية :

$EC_2 = EC_1 - 87$

$\Rightarrow EC_1 = EC_2 + 87$

$Va_1 = Vn - EC_1 = Vn - \left(EC_2 + 87\right)$

$\Rightarrow 11846 = Vn - EC_2 - 87$

$\Rightarrow 11933 = Vn - \left(Vn \times t \times \frac{n_2}{360}\right)$

$\Rightarrow 11933 = Vn - \left(Vn \times 0,07 \times \frac{30}{360}\right)$

$\Rightarrow 11933 = 0,9941667Vn$

$\Rightarrow Vn = 12000DA$

- حساب تاريخ الاستحقاق :

$Va_1 = Vn - EC_1$

$Va_1 = Vn - \left(Vn \times t \times \frac{n_1}{360}\right)$

$\Rightarrow 11846 = 12000 - \left(12000 \times 0,07 \times \frac{n_1}{360}\right)$

$$\Rightarrow 11846 = 12000 - 2,3333333 n_1$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{154}{2,3333333} = 66\, jour$$

تاريخ الاستحقاق 30 أكتوبر.

حل التمرين الخامس :

لدينا : مجموع قيمة الخصم هي الفرق بين القيم الاسمية والقيم الحالية للأوراق التجارية :

من المعطيات : $n_3 = n_1 + 2$

$$\sum EC = \sum Vn - \sum Va = (1250 + 1700 + 1980) - 4853,95 = 76,05$$

$$\sum EC = 76,05 DA$$

$$\sum EC = EC_1 + EC_2 + EC_3$$

$$\sum EC = \left(Vn_1 \times t \times \frac{n_1}{12}\right) + \left(Vn_2 \times t \times \frac{n_2}{12}\right) + \left(Vn_3 \times t \times \frac{n_3}{12}\right)$$

بالتعويض نجد :

$$76,05 = \left(1250 \times \frac{4,5}{100} \times \frac{n_1}{12}\right) + \left(1700 \times \frac{4,5}{100} \times \frac{2}{12}\right) + \left(1980 \times \frac{4,5}{100} \times \frac{n_1 + 2}{12}\right)$$

$$\Rightarrow 76,05 = 4,6875 n_1 + 12,75 + 7,425 n_1 + 14,85$$

$$\Rightarrow 76,05 = 12,1125 n_1 + 27,6$$

$$\Rightarrow 48,45 = 12,1125 n_1$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{48,45}{12,1125} = 4$$

$$n_1 = 4 mois$$

وعليه نجد :

$$n_3 = n_1 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$n_3 = 6 mois$$

حل التمرين السادس :

1- حساب القيمة الاسمية :

$$EC_2 = EC_1 - 125,25$$

$$\Rightarrow EC_1 = EC_2 + 125,25$$

$$Va_1 = Vn - EC_1 = Vn - \left(EC_2 + 125,25\right)$$

$$\Rightarrow 33233 = Vn - EC_2 - 125,25$$

$$\Rightarrow 33358,25 = Vn - \left(Vn \times t \times \frac{n_2}{12}\right)$$

$$\Rightarrow 33358,25 = Vn - \left(Vn \times \frac{3}{100} \times \frac{0,5}{12}\right)$$

$$\Rightarrow 33358,25 = Vn - \left(0,00125 \times Vn\right)$$

$$\Rightarrow 33358,25 = 0,99875Vn$$

$$Vn = 33400DA$$

2- المدة الباقية للاستحقاق عند الخصم الأول :

$$Va_1 = Vn - EC_1$$

$$Va_1 = Vn - \left(Vn \times t \times \frac{n_1}{12}\right)$$

$$\Rightarrow 33233 = 33400 - \left(33400 \times \frac{3}{100} \times \frac{n_1}{12}\right)$$

$$\Rightarrow 33233 = 33400 - 83,5n_1$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{167}{83,5} = 2$$

$$n_1 = 2mois$$

حل التمرين السابع:

1- حساب تاريخ الاستحقاق :

$$EC = Vn \times t \times \frac{n}{360}$$

$$\Rightarrow 24 = 2400 \times \frac{3}{100} \times \frac{n}{360}$$

$$n = 120\ jour$$

بحساب 120يوم ابتداء من تاريخ 2011/04/17 نجد تاريخ الاستحقاق هو 15 أوت 2011.

	Avr	Mai	Juin	Juil	Aoû	
n	13	31	30	31	15	=120

2- حساب الآجيو :

الآجيو= الخصم التجاري + العمولة + مصاريف التحصيل.

$$Agio = EC + Com + F.enc$$

$$Agio = 24 + (2400 \times \frac{0,2}{100}) + 5 = 33,8$$

$$Agio = 33,8DA$$

مصاريف التحصيل 5 دج كحد أدنى لأن 2400×0,1% = 2,4دج أقل من 5 دج.

3- حساب صافي ما يتحصل عليه التاجر :

يتحصل التاجر على القيمة الحالية للورقة التجارية وذلك بعد خصم قيمة الأجيو من القيمة الاسمية لها.

$$Va = Vn - Agio = 2400 - 33,8 = 2366,2$$

$$Va = 2366,2DA$$

4- حساب معدل الخصم الحقيقي :

إن معدل الخصم الحقيقي يعكس جميع المصاريف من خصم وعمولة ومصاريف أخرى ...، ويمكن إيجاده كالتالي :

$$Agio = Vn \times t_r \times \frac{n}{360}$$

$$33,8 = 2400 \times t_r \times \frac{120}{360}$$

$$t_r = 4,225\%$$

تمارين حول تكافؤ الديون بفائدة بسيطة

أولا - ملخصات تكافؤ الديون بفائد بسيطة

- الترميز:

Vn : للقيمة الاسمية. Va : القيمة الحالية التجارية. Ec : الخصم التجاري.	Va' : القيمة الحالية الصحيحة. ER : الخصم الصحيح. n : المدة. t : معدل الخصم.

❖ **شرط التكافؤ بالخصم التجاري:**

القيمة الحالية التجارية للدين أو الديون الجديدة تساوي القيمة الحالية التجارية للديون القديمة

$$Va = Va_1 + Va_2 + ... + Va_n$$

❖ **شرط التكافؤ بالخصم الصحيح:**

القيمة الحالية الصحيحة للدين أو الديون الجديدة تساوي القيمة الحالية الصحيحة للديون القديمة

$$Va' = Va'_1 + Va'_2 + ... + Va'_n$$

❖ **حالة الاستحقاق المتوسط:**

القيمة الاسمية للدين الجديد تساوي مجموع القيم الاسمية الصحيحة للديون القديمة

$$Vn = Vn_1 + Vn_2 + ... + Vn_n$$

مدة استحقاق الدين الجديد n (مدة الاستحقاق المتوسط):

$$n = \frac{Vn_1 \times n_1 + Vn_2 \times n_2 + ... + Vn_n \times n_n}{Vn}$$

ثانيا- تمارين تكافؤ الديون بفائد بسيطة

التمرين الأول:

أحد التجار مدين لمورده بالأوراق التجارية التالية :

- الورقة الأولى: 3200 دج تستحق في 01 نوفمبر 2018.
- الورقة الثانية: 4800دج تستحق في 15 ديسمبر 2018.
- الورقة الثالثة: 17000دج تستحق في 30 ديسمبر 2018.

وفي تاريخ 15 نوفمبر 2018 قرر هذا التاجر تسوية تلك الأوراق بتسديد قيمتها نقداً.

المطلوب: ما هو قيمة المبلغ المسدد إذا كان معدل الخصم 6%.

التمرين الثاني:

شخص مدين لآخر بالمبالغ الآتية :

- ✓ 15000دج تستحق بعد 30 يوما.
- ✓ 20000دج تستحق بعد 40 يوما.
- ✓ 15000دج تستحق بعد 60 يوما.

فإذا علمت أنه اتفق مع الدائن على أن يسدد له مبلغ 49402,78دج في الحال أداء لهذه الديون.

المطلوب: حساب معدل الخصم الذي استخدم لتسوية هذه الديون.

التمرين الثالث:

ثلاث أوراق تجارية قيمها الاسمية على التوالي: 4500دج، 2600دج، 1200دج. وتستحق في: 20 مارس، 15 فيفري، 30 جانفي على التوالي، وذلك بمعدل خصم 12%. فبافتراض أنه بتاريخ استحقاق الورقة الثالثة تم استبدالهم بورقة جديدة تستحق بتاريخ استحقاق الورقة الأولى.

المطلوب: أحسب القيمة الاسمية للورقة الجديدة بإتباع طريقة الخصم الصحيح.

التمرين الرابع:

اقترض شخص من أحد البنوك المبالغ التالية :

- ✓ 30000دج بتاريخ 9 مارس 2018.
- ✓ 20000دج بتاريخ 30 مارس 2018.

- ✓ 3000دج بتاريخ 10 أفريل 2018.

وفي 1 جوان 2018 قام بسداد جملة الديون السابقة إلى البنك. فإذا علمت أن المبلغ الذي سدده للبنك هو 57664دج.

المطلوب: أحسب معدل الفائدة الذي استثمر به البنك مبالغ القروض.

🕮 التمرين الخامس:

✍ شخص مدين بالأوراق التجارية (الكمبيالات) التالية:

- الورقة الأولى: 4000 دج تستحق بعد 3 أشهر.
- الورقة الثانية: 6000 تستحق بعد 5 أشهر.
- الورقة الثالثة: 12000دج تستحق بعد 8 أشهر.

وقد اتفق مع الدائن على تسوية هذه الديون على النحو التالي: يدفع له نقداً مبلغ 3725دج، ويحرر له ثلاث كمبيالات لكل منها نفس القيمة الاسمية وتستحق بعد 2، 4، 6 أشهر على التوالي.

المطلوب: أوجد القيم الاسمية للكمبيالات الثلاث الجديدة إذا كان معدل الخصم 5% سنويا.

🕮 التمرين السادس:

✍ ورقتان تجاريتين مجموع قيمتهما الاسمية 48800دج، ومجموع خصمهما 305دج، إذا علمت أن مدة الاستحقاق المتوسط لهما هو 45 يوم.

المطلوب: 1) أحسب معدل الخصم.

2) إذا كانت القيمة الاسمية للورقة الأولى 36600دج وتستحق بعد شهر، أحسب مدة استحقاق الورقة الثانية.

🕮 التمرين السابع:

✍ ورقتين تجاريتين، تستحق الأولى بتاريخ 21 أفريل 2018، وتستحق الثانية بتاريخ 11 ماي 2018، فإذا علمت أن القيمة الاسمية للورقة الثانية أكبر من الأولى بـ 400دج، وأنه تم خصم الورقة الأولى بمعدل 5% والثانية بمعدل 3%، فظهر أن لهما نفس قيمة الخصم، وأن القيمة الاسمية للورقة الأولى تعادل 120 مرة قيمة خصمها.

المطلوب:

1) حساب القيمة الاسمية للورقتين.

2) بتاريخ استحقاق الورقة التجارية الأولى تم استبدال الورقتين التجاريتين بورقة واحدة قيمتها 3600دج. - ما هو تاريخ استحقاق الورقة الجديدة.

