$AutoRegressive\ Integrated\ Moving\ Average\ (ARIMA) Models$

1. نماذج الانحدار الذاتي $AR(p): AutoRegressive$

نموذج الانحدار الذاتي للسلسلة الزمنية Y_t من الرتبة p، يعبر عن المشاهدة الحالية Y_t بدلالة المشاهدات السابقة لها، يكتب من الشكل:

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \cdots + \theta_P Y_{t-P} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \theta_0 + \sum_{i=1}^{p} \theta_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

كما يمكن كتابة $AR(p)$ باستعمال معامل التباطؤ (التأخير)، فتصبح المعادلة من الشكل:

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 L Y_t + \theta_2 L^2 Y_t + \cdots + \theta_P L^p Y_t + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \theta_0 + \sum_{i=1}^{p} \theta_i L^i Y_t + \varepsilon_t \ \rightarrow \ Y_t(1 + \sum_{i=1}^{p} \theta_i L^i) = \theta_0 + \varepsilon_t \ \rightarrow \ Y_t = (\theta_0 + \varepsilon_t)/(1 + \sum_{i=1}^{p} \theta_i L^i)$$

حيث: Y_t: قيمة المشاهدة الحالية، θ_0: ثابت، $\theta_1, \theta_2, .., \theta_p$: معلمات النموذج (معاملات الانحدار الذاتي)، ε_t: حد الخطأ العشوائي، L: معامل التأخير (التباطؤ)، p: رتبة الانحدار الذاتي

خصائص نموذج $AR(p)$:

- الأمل الرياضي: $E(Y_t) = \frac{\theta_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \theta_i}$
- التباين: $V(Y_t) = \gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \theta_1^2}$
- التباين المشترك: $Cov(Y_t Y_{t+k}) = \gamma(k) = \theta_1^k \gamma(0)$
- دالة الارتباط الذاتي: $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \theta_1^k & k \geq 1 \end{cases}$
- دالة الارتباط الذاتي تتناقص أسيا
- دالة الارتباط الذاتي الجزئي تنقطع بعد الدرجة p، أي انعدام معنوي لمعاملات الارتباط الذاتي الجزئي بعد الدرجة p

$AutoRegressive\ Integrated\ Moving\ Average\ (ARIMA) Models$

2. نماذج المتوسطات المتحركة $MA(q): Moving\ Average$

نموذج المتوسطات المتحركة للسلسلة الزمنية Y_t من الرتبة q، يعبر عن المشاهدة الحالية Y_t بدلالة الأخطاء العشوائية، يكتب من الشكل:

$$Y_t = \vartheta_0 + \varepsilon_t + \vartheta_1 \varepsilon_{t-1} + \vartheta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \vartheta_P \varepsilon_{t-q}$$

$$Y_t = \vartheta_0 + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \vartheta_j \varepsilon_{t-j}$$

كما يمكن كتابة $MA(q)$ باستعمال معامل التباطؤ (التأخير)، فتصبح المعادلة من الشكل:

$$Y_t = \vartheta_0 + \varepsilon_t + \vartheta_1 L^1 \varepsilon_t + \vartheta_2 L^2 \varepsilon_t + \cdots + \vartheta_P L^q \