ثالثا - حلول تمارين تكافؤ الديون بفائد بسيطة

حل التمرين الأول:

تاريخ التكافؤ هو 15 نوفمبر 2018، وفيه تكون القيم الحالية للأوراق الثلاثة مساوية للمبلغ المسدد بهذا التاريخ، وطالما أن الورقة الأولى تحسب قيمتها بعد تاريخ التكافؤ، فإننا سنحسب جملتها لغاية تاريخ التكافؤ وذلك باحتساب فوائد التأخير نتيجة لتأخير دفع قيمتها في تاريخ استحقاقها.

$$Va = Vn_1\left(1+t\times\frac{n_1}{360}\right)+Vn_2\left(1-t\times\frac{n_2}{360}\right)+Vn_3\left(1-t\times\frac{n_3}{360}\right)$$

$$Va = 3200\left(1+\frac{6}{100}\times\frac{14}{360}\right)+4800\left(1-\frac{6}{100}\times\frac{30}{360}\right)+17000\left(1-\frac{6}{100}\times\frac{45}{360}\right)$$

$$Va = 3207,46+4746+16872 = 24825,96$$

$$Va = 24826DA$$

وهو المبلغ النقدي المسدد بتاريخ 15 نوفمبر 2018.

حل التمرين الثاني:

القيمة الحالية للديون تساوي ما يسدده المدين حالا أي 49402,78دج .

$$Va = Vn_1\left(1-t\times\frac{n_1}{360}\right)+Vn_2\left(1-t\times\frac{n_2}{360}\right)+Vn_3\left(1-t\times\frac{n_3}{360}\right)$$

$$49402,78 = 15000\left(1-t\times\frac{30}{360}\right)+20000\left(1-t\times\frac{40}{360}\right)+15000\left(1-t\times\frac{60}{360}\right)$$

$$49402,78 = 15000-1250t+20000-2222,22t+15000-2500t$$

$$597,22 = 5972,22t$$

$$t = 0,1$$

$$t = 10\%$$

حل التمرين الثالث:

حساب القيمة الاسمية للورقة الجديدة:

مدد الأوراق القديمة على التوالي: 49، 16، 0 يوم. والورقة الجديدة: 49يوم.

شرط التكافؤ:

$$Va' = \sum_{i=1}^{3} Va'_i$$

$$\frac{Vn}{(1+0,12\times\frac{49}{360})} = \frac{4500}{(1+0,12\times\frac{49}{360})}+\frac{2600}{(1+0,12\times\frac{16}{360})}+\frac{1200}{(1+0,12\times\frac{0}{360})}$$

$$\frac{Vn}{1,0163333} = 4427,68 + 2586,07 + 1200$$

$$\frac{Vn}{1,0163333} = 8213,75$$

$$Vn = 8347,9DA$$

حل التمرين الرابع:

نحسب جملة المبالغ بتاريخ 1 جوان 2018.

$$Vn = Vn_1\left(1 + t \times \frac{n_1}{360}\right) + Vn_2\left(1 + t \times \frac{n_2}{360}\right) + Vn_3\left(1 + t \times \frac{n_3}{360}\right) + Vn_4\left(1 + t \times \frac{n_4}{360}\right)$$

$$57664 = 30000\left(1 + t \times \frac{84}{360}\right) + 20000\left(1 + t \times \frac{63}{360}\right) + 3000\left(1 + t \times \frac{52}{360}\right) + 4000\left(1 + t \times \frac{12}{360}\right)$$

$$57664 = 30000 + 7000t + 20000 + 3500t + 3000 + 433,33 + 4000 + 133,33t$$

$$664 = 11066,66t$$

$$\Rightarrow t = 0,06$$

$$t = 6\%$$

حل التمرين الخامس:

نفترض أن القيمة الاسمية لكل كمبيالة من الكمبيالات الثلاث الجديدة هو Vn.

لابد من تساوي القيمة الحالية للكمبيالات القديمة بالقيمة الحالية للكمبيالات الجديدة مضافاً إليها المبلغ المسدد نقدا.

القيمة الحالية للكمبيالات القديمة :

$$Va = Vn_1\left(1 - t \times \frac{n_1}{12}\right) + Vn_2\left(1 - t \times \frac{n_2}{12}\right) + Vn_3\left(1 - t \times \frac{n_3}{12}\right)$$

$$Va = 4000\left(1 - \frac{5}{100} \times \frac{3}{12}\right) + 6000\left(1 - \frac{5}{100} \times \frac{5}{12}\right) + 12000\left(1 - \frac{5}{100} \times \frac{8}{12}\right)$$

$$Va = 3950 + 5875 + 11600 = 21425DA$$

القيمة الحالية للكمبيالات الجديدة + المبلغ المسدد نقدا (3725) = 21425دج

القيمة الحالية للكمبيالات الجديدة = 21425 - 3725 = 17700دج.

بما أن القيمة الاسمية للكمبيالات الجديدة متساوية نجد :

$$Va = Vn\left[\left(1 - t \times \frac{n_1}{12}\right) + \left(1 - t \times \frac{n_2}{12}\right) + \left(1 - t \times \frac{n_3}{12}\right)\right]$$

$$17700 = Vn\left[\left(1 - \frac{5}{100} \times \frac{2}{12}\right) + \left(1 - \frac{5}{100} \times \frac{4}{12}\right) + \left(1 - \frac{5}{100} \times \frac{6}{12}\right)\right]$$

$$17700 = 2,95Vn$$

$$Vn = \frac{17700}{2,95} = 6000DA$$

وعليه القيمة الاسمية لكل كمبيالة من الكمبيالات الثلاث الجديدة هو 6000دج.

حل التمرين السادس:

1- حساب معدل الخصم :

لدينا : EC=305 DA

$$EC = Vn \times t \times \frac{n}{360} = 48800 \times t \times \frac{45}{360} = 6100 \times t$$

$$\Rightarrow 305 = 6100 \times t$$

$$t = 0,05 = 5\%$$

2- حساب مدة استحقاق الورقة الثانية :

من المعطيات لدينا : $Vn_1 = 36600\ DA$

وعليه :

$$Vn_2 = 48800 - 36600 = 12200\ DA$$

بما أننا في حالة استحقاق متوسط فإننا نعتمد علاقة الاستحقاق المتوسط لحساب n_2:

$$N = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Vn_i \times n_i}{Vn} \right)$$

$$N = \frac{Vn_1 \times n_1 + Vn_2 \times n_2}{Vn}$$

$$\Rightarrow 45 = \frac{36600 \times 30 + 12200 \times n_2}{48800}$$

$$\Rightarrow 1098000 = 12200 \times n_2$$

$$n_2 = 90\, jours$$

وهي مدة استحقاق الورقة التجارية الثانية.

حل التمرين السابع:

1- حساب القيم الاسمية للورقتين :

لحساب هذه القيم يتعين علينا معرفة مدد استحقاق كل منهما.

$$n_2 = n_1 + 20 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$Vn_1 = 120 EC_1 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$Vn_2 = Vn_1 + 400 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$EC_1 = EC_2 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

من المعادلة (2) نجد :

$$Vn_1 = 120EC_1$$

$$Vn_1 = 120\left(Vn_1 \times t \times \frac{n_1}{360}\right)$$

$$Vn_1 = 120\left(Vn_1 \times \frac{5}{100} \times \frac{n_1}{360}\right)$$

$$Vn_1 = 0,01666666 \times Vn_1 \times n_1 \Rightarrow n_1 = \frac{1}{0,01666666} = 60 \Rightarrow n_1 = 60\,jours$$

من المعادلة (1) نجد:

$$n_2 = n_1 + 20 = 60 + 20 = 80 \Rightarrow n_2 = 80\,jours$$

- حساب القيم الاسمية: من المعادلة رقم (4):

$$EC_1 = EC_2 \Rightarrow Vn_1 \times 0,05 \times \frac{60}{360} = Vn_2 \times 0,03 \times \frac{80}{360}$$

$$\Rightarrow 0,008333Vn_1 = 0,006666Vn_2$$

بتعويض Vn_2 بما يقابلها في المعادلة (3) نجد:

$$\Rightarrow 0,008333Vn_1 = 0,006666\left(Vn_1 + 400\right) \Rightarrow Vn_1 = \frac{2,666}{0,00166633} = 1600$$

$$Vn_1 = 1600DA$$

$$Vn_2 = 2000DA$$

2- حساب تاريخ استحقاق الورقة الجديدة:

في هذه الحالة نحن بصدد استحقاق وسطي:

$$N = \frac{Vn_1 \times n_1 + Vn_2 \times n_2}{Vn} \Rightarrow N = \frac{1600 \times 0 + 2000 \times 20}{3600} = 11,11 \Rightarrow N \simeq 11Jours$$

تاريخ استحقاق الورقة الجديدة = 2 ماي 2018.

القسم الثاني

الفائدة المركبة وتطبيقاتها

تمارين حول الفائدة المركبة

أولا- ملخصات الفائدة المركبة

- الترميز:

V : الجملة او القيمة المكتسبة.	I : الفائدة المركبة.
C : أصل المبلغ أو قيمة القرض.	n : المدة.
Va : القيمة الحالية.	t : معدل الفائدة.

❖ **قانون الجملة بفائدة مركبة:**

$$V = C(1+t)^n$$

❖ **قانون الفائدة المركبة:**

$$I = C\left[(1+t)^n - 1\right]$$

❖ **معدل الفائدة المتناسب:**

$$t_k = \frac{t}{k}$$

❖ **معدل الفائدة المكافئ:**

$$t_k = (1+t)^{\frac{1}{k}} - 1$$

❖ **القيمة الحالية:**

$$Va = V(1+t)^{-n}$$

ثانيا- تمارين الفائدة المركبة

🕮 التمرين الأول:

موظف أودع مبلغ 430000دج لدى الصندوق الوطني للتوفير لمدة 3سنوات بمعدل فائدة مركبة 5% سنويا.

المطلوب:

1) أحسب الفوائد المحصل عليها في هذه المدة.

2) سحب الموظف القيمة المكتسبة من المبلغ المودع بالفائدة المركبة في نهاية المدة وأودعه في بنك التنمية المحلية لمدة 3 سنوات أخرى فتحصل على قيمة مكتسبة جديدة قدرها 609800دج.

- أحسب معدل الفائدة المطبق في بنك التنمية المحلية.

3) إذا أودعت القيمة المكتسبة من بنك التنمية المحلية في بنك آخر للحصول على جملة مكتسبة قدرها 860782,46دج بمعدل فائدة مركب 9%.

- أحسب المدة اللازمة لتحقيق ذلك.

🕮 التمرين الثاني : أوجد الجملة المكتسبة في الحالات التالية :

الحالة	المبلغ	t % سنويا	المدة	الفائدة تضاف كل :
1	1000	%20	3 سنوات	سنة
2	3000	%12	6 أشهر	ربع سنة
3	5000	%8	سنة	3 أشهر
4	15000	%12	3 أشهر	شهريا
5	6000	%10	سنة	نصف سنة
6	1500	%12	4,25 سنة	ربع سنة
7	1000	%13,5	10,5 سنة	4 أشهر
8	3000	%7	3,5 سنة	3 أشهر

🕮 التمرين الثالث:

أودع شخص في البنك مبلغين من المال بفائدة مركبة، المبلغ الأول قدره 20000 دج بمعدل فائدة t_1، المبلغ الثاني قدره 60000دج بمعدل فائدة t_2، بعد 3 سنوات بلغ مجموع القيمة المكتسبة لهذين المبلغين 110196,26دج.

أما إذا أودع مبلغ 20000دج بمعدل فائدة t_2، والمبلغ 60000دج بمعدل فائدة t_1، فإن مجموع القيمة المكتسبة لهذين المبلغين بعد 3 سنوات ستبلغ 105800,3دج.

المطلوب : أحسب المعدلين t_1، t_2.

🕮 التمرين الرابع :

أودع شخص 10000دج في حساب ادخار بالبنك A هذا الأخير يحتسب فائدة سنوية قدرها 6% يضيف الفائدة كل ثلاثة أشهر، وفي نفس الوقت قام نفس الشخص بإيداع مبلغ 10000دج في البنك B، الذي يطبق معدل فائدة مركبة 6,5% سنويا.

المطلوب: قارن بين الفائدة التي تم الحصول عليها في البنكين بعد 10 سنوات. (أي البنكين دفع أكثر؟)

🕮 التمرين الخامس :

تم توظيف مبلغ 15000دج لمدة 4 سنوات بمعدل فائدة مركبة 9% سنويا.

المطلوب : أحسب جملة هذا المبلغ باستعمال معدلات الفائدة المتكافئة إذا كانت الفائدة تحسب :

أ- كل سنة (سنويا).

ب- كل 6 أشهر (سداسيا)

ج- كل 3 أشهر (ثلاثيا).

🕮 التمرين السادس:

مبلغ قدره 10000دج وظف لمدة 10 سنوات، فكانت فائدة السنة الخامسة (فقط) تساوي الفائدة المحققة عن توظيف نفس المبلغ بنفس المعدل لمدة 405 يوم بفائدة بسيطة.

المطلوب:

1) أحسب معدل التوظيف.

2) أحسب الفوائد المحققة في نهاية السنة العاشرة.

📖 التمرين السابع :

اقترض شخص مبلغ مالي من أحد البنوك بمعدل فائدة 5% سنويا، لمدة 5سنوات، وبعد سنة ونصف أعاد توظيف أصل المبلغ المقترض في بنك آخر برسملة نصف سنوية لمدة ثلاث سنوات ونصف، وبمعدل فائدة 8% سنويا.

فإذا علمت أن هذا الشخص حقق من العمليتين عائد قدره 1784,3دج.

المطلوب: ما هو قيمة المبلغ المقترض؟

📖 التمرين الثامن :

أمام شخص اختيار طريقة بين الطرق الثلاثة لعملية توظيف مبلغ 100000دج بمعدل فائدة مركبة سنوي لمدة 12 سنة:

- الطريقة الأولى: يوظف 100000دج بمعدل 2% كل أربع أشهر.

- الطريقة الثانية: يتم التوظيف على مرحلتين مبلغ 40000دج وبمعدل سنوي 5,5% لمدة 12 سنة. ثم في نهاية السنة السادسة (6) يوظف مبلغ 60000دج بمعدل سنوي 8%.

- الطريقة الثالثة: يوظف مبلغ 100000دج بمعدل فائدة سنوية متزايدة: الأربع سنوات الأولى بمعدل 5%، الأربع سنوات الثانية بمعدل 6%، الأربع سنوات الأخيرة بمعدل 7%.

المطلوب: ما هي طريقة التوظيف التي تنصح بها هذا الشخص ؟

📖 التمرين التاسع:

مبلغ أنتج جملة في نهاية السنة الثانية قدرها 8089,375دج، وفي نهاية السنة الثالثة أصبحت 8696,08دج.

المطلوب: أحسب معدل التوظيف وأصل المبلغ.

📖 التمرين العاشر:

أوجد الجملة في نهاية سبع سنوات من توظيف مبلغ 4000دج عند معدل فائدة 6% سنويا، تضاف الفائدة شهريا لأول سنتين، و بمعدل 6,5% سنويا لمدة خمس سنوات الأخيرة.

ثالثا- حلول تمارين الفائدة المركبة

حل التمرين الأول:

1) حساب الفوائد المحصل عليها في هذه المدة.

$$V = C(1+t)^n - C = 430000(1+0,05)^3 - 430000 = 497778,75 - 430000 = 67778,75DA$$

2) حساب معدل الفائدة المطبق في بنك التنمية المحلية :

$$V = C(1+t)^n$$

$$609800 = 497778,75(1+t)^3$$

$$\frac{609800}{497778,75} = (1+t)^3$$

$$1,2250422502 = (1+t)^3$$

$$(1+t) = \sqrt[3]{1,2250422502}$$

$$(1+t) = 1,07$$

$$t = 7\%$$

3) حساب المدة اللازمة الهدف :

$$V = C(1+t)^n$$

$$860782,46 = 609800(1,09)^n$$

$$\frac{860782,46}{609800} = (1,09)^n$$

$$1,4115816 = (1,09)^n$$

$$\log 1,4115816 = n \log 1,09$$

$$n = \frac{\log 1,4115816}{\log 1,09} = 4ans$$

حل التمرين الثاني:

- الحالة الأولى :

$$V = C(1+t)^n$$

$$V = 1000(1+0,2)^3 = 1728DA$$

- الحالة الثانية :

$$k=4; n\times k=\frac{1}{2}\times 4=2.$$

$$t_k=\frac{t}{k}\Rightarrow t_4=\frac{12\%}{4}=3\%.$$

$$V=C(1+t_k)^{n\times k}$$

$$V=3000(1+0,03)^2=3000(1,0609)=3182,7DA$$

- الحالة الثالثة :

$$k=4; n\times k=1\times 4=4.$$

$$t_k=\frac{t}{k}\Rightarrow t_4=\frac{8\%}{4}=2\%.$$

$$V=C(1+t_k)^{n\times k}$$

$$V=5000(1+0,02)^4=5412,16DA$$

- الحالة الرابعة :

$$k=12; n\times k=\frac{1}{4}\times 12=3.$$

$$t_k=\frac{t}{k}\Rightarrow t_{12}=\frac{12\%}{12}=1\%.$$

$$V=C(1+t_k)^{n\times k}$$

$$V=15000(1+0,01)^3=15454,52DA$$

- الحالة الخامسة :

$$k=2; n\times k=1\times 2=2.$$

$$t_k=\frac{t}{k}\Rightarrow t_2=\frac{10\%}{2}=5\%.$$

$$V=C(1+t_k)^{n\times k}$$

$$V=6000(1+0,05)^2=6000(1,1025)=6615DA$$

- الحالة السادسة :

$$k=4; n\times k=4,25\times 4=17.$$

$$t_k=\frac{t}{k}\Rightarrow t_4=\frac{12\%}{4}=3\%.$$

$V = C(1+t_k)^{n\times k}$

$V = 1500(1+0,03)^{17} = 2479,27DA$

- الحالة السابعة :

$k = 3; n\times k = 10,5\times 3 = 31,5.$

$t_k = \frac{t}{k} \Rightarrow t_3 = \frac{13,5\%}{3} = 4,5\%.$

$V = C(1+t_k)^{n\times k}$

$V = 1000(1+0,045)^{31,5} = 4000,95DA$

- الحالة الثامنة :

$k = 4; n\times k = 3,5\times 4 = 14.$

$t_k = \frac{t}{k} \Rightarrow t_4 = \frac{7\%}{4} = 1,75\%.$

$V = C(1+t_k)^{n\times k}$

$V = 3000(1+0,0175)^{14} = 3824,75DA$

حل التمرين الثالث:

يمكن التعبير عن المسألة رياضيا كما يلي :

$110196,26 = 20000(1+t_1)^3 + 60000(1+t_2)^3 ....(1)$

$105800,3 = 20000(1+t_2)^3 + 60000(1+t_1)^3 ....(2)$

نضع :

$x = (1+t_1)^3; y = (1+t_2)^3$

تصبح جملة المعادلتين بالشكل التالي :

$110196,26 = 20000x + 60000y ....(1)$

$105800,3 = 20000y + 60000x ....(2)$

بقسمة المعادلتين على 20000 نجد :

$5,509813 = x + 3y ....(1)$

$5,290015 = 3x + y ....(2)$

من (1) نجد :

$x = 5,509813 - 3y$

بتعويض x بقيمته في المعادلة (2) نجد :

$5,290015 = 3(5,509813 - 3y) + y$
$5,290015 = 16,529439 - 9y + y$
$8y = 11,239424$
$y = \dfrac{11,239424}{8} = 1,404928$
$y = (1+t_2)^3 = 1,404928$
$(1+t_2) = \sqrt[3]{1,404928} = 1,12$
$t_2 = 0,12 = 12\%$

بتعويض y بقيمته في المعادلة (2) نجد :

$5,290015 = 3x + 1,404928$
$3,885087 = 3x$
$x = \dfrac{3,885087}{3} = 1,295029$

$x = (1+t_1)^3 = 1,295029$

$(1+t_1) = \sqrt[3]{1,295029} = 1,09$
$t_1 = 0,09 = 9\%$

حل التمرين الرابع:

- حساب قيمة الفائدة المحققة في البنك A :

$k = 4; n \times k = 10 \times 4 = 40.$
$t_k = \dfrac{t}{k} \Rightarrow t_4 = \dfrac{6\%}{4} = 1,5\%.$

$V = C(1+t_k)^{n\times k}$

$V = 10000(1+0,015)^{40} = 18140,18DA$

$I = V - C = 18140,18 - 10000 = 8140,18DA$

- حساب قيمة الفائدة المحققة في البنك B :

$V = 10000(1+0,065)^{10} = 18771,37DA$

$I = V - C = 18771,37 - 10000 = 8771,37DA$

البنك B دفع أكثر من البنك A.

حل التمرين الخامس:

- **باستعمال معدلات الفائدة المتكافئة :**

أ- حالة رسملة سنوية :

$$V = C(1+t)^n \Rightarrow V = 15000(1+0,09)^4$$
$$V = 21173,72DA$$

ب- حالة رسملة سداسية :

معدل الفائدة السداسي المكافئ لمعدل الفائدة السنوي 9% هو : 4,403065%.

$$t_k = (1+t)^{\frac{1}{k}} - 1$$
$$\Rightarrow t_2 = (1,09)^{\frac{1}{2}} - 1$$
$$t_2 = 0,04403065$$
$$t_2 = 4,403065\%$$

$$V = C(1+t_k)^{n\times k} \Rightarrow V = 15000(1+0,04403065)^{4\times 2}$$
$$\Rightarrow V = 15000(1,04403065)^8 = 21173,72DA$$

ج- حالة رسملة كل ثلاثي :

معدل الفائدة الثلاثي المكافئ لمعدل الفائدة السنوي 9% هو 2,177818%.

$$t_k = (1+t)^{\frac{1}{k}} - 1$$
$$\Rightarrow t_4 = (1,09)^{\frac{1}{4}} - 1$$
$$t_4 = 0,02177818$$
$$t_4 = 2,177818\%$$

$$V = C(1+t_k)^{n\times k} \Rightarrow V = 15000(1+0,02177818)^{4\times 4}$$
$$\Rightarrow V = 15000(1,02177818)^{16} = 21173,72DA$$

حل التمرين السادس:

- حساب معدل التوظيف :

فائدة السنة الخامسة = الجملة المحصلة خلال السنة الرابعة × معدل الفائدة = الفائدة المحققة عن توظيف نفس المبلغ بنفس المعدل لمدة 405 يوم بفائدة بسيطة.

- فائدة السنة الخامسة :

$I_5 = C(1+t)^4 \times t = 10000(1+t)^4 \times t$

- الفائدة البسيطة لمدة 405 يوم :

$I_5 = 10000 \times t \times \frac{405}{360}$

$\Rightarrow 10000(1+t)^4 \times t = 11250 \times t$

$\Rightarrow (1+t)^4 \times t = 1{,}125 \times t$

$\Rightarrow (1+t)^4 = 1{,}125$

$\Rightarrow t = \sqrt[4]{1{,}125} - 1 = 0{,}03$

$t = 3\%$

2- الفوائد المحققة في نهاية السنة العاشرة :

$I = C(1+t)^{10} - C$

$I = 10000(1{,}03)^{10} - 10000$

$I = 3439{,}16 DA$

حل التمرين السابع:

بما أن الشخص حقق عائدا وليس خسارة فإن ذلك يفسر بكون جملة المبلغ الموظف V_2 أكبر من جملة المبلغ المقترض V_2 .

تم توظيف المبلغ برسملة نصف سنوية ، وعليه تصبح الفترات ومعدل الفائدة السداسي كما يلي :

$k = 2; n \times k = 3{,}5 \times 2 = 7.$

$t_k = \frac{t}{k} \Rightarrow t_2 = \frac{8\%}{2} = 4\%.$

وعليه :

$V_2 - V_1 = 1784{,}3$

$\Rightarrow C(1+0{,}04)^7 - C(1+0{,}05)^5$

$\Rightarrow 1{,}3159317C - 1{,}2762815C = 1784{,}3$

$\Rightarrow 0{,}0396501C = 1784{,}3$

$C = 45000 DA$

حل التمرين الثامن:

المقارنة تكون على أساس القيمة المكتسبة أيها أكبر.

- الطريقة الأولى :

$$V_1 = C(1+t_3)^{n\times k} = 100000(1,02)^{36} = 203988,73DA$$

- الطريقة الثانية :

$$V_2 = C_1(1+t_1)^{n1} + C_2(1+t_2)^{n2}$$
$$V_2 = 40000(1,055)^{12} + 60000(1,08)^{6}$$
$$V_2 = 76048,3 + 95212,45 = 171260,75DA$$

- الطريقة الثالثة :

$$V_3 = C(1+t_1)^4(1+t_2)^4(1+t_3)^4$$
$$V_3 = 100000(1,05)^4(1,06)^4(1,07)^4$$
$$V_3 = 1000000(2,0114802) = 201148,02DA$$

وعليه ننصح الشخص بتوظيف المبلغ حسب الطريقة الأولى لأنها تعطي أكبر قيمة مكتسبة بعد 12 سنة من الآن.

حل التمرين التاسع:

- **حساب معدل التوظيف :**

$$V_2 = 8089,375 = C(1+t)^2 \text{..............................}(1)$$
$$V_3 = 8696,08 = C(1+t)^3 \text{..............................}(2)$$

بقسمة (2) على (1) نجد :

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{8696,08}{8089,375} = \frac{C(1+t)^3}{C(1+t)^2} = \frac{\cancel{C(1+t)^2}\,(1+t)}{\cancel{C(1+t)^2}}$$

$$\Rightarrow 1,075 = (1+t)$$

$$t = 1,075 - 1 = 0,075$$

$$t = 7,5\%$$

- **حساب أصل المبلغ :**

من المعادلة (1) نجد :

$$8089,375 = C(1,075)^2$$

$$\Rightarrow C = \frac{8089,375}{1,155625} = 7000$$

$$C = 7000DA$$

حل التمرين العاشر:

تحسب جملة المبلغ حتى نهاية السنة الثانية على أساس أن الفائدة تضاف كل شهر بمعدل شهري، وبعدها يتم ضرب الجملة المحصلة في معامل الفائدة المركبة لخمس سنوات الأخيرة على أساس معدل فائدة سنوي 6,5%.

- الجملة في نهاية السنة الثانية :

$k = 12; n \times k = 2 \times 12 = 24.$

$t_k = \dfrac{t}{k} \Rightarrow t_{12} = \dfrac{6\%}{12} = 0,05\%.$

$V_2 = C(1+t_k)^{n \times k}$

$V_2 = 4000(1+0,005)^{24} = 4508,64DA$

- الجملة في نهاية السنة السابعة :

تحسب يناء على الجملة المحققة في نهاية السنة الثانية لمدة 5 سنوات الباقية :

$V_7 = V_2(1+t)^5$

$V_7 = 4508,64(1+0,065)^5 = 6177,23DA$

تمارين حول الدفعات الثابتة بفائدة مركبة

أولا- ملخصات الدفعات الثابتة بفائدة مركبة

- الترميز:

V : الجملة او القيمة المكتسبة.	I : الفائدة المركبة.
a : الدفعة.	n : المدة.
Va : القيمة الحالية.	t : معدل الفائدة.

الدفعات العادية (آخر المدة)

❖ قانون الجملة :

$$V = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

❖ قانون القيمة الحالية :

$$Va = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

الدفعات الفورية (أول المدة)

❖ قانون الجملة :

$$V = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}(1+t)$$

❖ قانون القيمة الحالية :

$$Va = a(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

ثانيا- تمارين الدفعات الثابتة بفائدة مركبة

🕮 التمرين الأول:

✍ شخص يقوم بإيداع دفعات ثابتة كل نهاية سنة، قيمة كل دفعة 10000دج، إذا علمت أن معدل الفائدة المركب 10% سنويا، وأن تاريخ أول دفعة 2003/12/31، وآخر دفعة بتاريخ 2017/12/31.

المطلوب: احسب الجملة المكتسبة :

1) بتاريخ 2017/12/31.
2) بتاريخ 2018/12/31.
3) بتاريخ 2022/12/31.

🕮 التمرين الثاني:

✍ أوجد جملة الدفعات لآخر المدة في الحالات التالية :

الحالة	الدفعة	المتناسب t_k	فترة الدفع	المدة
1	700	%10	سنة	سنتين
2	4000	%20	ربع سنة	9 أشهر
3	500	%18	6 أشهر	سنة
4	1000	%6	شهر	4 أشهر
5	3000	%8	ربع سنة	سنة
6	600	%6	نصف سنة	1,5 سنة

🕮 التمرين الثالث:

✍ يودع شخص في أحد البنوك 500دج أول كل سنة لمدة 12 سنة، فإذا علمت أن البنك احتسب فوائد مركبة بمعدل 8% خلال العشر سنوات الأولى و 9% سنويا خلال السنتين الأخيرتين.

المطلوب : أحسب الجملة المكتسبة في نهاية المدة.

🕮 التمرين الرابع :

✍ عند توظيف دفعات سنوية متساوية قيمتها 4000دج في بداية كل سنة فإنها تنتج جملة مكتسبة قدرها 24976,08دج ، أما إذا اعتبرنا الدفعات السابقة تدفع في آخر السنة فإنها تنتج جملة مكتسبة قدرها 23233,56دج.

المطلوب: حساب معدل الفائدة و عدد الدفعات.

🕮 التمرين الخامس :

✍ سلسلة دفعات لآخر السنة عددها 12 دفعة ، تم إيداعها كما يلي :

- ❖ أربع (4) دفعات للسنوات الأربع الأولى بمبلغ 1500دج للدفعة.
- ❖ أربع (4) دفعات للسنوات الأربع التالية بمبلغ 2000دج للدفعة.
- ❖ أربع (4) دفعات للسنوات الأربع الأخيرة بمبلغ 2500دج للدفعة.

المطلوب:

1) أحسب الجملة المكتسبة والقيمة الحالية لهذه السلسلة من الدفعات إذا كان معدل الفائدة 11%.

2) إذا كان معدل الفائدة للدفعات الأربع الأولى 9%، وللأربع دفعات التالية 10,5%، وللأربع دفعات الأخيرة 12%. - أحسب الجملة المكتسبة والقيمة الحالية لهذه السلسلة من الدفعات.

🕮 التمرين السادس:

✍ يطمح شخص توفير مبلغ لشراء سيارة، فقام بإيداع مبالغ متساوية بقيمة 29900دج في بداية كل سداسي لمدة معينة، وذلك بمعدل فائدة مركبة 5% للسداسي، فحقق بعد هذه المدة جملة قدرها 499718,2دج.

المطلوب : كم سنة وكم دفعة يتطلب لتحقيق هذا الهدف؟

🕮 التمرين السابع :

✍ يودع شخص في أحد البنوك في نهاية كل سنة مبلغا ثابتا، بمعدل فائدة t_1 سنويا، وفي نهاية السنة الخامسة بلغ رصيده 115014,78دج. وشخص آخر يودع في نفس البنك نصف مبلغ الشخص الأول في بداية كل سداسي لمدة 5 سنوات، بمعدل فائدة مركبة 1% سداسيا، وفي نهاية المدة حصل على جملة قدرها 105668,34دج.

المطلوب: أحسب قيمة الدفعة لكلا الشخصين، ومعدل الفائدة t_1.

ثالثا- حلول تمارين الدفعات الثابتة بفائدة مركبة

حل التمرين الأول:

حساب الجملة المكتسبة بتاريخ 2017/12//31 : (*n=15 ans*)

$$V = A\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$V = 10000\frac{(1,1)^{15} - 1}{0,1} = 317724,81DA$$

حساب الجملة المكتسبة بتاريخ 2018/12//31 : بعد دفع آخر دفعة بسنة واحدة.

$$V = A\frac{(1+t)^n - 1}{t}(1+t)$$

$$V = 10000\frac{(1,1)^{15} - 1}{0,1}(1,1) = 349487,3DA$$

حساب الجملة المكتسبة بتاريخ 2022/12//31 : بعد دفع آخر دفعة بـ 5 سنوات.

$$V = A\frac{(1+t)^n - 1}{t}(1+t)^5$$

$$V = 10000\frac{(1,1)^{15} - 1}{0,1}(1,1)^5 = 511699DA$$

حل التمرين الثاني:

- الحالة الأولى:

$$V = A\frac{(1+t)^n - 1}{t} = 700\frac{(1,1)^2 - 1}{0,1} = 1470DA$$

$$I = V - n\times A = 1470 - 700\times 2 = 70DA$$

- الحالة الثانية:

$$n\times k = \frac{3}{4}\times 4 = 3; t_4 = 20\%$$

$$V = A\frac{(1+t_k)^{n\times k} - 1}{t_k} = 4000\frac{(1,2)^3 - 1}{0,2} = 14560DA$$

$$I = V - n\times A = 14560 - 4000\times 3 = 2560DA$$

- الحالة الثالثة :

$$n\times k=1\times 2=2;t_4=18\%$$

$$V=A\frac{(1+t_k)^{n\times k}-1}{t_k}=500\frac{(1,18)^2-1}{0,18}=1090DA$$

$$I=V-n\times A=1090-500\times 2=90DA$$

- الحالة الرابعة :

$$n\times k=\frac{1}{3}\times 12=4;t_k=6\%$$

$$V=A\frac{(1+t_k)^{n\times k}-1}{t_k}=1000\frac{(1,06)^4-1}{0,06}=4374,6DA$$

$$I=V-n\times A=4374,6-1000\times 4=374,6DA$$

- الحالة الخامسة :

$$n\times k=1\times 4=4;t_k=8\%$$

$$V=A\frac{(1+t_k)^{n\times k}-1}{t_k}=3000\frac{(1,08)^4-1}{0,08}=13518,33DA$$

$$I=V-n\times A=13518,33-3000\times 4=1518,33DA$$

- الحالة السادسة :

$$n\times k=1,5\times 2=3;t_k=6\%$$

$$V=A\frac{(1+t_k)^{n\times k}-1}{t_k}=600\frac{(1,06)^3-1}{0,06}=1910,16DA$$

$$I=V-n\times A=1910,16-600\times 3=110,16DA$$

حل التمرين الثالث:

يتم حل المسألة على مرحلتين: وليكن $t_1=8\%\ ;\ t_2=9\%$

المرحلة الأولى: وفيها نحسب جملة 10 دفعات سنوية لأول المدة قيمة الواحدة 500دج بمعدل 8%، ثم نحسب جملتها في تاريخ لاحق لاستحقاقها بسنتين بمعدل 9% سنويا.

$$V_1=\left[A\frac{(1+t_1)^{10}-1}{t_1}(1+t_1)\right](1+t_2)^2=\left[500\frac{(1,08)^{10}-1}{0,08}(1,08)\right](1,09)^2$$

$$V_1=\left[500(15,645487)\right](1,1881)=7822,74\times 1,1881$$

$$V_1=9294,20DA$$

المرحلة الثانية: يتم فيها إيجاد جملة دفعة سنوية لأول المدة قيمتها 500دج لمدة سنتين بمعدل 9% ؛ (من السنة 10- 12).

$$V_2 = A\frac{(1+t_2)^2-1}{t_2}(1+t_2) = 500\frac{(1,09)^2-1}{0,09}(1,09) = 500\times 2,2781$$

$$V_2 = 1139,05DA$$

وعليه فجملة دفعة سنوية فورية قيمتها 500دج لمدة 12 سنة بمعدل فائدة 8% خلال العشر سنوات الأولى و9% خلال السنتين الأخيرتين هي مجموع المرحلتين السابقتين:

$$V = V_1 + V_2 = 9294,20 + 1139,05$$

$$V = 10433,25DA$$

حل التمرين الرابع:

1- حساب معدل الفائدة:

- دفعات تسديد (آخر المدة):

$$V = A\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$\Rightarrow 23233,56 = 4000\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{23233,56}{4000} = \frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$\Rightarrow 5,80839 = \frac{(1+t)^n-1}{t}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

- دفعات توظيف (أول المدة):

$$V = a\frac{(1+t)^n-1}{t}(1+t)$$

$$\Rightarrow 24976,08 = 4000\frac{(1+t)^n-1}{t}(1+t)$$

$$\Rightarrow \frac{24976,08}{4000} = \frac{(1+t)^n-1}{t}(1+t)$$

$$\Rightarrow 6.24402 = \frac{(1+t)^n-1}{t}(1+t)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بتعويض معامل الفائدة المركبة الخاص بالمعادلة (1) بقيمته في المعدلة (2) نجد :

$$6.24402 = 5,80839(1+t)$$

$$\Rightarrow \frac{6.24402}{5,80839} = (1+t)$$

$$\Rightarrow 1,075 = (1+t) \Rightarrow t = 1,075 - 1 = 0,075$$

$$t = 7,5\%$$

2- حساب عدد الدفعات :

بتعويض t بقيمته في المعادلة (1) نجد :

$$5,80839 = \frac{(1,075)^n - 1}{0,075}$$

$$\Rightarrow 0,435629 = (1,075)^n - 1$$

$$\Rightarrow 1,435629 = (1,075)^n$$

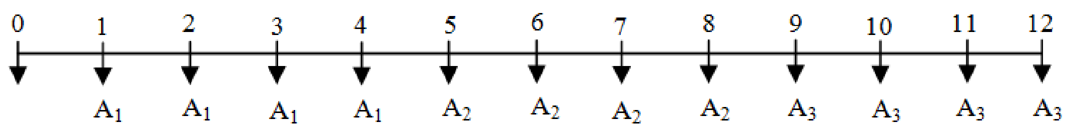
$$\Rightarrow \log 1,435629 = n \times \log(1,075)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 1,435629}{\log(1,075)} = \frac{0,3616}{0,07232} = 5$$

$$n = 5ans$$

حل التمرين الخامس:

1) حساب الجملة المحصلة والقيمة الحالية لسلسلة الدفعات بمعدل فائدة 11%.



أ- حساب الجملة المحصلة :

$$V = A\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$V = 1500\frac{(1,11)^4 - 1}{0,11}(1,11)^8 + 2000\frac{(1,11)^4 - 1}{0,11}(1,11)^4 + 2500\frac{(1,11)^4 - 1}{0,11}$$

$$V = 16280,63 + 14299,41 + 11774,33 = 42354,36$$

$V = 42354,36 DA$

ب- حساب القيمة الحالية :

يمكن حساب القيمة الحالية بطريقتين :

الطريقة الأولى : باستخدام علاقة القيمة الحالية للدفعات العادية :

$$Va = A\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$Va = 1500\frac{1-(1,11)^{-4}}{0,11} + 2000\frac{1-(1,11)^{-4}}{0,11}(1,11)^{-4} + 2500\frac{1-(1,11)^{-4}}{0,11}(1,11)^{-8}$$

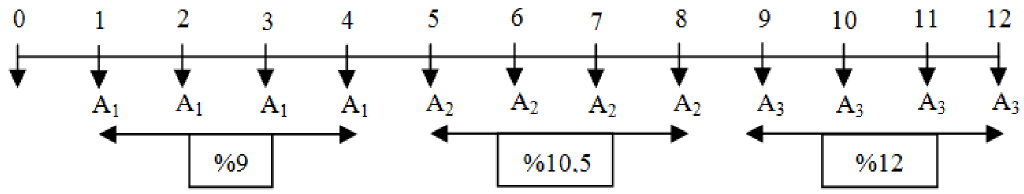
$$Va = 4653,66 + 4087,35 + 3365,83 = 12106,6$$

$$Va = 12106,6 DA$$

الطريقة الثانية : انطلاقا من الجملة المحصلة :

$$Va = V_0(1+t)^{-n}$$
$$Va = 42354,34(1,11)^{-12}$$
$$Va = 12106,6 DA$$

2) حساب الجملة المحصلة والقيمة الحالية لسلسلة الدفعات بمعدل فائدة متغير عبر 12 سنة :



أ- حساب الجملة المحصلة :

$$V = 1500\frac{(1,09)^4-1}{0,09}(1,105)^4(1,12)^4 + 2000\frac{(1,105)^4-1}{0,105}(1,12)^4 + 2500\frac{(1,12)^4-1}{0,12}$$

$$V = 16092,58 + 14713,21 + 11948,32$$

$$V = 42754,11 DA$$

ب- حساب القيمة الحالية :

الطريقة الأولى : باستخدام علاقة القيمة الحالية للدفعات العادية :

$$Va = 1500\frac{1-(1,09)^{-4}}{0,09} + 2000\frac{1-(1,105)^{-4}}{0,105}(1,09)^{-4} + 2500\frac{1-(1,12)^{-4}}{0,12}(1,105)^{-4}(1,09)^{-4}$$

$$Va = 4859,58 + 4443,04 + 3608,11 = 12910,73$$
$$Va = 12910,73DA$$

الطريقة الثانية : انطلاقا من الجملة المحصلة :

$$Va = V(1+t_3)^{-4}(1+t_2)^{-4}(1+t_1)^{-4} = 42754,11(1,12)^{-4}(1,105)^{-4}(1,09)^{-4}$$
$$Va = 12910,73DA$$

حل التمرين السادس:

حساب عدد السنوات n وعدد الدفعات : n.k= 2n :

$$V = 499718,2 = 29900\frac{(1,05)^{2n}-1}{0,05}(1,05)$$

$$\Rightarrow 499718,2 = 627900\left[(1,05)^{2n}-1\right]$$

$$\Rightarrow 0,795856346 = (1,05)^{2n}-1$$
$$\Rightarrow 1,795856346 = (1,05)^{2n}$$

$$\Rightarrow \log 1,795856346 = 2n \times \log(1,05)$$
$$\Rightarrow 2n = \frac{\log 1,795856346}{\log(1,05)} = \frac{0,585481981}{0,048790164} = 12$$
$$\Rightarrow n = 6ans$$

وعليه لتحقيق هدف هذا الشخص بشراء سيارة لابد أن ينتظر 6 سنوات، وبالتالي يدفع 12 دفعة كل بداية سداسي.

حل التمرين السابع:

حساب قيمة الدفعة A :

الشخص الأول يوظف 5 دفعات لآخر السنة قيمة الواحدة A والثاني يوظف نصفها (أي 0,5A) في بداية كل سداسي أي

:*n.k= 2.5 = 10*

يمكن التعبير عن عملية توظيف الشخص الثاني كما يلي :

$$V = 105668,34 = 0,5A\frac{(1,01)^{10}-1}{0,01}(1,01)$$

$$\Rightarrow A = \frac{105668,34}{5,283417333} = 20000DA$$

وعليه يوظف الشخص الأول دفعة قدرها 20000دج والثاني نصف الأولى أي 10000دج.

حساب معدل الفائدة A:

$$V_1 = 115014,78 = 20000\frac{(1+t_1)^5 - 1}{t_1}$$

$$\Rightarrow 5,750739 = \frac{(1+t_1)^5 - 1}{t_1}$$

بالبحث في الجدول المالي رقم (3) على القيمة 5,750739 المقابلة للسنة 5 نجدها تقابل معدل الفائدة المركبة 7% سنويا.

تمارين حول استهلاك القروض طويلة الأجل

أولا- ملخصات استهلاك القروض طويلة الأجل

- الترميز:

C_0 : أصل القرض.	I_i : الفائدة في السنة i.
a : الدفعة (القسط الثابت).	n : مدة القرض (عدد السنوات).
M_i : استهلاك السنة i.	t : معدل الفائدة.

❖ **أصل القرض:**

- **بدلالة الدفعة:**

$$C_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

- **بدلالة الاستهلاكات:**

$$C_0 = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

- **بدلالة الاستهلاك الأول:**

$$C_0 = M_1\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

❖ **الدفعة الثابتة a:**

$$a = C_0\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

$$a = M_i + I_i$$

❖ **العلاقة بين الاستهلاكات:**

- استهلاك فترة i بدلالة الاستهلاك الفترة k:

$$M_i = M_k(1+t)^{i-k}$$

ثانيا- تمارين استهلاك القروض طويلة الأجل

🕮 التمرين الأول:

✍ بتاريخ 2016/01/02 اقترضت شركة صناعية من أحد البنوك مبلغ 9936,39دج، لشراء آلة، واتفقت معه على تسديد قيمتها على 04 دفعات ثابتة تسدد في نهاية كل سنة، فإذا علمت أن معدل الفائدة على القرض هو 8% سنويا.

المطلوب:

1) حساب قيمة القسط السنوي المتساوي.

2) إعداد جدول استهلاك القرض مع إظهار العمليات الحسابية للسطرين الأول والثاني.

🕮 التمرين الثاني:

✍ بتاريخ 2014/01/02 اقترضت مؤسسة صناعية مبلغ 490000دج، بمعدل فائدة مركبة 7% سنويا، ويسدد على دفعات ثابتة سنوية لمدة 7 سنوات.

المطلوب:

1) أحسب قيمة الدفعة الثابتة.

2) أنجز السطر الأول والخامس من جدول استهلاك القرض.

🕮 التمرين الثالث:

✍ اقترض شخص من أحد البنوك مبلغ 500000دج، على أن يتم استهلاكه بواسطة 6 أقساط سنوية متساوية (دفعات ثابتة). إذا علمت أن البنك قد منح لهذا الشخص فترة سماح لمدة سنتين، لا يسدد فيها أي مبلغ، وأن معدل الفائدة 12% سنويا.

المطلوب: أحسب القسط السنوي المتساوي، ثم انجز جدول استهلاك القرض.

🕮 التمرين الرابع:

✍ اتفق أحد الأشخاص مع بنك التنمية المحلية على سداد قيمة قرض قيمته 25324,5دج على أقساط متساوية، بحيث يدفع القسط في نهاية كل ستة أشهر لمدة ثلاث سنوات، فإذا علمت أن معدل الفائدة السنوي هو 12%، وأن الفوائد تضاف كل نصف سنة.

المطلوب:

1) حساب قيمة القسط النصف سنوي.

2) إعداد جدول استهلاك القرض.

🕮 التمرين الخامس:

✍ من جدول استهلاك قرض يسدد على دفعات سنوية متساوية، استخرجنا البيانات التالية:

- الفرق بين فائدة السنتين الأولى والثانية: 1000دج.
- فائدة السنة الأخيرة: 2000دج.
- استهلاك السنة الأخيرة: 40000دج.

المطلوب:

1) حساب معدل الفائدة (t).

2) حساب قيمة الدفعة (a).

3) حساب قيمة الاستهلاك الأول (M_1).

4) حساب أصل القرض (C_0).

5) حساب مدة استهلاك هذا القرض (n).

🕮 التمرين السادس:

✍ بتاريخ 2018/01/02 اقترضت إحدى المؤسسات مبلغاً يسدد عن طريق 8 دفعات ثابتة سنوية.

المعلومات التالية استخرجت من جدول استهلاك هذا القرض:

الفترة	أصل القرض في بداية الفترة	الفائدة	الاستهلاك	الدفعة	رصيد القرض في نهاية الفترة
2018					
2019		286437,57	345922,75		
2020					
2021		221369,50			
....					

<u>**المطلوب**</u>:

1) احسب معدل الفائدة.

2) احسب قيمة الدفعة الثابتة.

3) احسب مبلغ أصل القرض.

4) أنجز السطر الأول والأخير من جدول الاستهلاك.

ثالثا - حلول تمارين استهلاك القروض طويلة الأجل

حل التمرين الأول:

1) حساب قيمة القسط السنوي المتساوي :

$$A = C_0 \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} \Rightarrow A = 9936,39 \frac{0,08}{1-(1+0,08)^{-4}}$$
$$\Rightarrow A = 9936,39 \times (0,3019208)$$

$$A = 3000 DA$$

2) جدول استهلاك القرض :

السنة	الرصيد بداية السنة	الفائدة كل سنة	القسط السنوي المتساوي	الاستهلاك من أصل القرض	الرصيد في نهاية كل سنة
1	9936,3900	794,911	3000	2205,0888	7731,3012
2	7731,3012	618,504	3000	2381,4959	5349,8053
3	5349,8053	427,980	3000	2572,0200	2777,7900
4	2777,7900	22,210	3000	2777,7900	0

حل التمرين الثاني:

1) حساب قيمة الدفعة الثابتة :

$$A = C_0 \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} \Rightarrow A = 490000 \frac{0,07}{1-(1+0,07)^{-7}}$$
$$A = 90921,07 DA$$

2) انجاز السطر الأول والخامس من جدول استهلاك القرض :

السطر الأول :

$$I_1 = C_0 \times t = 490000 \times 0,07 = 34300 DA$$
$$M_1 = A - I_1 = 0921,07 - 34300 = 56621,07 DA$$
$$C_1 = C_0 - M_1 = 490000 - 56621,07 = 433378,93 DA$$

السطر الخامس :

$M_5 = M_1(1+t)^4 = 56621,07(1+07)^4 = 74218,67DA$

$I_5 = A - M_5 = 90921,07 - 74218,67 = 16702,4DA$

$C_4 = \frac{I_5}{t} = \frac{16702,4}{0,07} = 238605,71DA$

$C_5 = C_4 - M_5 = 238605,71 - 74218,67 = 164387DA$

جدول استهلاك القرض :

السنة	الرصيد بداية السنة	الفائدة	الاستهلاك	الدفعة	الرصيد في نهاية كل سنة
1	490000	34300	56621,07	90921,07	433378,93
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
5	238605,71	16702,4	74218,67	90921,07	164387
.....	.....	.....	.....	.....	.....

حل التمرين الثالث:

بما أن هناك مدة سماح قدرها سنتين فهذا يعني أن قيمة القسط السنوي المتساوي يحسب على أساس جملة مبلغ 500000دج بعد مدة سنتين (فترة التأخير)، حيث الرصيد في بداية السنة الأولى هو $C_0 = 500000$، ويصبح في بداية الثانية والثالثة (نهاية السنة الأولى والثانية) كما يلي :

$C_1 = C_0(1+t) = 500000(1,12) = 560000DA$

$C_2 = C_1(1+t) = 560000(1,12) = 627200DA$

وعليه فالقسط السنوي المتساوي يحسب على أساس الرصيد في بداية السنة الثالثة (نهاية السنة الثانية) :

$$A = C_2 \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} \Rightarrow A = 627200 \frac{0,12}{1-(1+0,12)^{-6}}$$

$$\Rightarrow A = 627200 \times (0,243225718)$$

$$A = 152551,17DA$$

- جدول استهلاك القرض :

السنة	الرصيد بداية كل سنة	الفائدة كل سنة	القسط السنوي المتساوي	الاستهلاك من أصل القرض	الرصيد نهاية كل سنة
1	500000,00	-	-	-	560000,00
2	560000,00	-	-	-	627200,00
3	627200,00	75264,00	152551,17	77287,17	549912,83
4	549912,83	65989,53	152551,17	86561,63	463351,20
5	463351,20	55602,14	152551,17	96949,02	366402,17
6	366402,17	43968,26	152551,17	108582,90	257819,26
7	257819,26	30938,31	152551,17	121612,85	136206,40
8	136206,40	16344,76	152551,17	136206,40	0

حل التمرين الرابع:

1) حساب قيمة القسط النصف سنوي :

عدد الأقساط خلال 3 سنوات هو : $nk = 3\times 2 = 6$

معدل الفائدة نصف سنوي هو : $\frac{12\%}{2} = 6\%$

$$A = C_0 \frac{t_k}{1-(1+t_k)^{-nk}} \Rightarrow A = 25324,5 \frac{0,06}{1-(1+0,06)^{-3\times 2}}$$

$$A = 5150DA$$

2) جدول استهلاك القرض :

السنة	الرصيد بداية كل نصف سنة	الفائدة كل نصف سنة	القسط نصف سنوي	الاستهلاك من أصل القرض	الرصيد نهاية كل نصف سنة
1	25324,2000	1519,4520	5150	3630,5480	21693,6520
2	21693,6520	1301,6191	5150	3848,3808	17845,2711
3	17845,2711	1070,7162	5150	4079,2837	13765,9873
4	13765,9873	825,9592	5150	4324,0407	9441,9466
5	9441,9466	566,5167	5150	4583,4832	4858,4634
6	4858,4634	291,5078	5150	4858,4922	0 تقريباً

حل التمرين الخامس:

1) حساب معدل الفائدة (t) :

الرصيد المتبقي في بداية السنة الأخيرة = الاستهلاك الأخير، وعليه :

$$I_n = M_n \times t \Rightarrow 2000 = 40000 \times t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2000}{40000} = 0,05$$

$$t = 5\%$$

2) حساب قيمة الدفعة الثابتة (a):

الدفعة الثابتة = الاستهلاك + الفائدة

من السطر الأخير نجد:

$$a = M_n + I_n \Rightarrow 40000 + 2000 = 42000DA$$

3) حساب الاستهلاك الأول (M_1):

نعلم أن: الفرق بين فائدتين = الفرق بين استهلاكين:

$$I_1 - I_1 = M_2 - M_1 = 1000$$

$$\Rightarrow M_1(1+t) - M_1 = 1000$$

$$\Rightarrow M_1\left[(1+t) - 1\right] = 1000$$

$$\Rightarrow M_1 \times t = 1000$$

$$\Rightarrow M_1 \times 0,05 = 1000$$

$$M_1 = 20000DA$$

4) حساب أصل القرض (C_0):

$$C_0 = \frac{I_1}{t} = \frac{a - M_1}{t} = \frac{42000 - 20000}{0,05} = \frac{22000}{0,05} = 440000$$

$$C_0 = 440000DA$$

5) حساب مدة استهلاك القرض (n):

من علاقة الدفعة بالاستهلاك الأول نجد:

$$a = M_1(1+t)^n \Rightarrow 42000 = 20000(1,05)^n$$

$$\Rightarrow 2,1 = (1,05)^n \Rightarrow \log(2,1) = n \times \log(1,05)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(2,1)}{\log(1,05)} = \frac{0,741937344}{0,048790164} = 15$$

$n = 15ans$

حل التمرين السادس:

1) حساب معدل الفائدة :

من علاقة الفرق بين الفوائد والاستهلاكات لدينا :

$$I_2 - I_4 = M_4 - M_2$$

بالتعويض نجد :

$$286437,57 - 221369,5 = M_4 - 345922,75$$
$$\Rightarrow 65068,07 = M_4 - 345922,75$$

$M_4 = 410990,82DA$

من العلاقة بين الاستهلاكات يمكن إيجاد معدل الفائدة :

$$\frac{M_4}{M_2} = \frac{410990,82}{345922,75}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{M_2}(1+t)^2}{\cancel{M_2}} = 1,1881$$

$$\Rightarrow (1+t) = \sqrt[2]{1,1881} = 1,09$$

$t = 9\%$

2) حساب مبلغ الدفعة الثابتة :

$$a = M_2 + I_2 = 345922,75 + 286437,57 = 632360,32DA$$

3) حساب أصل القرض :

$$C_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow C_0 = 632360,32\frac{1-(1,09)^{-8}}{0,09} = 3500000DA$$

4) انجاز السطر الأول والأخير من جدول الاستهلاك :

- **السطر الأول :**

$$I_1 = c_0 \times t = 3200000 \times 0,09 = 315000DA$$

$$M_1 = M_2(1+t)^{-1} = 345922,75(1,09)^{-1} = 317360,32DA$$

$$C_1 = C_0 - M_1 = 3500000 - 317360,32 = 3182639,68DA$$

- السطر الثامن (الأخير):

$$M_8 = M_2(1+t)^6 = 345922,75(1,09)^6 = 580147,08DA$$
$$M_8 = M_7$$

$$C_8 = C_7 - M_8 = 0$$
$$I_8 = a - M_8 = 632360,32 - 580147,08 = 52213,24DA$$

الفترة	رأس المال المتبقي في بداية الفترة	الفائدة	الاستهلاك	الدفعة	رأس المال المتبقي في نهاية الفترة
2018	3500000	315000	317360,32	632360,32	3182639,68
....	....	....	....	....	....
2025	580147,08	52213,24	580147,08	632360,32	0

تمارين حول تقييم السندات

أولا- ملخصات تقييم السندات

- **الترميز:**

Vn : القيمة الاسمية للسند.	I : الفائدة الدورية (الكوبون).
Vr : القيمة الاستهلاكية للسند.	n : مدة استحقاق السند.
P : ثمن شراء السند.	t : معدل الفائدة.
D : العلاوة أو الخصم.	t^* : معدل الاستثمار.

❖ **ثمن شراء السند:**

$$P = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$

❖ **قيمة العلاوة أو الخصم:**

$$D = I - \left(Vr \times t^*\right)\frac{\left[1-(1+t^*)^{-n}\right]}{t^*}$$

إذا كان D:

- موجب : شراء السند بعلاوة.
- سالب : شراء السند بخصم.

ثانيا- تمارين تقييم السندات

🕮 التمرين الأول:

✍ سند قيمته الاسمية 2000 دينار، يدر فائدة كل سداسي بمعدل 14% سنويا، تدفع الفائدة في أول شهر مارس وأول شهر سبتمبر من كل سنة، كما أن السند يستحق بتاريخ 01 مارس 2027.

إذا علمت أن معدل الفائدة في السوق هو 12% سنويا. وأن تاريخ الشراء هو 01 مارس 2019.

المطلوب: احسب ثمن شراء السند في الحالات التالية:

1) إذا تم الشراء بالقيمة الاسمية.

2) إذا تم الشراء بقيمة استهلاكية تمثل 105% القيمة الاسمية.

3) إذا تم الشراء بقيمة استهلاكية تمثل 90% القيمة الاسمية.

🕮 التمرين الثاني:

✍ أوجد ثمن شراء السند حسب كل حالة من الحالات التالية:

الحالة	القيمة الاسمية	القيمة الاستهلاكية	معدل الفائدة السنوي	تواريخ سداد الفائدة	المدة (السنوات)	معدل الاستثمار
1	5000	100%	16%	جانفي - جويلية	5	15%
2	3000	110%	4%	فيفري - أوت	4,5	3%
3	2000	95%	5%	مارس- سبتمبر	6	7%
4	4000	100%	13%	أفريل- أكتوبر	8	16%
5	6000	105%	7%	ماي- نوفمبر	7,5	4%
6	5000	98%	6%	جوان- ديسمبر	10	5%
7	6000	100%	4%	أفريل- أكتوبر	12	6%
8	4000	100%	6%	ماي- نوفمبر	7	4%

🕮 التمرين الثالث:

✍ سند قيمته الاسمية 10000دينار ويستحق في أول جانفي 2037 ويعطي فوائد دورية كل ستة أشهر بمعدل فائدة 14% سنويا، تسدد الفوائد في أول جانفي وأول جويلية من كل سنة، فإذا علمت أنه بتاريخ أول جويلية 2019 أراد شخص شراء هذا السند ويرغب في تحقيق معدل استثمار 12% سنويا.

المطلوب: أوجد ثمن شراء السند في الحالات التالية:

1) إذا تم شراء السند بالقيمة الاسمية.

2) إذا تم شراء السند بـ 108% من القيمة الاسمية.

🕮 التمرين الرابع:

✍ سند قيمته الاسمية 9000دينار يستحق فوائد في 01 أفريل و 01 أكتوبر من كل سنة، بمعدل فائدة 3% نصف سنويا، ويستحق بتاريخ 01 أفريل 2025.

إذا رغب شخص شراء السند بتاريخ 01 أفريل 2019، وكان معدل الاستثمار المرغوب 5,5% كل نصف سنة.

المطلوب: أوجد ثمن شراء السند إذا كان قابل للاسترداد:

1) بالقيمة الاسمية.

2) بـ 108% من القيمة الاسمية.

🕮 التمرين الخامس:

✍ سند قيمته الاسمية 1000دينار يستحق بعد 6 سنوات وشهرين، ويدر فوائد نورية كل نصف سنة بمعدل 12% سنويا.

المطلوب: أحسب ثمن شراء السند إذا كان معدل الاستثمار السائد في السوق 13% سنويا.

التمرين السادس:

أوجد ثمن شراء السند في كل حالة من الحالات التالية ، مع العلم أن الفائدة تسدد كل ستة أشهر ، وان استرداد السند يكون بالقيمة الاسمية :

الحالة	القيمة الاسمية	معدل الفائدة السنوي	المدة المتبقية على الاستحقاق	معدل الاستثمار
1	4000	%6	5 سنوات وشهر	%5
2	2000	%14	4 سنوات و9 أشهر	%13
3	5000	%5	6 سنوات و4 أشهر	%7
4	6000	%3	8 سنوات و2 شهر	%6
5	9000	%13	7 سنوات و5 أشهر	%12
6	7000	%10	10 سنوات و4 أشهر	%9
7	10000	%13	12 سنة و3 أشهر	%15
8	25000	%7	3 سنوات و5 أشهر	%5

ثالثا- حلول تمارين تقييم السندات

حل التمرين الأول:

1) إذا تم الشراء بالقيمة الاسمية $Vr = Vn$

معدل الاستثمار السداسي = $12 \div 2$ = %6.

المدة من تاريخ الشراء لتاريخ الاستحقاق = 8 سنوات = 16 سداسي.

$$I = Vn \times t \times n = 2000 \times 0{,}14 \times 0{,}5 = 140DA$$

$$P = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$

$$P = 2000(1{,}06)^{-16} + 140\frac{1-(1{,}06)^{-16}}{0{,}06}$$

$$P = 787{,}29 + 1414{,}82$$

$$P = 2202{,}12DA$$

2) إذا تم الشراء بقيمة استهلاكية تمثل %105 القيمة الاسمية :

$$Vr = 1{,}05Vn = 1{,}05 \times 2000 = 2100DA$$

$$P = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$

$$P = 2100(1{,}06)^{-16} + 140\frac{1-(1{,}06)^{-16}}{0{,}06}$$

$$P = 826{,}66 + 1414{,}82$$

$$P = 2241{,}48DA$$

3) إذا تم الشراء بقيمة استهلاكية تمثل %90 القيمة الاسمية :

$$Vr = 0{,}9Vn = 0{,}9 \times 2000 = 1800DA$$

$$P = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$

$$P = 1800(1{,}06)^{-16} + 140\frac{1-(1{,}06)^{-16}}{0{,}06}$$

$$P = 708{,}56 + 1414{,}82$$

$$P = 2123{,}38DA$$

حل التمرين الثاني:

حساب معدلات الفائدة والاستثمار السداسية، وقيمة الفوائد الدورية في كل حالة :

الحالة	القيمة الاستهلاكية	معدل الفائدة سداسي	معدل الاستثمار سداسي	عدد السداسيات	الفائدة الدورية $I = Vn \times t_2$
1	5000	%8	%7,5	10	$I = 5000 \times 0,08 = 400$
2	3300	%2	%1,5	9	$I = 3000 \times 0,02 = 60$
3	1900	%2,5	%3,5	12	$I = 2000 \times 0,0025 = 50$
4	4000	%7,5	%8	16	$I = 4000 \times 0,065 = 260$
5	6300	%3,5	%2	15	$I = 6000 \times 0,035 = 210$
6	4900	%3	%2,5	20	$I = 5000 \times 0,03 = 150$
7	6000	%2	%3	24	$I = 6000 \times 0,02 = 120$
8	4000	%3	%2	14	$I = 4000 \times 0,025 = 100$

ثمن شراء حسب كل حالة :

$$P = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$

- **الحالة الأولى:**

$$P = 5000(1,075)^{-10} + 400\frac{1-(1,075)^{-10}}{0,075}$$
$$P = 2425,97 + 2745,63$$
$$P = 5171,6DA$$

- **الحالة الثانية:**

$$P = 3300(1,015)^{-9} + 60\frac{1-(1,015)^{-9}}{0,015}$$
$$P = 2886,15 + 501,63$$
$$P = 3387,78DA$$

- **الحالة الثالثة:**

$$P = 1900(1,035)^{-12} + 50\frac{1-(1,035)^{-12}}{0,035}$$
$$P = 1257,39 + 483,17$$
$$P = 17401,56DA$$

- الحالة الرابعة :

$$P = 4000(1,08)^{-16} + 260\frac{1-(1,08)^{-16}}{0,08}$$
$$P = 1167,56 + 2301,35$$
$$P = 3468,91DA$$

- الحالة الخامسة :

$$P = 6300(1,02)^{-15} + 210\frac{1-(1,02)^{-15}}{0,02}$$
$$P = 4681 + 2698,34$$
$$P = 7379,34DA$$

- الحالة السادسة :

$$P = 4900(1,025)^{-20} + 150\frac{1-(1,025)^{-20}}{0,025}$$
$$P = 2990,33 + 2338,37$$
$$P = 5328,7DA$$

- الحالة السابعة :

$$P = 6000(1,03)^{-24} + 120\frac{1-(1,03)^{-24}}{0,03}$$
$$P = 2951,6 + 2032,26$$
$$P = 4983,86DA$$

- الحالة الثامنة :

$$P = 4000(1,02)^{-14} + 100\frac{1-(1,02)^{-14}}{0,02}$$
$$P = 3031,5 + 1210,62$$
$$P = 4242,12DA$$

حل التمرين الثالث:

- المدة المتبقية لاستحقاق السند :

من 2019/07/01 إلى 2037/01/01 : 17 سنة و6 أشهر.

أي 35 نصف سنة (سداسي).

- الفائدة الدورية :

$$I = Vn \times t \times n = 10000 \times 0,14 \times 0,5 = 700DA$$

1) ثمن شراء السند إذا تم الشراء بالقيمة الاسمية :

$$P = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$

$$P = 10000(1,06)^{-35} + 700\frac{1-(1,06)^{-35}}{0,06}$$

$$P = 1301,05 + 10148,77$$
$$P = 11449,82DA$$

2) ثمن شراء السند إذا تم الشراء بـ 108% من القيمة الاسمية :

$$Vr = 1,08Vn = (1,08 \times 10000) = 10800DA$$

$$P = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$

$$P = (10000 \times 1,08)(1,06)^{-35} + 700\frac{1-(1,06)^{-35}}{0,06}$$

$$P = 1405,13 + 10148,77$$
$$P = 11553,9DA$$

حل التمرين الرابع:

- المدة المتبقية لاستحقاق السند :

من 2019/04/01 إلى 2025/04/01 : 6 سنوات = 12 سداسي

- الفائدة الدورية :

$$I = Vn \times t \times n = 9000 \times 0,03 \times 1 = 270DA$$

1) ثمن شراء السند إذا كان : $Vr = Vn$:

$$P = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$

$$P = 9000(1,055)^{-12} + 270\frac{1-(1,055)^{-12}}{0,055}$$

$$P = 4733,83 + 2327$$
$$P = 7060,83 DA$$

2) ثمن شراء السند إذا كان : $Vr = 1,08\ Vn$:

$$Vr = 1,08 Vn = (1,08 \times 9000) = 9720 DA$$
$$P = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$
$$P = 9720(1,055)^{-12} + 270\frac{1-(1,055)^{-12}}{0,055}$$

$$P = 5112,54 + 2327$$
$$P = 7439,54 DA$$

حل التمرين الخامس :

- الفائدة الدورية :

$$I = Vn \times t \times n = 1000 \times 0,12 \times 0,5 = 60 DA$$

- معدل الاستثمار السداسي = 13 ÷ 2 = 6,5%
- ثمن الشراء الفرضي (P_1) :

وهو آخر تاريخ لدفع الفائدة قبل تاريخ الشراء ، هو 6 سنوات ونصف ، أي قبل تاريخ استحقاق السند بـ 13 سداسي.

$$P_1 = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$
$$P_1 = 1000(1,065)^{-13} + 60\frac{1-(1,065)^{-13}}{0,065}$$

$$P_1 = 441,02 + 515,98$$
$$P_1 = 957 DA$$

- ثمن الشراء الفعلي (P_2) :

وهو جملة ثمن الشراء الفرضي للفترة بين التاريخين الفرضي والفعلي (تاريخ الشراء) :

6 أشهر - 2 شهر = 4 أشهر ، وعليه ثمن الشراء الفعلي :

$$P_2 = P_1(1 + t^* \times \frac{m}{12})$$
$$P_2 = 957(1 + 0,13 \times \frac{4}{12})$$
$$P_2 = 998,47 DA$$

أو بتطبيق معدل الاستثمار السداسي :

$$P_2 = P_1(1+t^* \times \frac{m}{6})$$

$$P_2 = 957(1+0,065 \times \frac{4}{6})$$

$$P_2 = 998,47DA$$

حل التمرين السادس:

حساب معدلات الفائدة والاستثمار السداسية ، وقيمة الفوائد الدورية في كل حالة :

الحالة	معدل الفائدة سداسي	معدل الاستثمار سداسي	عدد السداسيات	الفائدة الدورية $I = Vn \times t_2$
1	%3	%2,5	10	$I = 4000 \times 0,03 = 120$
2	%7	%6,5	9	$I = 2000 \times 0,07 = 140$
3	%2,5	%3,5	12	$I = 5000 \times 0,025 = 125$
4	%1,5	%3	16	$I = 6000 \times 0,015 = 90$
5	%6,5	%6	15	$I = 9000 \times 0,065 = 585$
6	%5	%4,5	20	$I = 000 \times 0,05 = 350$
7	%6,5	%7,5	24	$I = 10000 \times 0,065 = 650$
8	%3,5	%2,5	14	$I = 25000 \times 0,035 = 875$

ثمن شراء حسب كل حالة :

- ثمن الشراء الفرضي : (يحسب بتاريخ دفع آخر فائدة قبل الشراء)

$$P_1 = Vr(1+t^*)^{-n} + I\frac{1-(1+t^*)^{-n}}{t^*}$$

- ثمن الشراء الفعلي :

$$P_2 = P_1(1+t^* \times \frac{m}{12})$$

- **الحالة الأولى:**

* ثمن الشراء الفرضي : تاريخ دفع آخر فائدة قبل الشراء = قبل تاريخ الاستحقاق بـ 5 سنوات ونصف = 11 سداسي.

$$P_1 = 4000(1,025)^{-11} + 120\frac{1-(1,025)^{-11}}{0,025}$$

$$P_1 = 3048,57 + 1141,7$$

$$P_1 = 4190,28DA$$

* ثمن الشراء الفعلي (P_2) :

الفرق بين التاريخين الفرضي والفعلي 5 أشهر، وعليه ثمن الشراء الفعلي :

$$P_2 = P_1(1 + t^* \times \frac{m}{12})$$

$$P_2 = 4190,28(1 + 0,05 \times \frac{5}{12})$$

$$P_2 = 4277,58DA$$

- **الحالة الثانية :**

* ثمن الشراء الفرضي : تاريخ دفع آخر فائدة قبل الشراء = قبل تاريخ الاستحقاق بـ 5 سنوات = 10 سداسيات.

$$P_1 = 2000(1,065)^{-10} + 140\frac{1-(1,065)^{-10}}{0,065}$$

$$P_1 = 1065,45 + 1006,44$$

$$P_1 = 2071,88DA$$

* ثمن الشراء الفعلي (P_2):

الفرق بين التاريخين الفرضي والفعلي 3 أشهر، وعليه ثمن الشراء الفعلي :

$$P_2 = P_1(1 + t^* \times \frac{m}{12})$$

$$P_2 = 2071,88(1 + 0,13 \times \frac{3}{12})$$

$$P_2 = 2139,22DA$$

- **الحالة الثالثة :**

* ثمن الشراء الفرضي : تاريخ دفع آخر فائدة قبل الشراء = قبل تاريخ الاستحقاق بـ 6 سنوات ونصف = 13 سداسي.

$$P_1 = 5000(1,05)^{-13} + 125\frac{1-(1,05)^{-13}}{0,05}$$

$$P_1 = 3197,02 + 1287,84$$

$$P_1 = 4484,86DA$$

* ثمن الشراء الفعلي (P_2):

الفرق بين التاريخين الفرضي والفعلي 2 شهر، وعليه ثمن الشراء الفعلي :

$$P_2 = P_1(1 + t^* \times \frac{m}{12})$$

$$P_2 = 4484,86(1 + 0,07 \times \frac{2}{12})$$

$$P_2 = 4537,18DA$$

- **الحالة الرابعة :**

* ثمن الشراء الفرضي : تاريخ دفع آخر فائدة قبل الشراء = قبل تاريخ الاستحقاق بـ 8 سنوات ونصف = 17 سداسي.

$$P_1 = 6000(1,03)^{-17} + 90\frac{1-(1,03)^{-17}}{0,03}$$
$$P_1 = 3630,1 + 1184,95$$
$$P_1 = 4815,05DA$$

* ثمن الشراء الفعلي (P_2) :

الفرق بين التاريخين الفرضي والفعلي 4 أشهر ، وعليه ثمن الشراء الفعلي :

$$P_2 = P_1(1 + t^* \times \frac{m}{12})$$
$$P_2 = 4815,05(1 + 0,06 \times \frac{4}{12})$$
$$P_2 = 4911,35DA$$

- **الحالة الخامسة :**

* ثمن الشراء الفرضي : تاريخ دفع آخر فائدة قبل الشراء = قبل تاريخ الاستحقاق بـ 7 سنوات ونصف = 15 سداسي.

$$P_1 = 9000(1,06)^{-15} + 585\frac{1-(1,06)^{-15}}{0,06}$$
$$P_1 = 3755,38 + 5681,66$$
$$P_1 = 9437,04DA$$

* ثمن الشراء الفعلي (P_2) :

الفرق بين التاريخين الفرضي والفعلي شهر واحد ، وعليه ثمن الشراء الفعلي :

$$P_2 = P_1(1 + t^* \times \frac{m}{12})$$
$$P_2 = 9437,04(1 + 0,12 \times \frac{1}{12})$$
$$P_2 = 9531,41DA$$

- **الحالة السادسة :**

* ثمن الشراء الفرضي : تاريخ دفع آخر فائدة قبل الشراء = قبل تاريخ الاستحقاق بـ 10 سنوات ونصف = 21 سداسي.

$$P_1 = 7000(1,045)^{-21} + 350\frac{1-(1,045)^{-21}}{0,045}$$
$$P_1 = 2777,51 + 4691,65$$
$$P_1 = 7469,16DA$$

* ثمن الشراء الفعلي (P_2):

الفرق بين التاريخين الفرضي والفعلي 2 شهر، وعليه ثمن الشراء الفعلي :

$$P_2 = P_1(1+t^* \times \frac{m}{12})$$

$$P_2 = 7469,16(1+0,09\times\frac{2}{12})$$

$$P_2 = 7581,2DA$$

- **الحالة السابعة :**

* ثمن الشراء الفرضي : تاريخ دفع آخر فائدة قبل الشراء = قبل تاريخ الاستحقاق بـ 12 سنوات ونصف = 25 سداسي.

$$P_1 = 10000(1,075)^{-25} + 650\frac{1-(1,075)^{-25}}{0,075}$$

$$P_1 = 1639,79 + 7245,51$$

$$P_1 = 8885,3DA$$

* ثمن الشراء الفعلي (P_2):

الفرق بين التاريخين الفرضي والفعلي 3 أشهر، وعليه ثمن الشراء الفعلي :

$$P_2 = P_1(1+t^* \times \frac{m}{12})$$

$$P_2 = 8885,3(1+0,15\times\frac{3}{12})$$

$$P_2 = 9218,5DA$$

- **الحالة الثامنة :**

* ثمن الشراء الفرضي : تاريخ دفع آخر فائدة قبل الشراء = قبل تاريخ الاستحقاق بـ 3 سنوات ونصف = 7 سداسيات.

$$P_1 = 25000(1,025)^{-7} + 875\frac{1-(1,025)^{-7}}{0,025}$$

$$P_1 = 21031,63 + 5555,72$$

$$P_1 = 26587,35DA$$

* ثمن الشراء الفعلي (P_2):

الفرق بين التاريخين الفرضي والفعلي شهر واحد، وعليه ثمن الشراء الفعلي :

$$P_2 = P_1(1+t^* \times \frac{m}{12})$$

$$P_2 = 26587,35(1+0,05\times\frac{1}{12})$$

$$P_2 = 26698,13DA$$

قائمة المراجع

أولا- باللغة العربية:

1. إبراهيم علي إبراهيم ربه، **رياضيات التمويل والاستثمار**، دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية، 2008.
2. إبراهيم محمد مهدي، **رياضيات الاستثمار**، المكتبة العصرية، المنصورة، مصر، 2009.
3. باديس بوغرة، **المدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها**، ط2، دار الهدى عين مليلة، الجزائر، 2013.
4. ستفن شاو، لورانس شاو، **رياضيات التمويل والاستثمار**، ترجمة: إبراهيم محمود مهدي، محمد توفيق البلقيني، دار المريخ، الرياض، دون سنة.
5. عدنان كريم نجم الدين، **الرياضيات المالية**، الأكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، 2005.
6. مصطفى عبد الغني احمد، علي السيد الديب، **رياضيات التمويل والاستثمار**، كلية التجارة، جامعة القاهرة، (كتاب الكتروني).

ثانيا- باللغات الأجنبية:

1. Ahmed Nazri Wahidudin, **Financial Mathematics and its Applications, (www.bookboon.com)**
2. Marek Capinski and Tomasz Zastawniak**, Mathematics for Finance : An Introduction to Financial Engineering**, Springer-Verlag, London Limited, 2003.

	المحتويـــــــــــات	الصفحة
	القسم الأول: الفائدة البسيطة وتطبيقاتها	
	تمارين حول الفائدة البسيطة	3
أولا	ملخصات	3
ثانيا	تمارين	4
ثالثا	حلول	7
	تمارين حول خصم الديون بفائدة بسيطة	13
أولا	ملخصات	13
ثانيا	تمارين	14
ثالثا	حلول	16
	تمارين حول تكافؤ الديون بفائدة بسيطة	23
أولا	ملخصات	23
ثانيا	تمارين	24
ثالثا	حلول	26
	القسم الثاني: الفائدة المركبة وتطبيقاتها	
	تمارين حول الفائدة المركبة	31
أولا	ملخصات	31
ثانيا	تمارين	32
ثالثا	حلول	35
	تمارين حول الدفعات بفائدة مركبة	43
أولا	ملخصات	43
ثانيا	تمارين	44
ثالثا	حلول	46
	تمارين حول استهلاك القروض طويلة الأجل	53
أولا	ملخصات	53
ثانيا	تمارين	54
ثالثا	حلول	57
	تمارين حول تقييم السندات	63
أولا	ملخصات	63
ثانيا	تمارين	64
ثالثا	حلول	67
	المراجع	63
	المحتويات	64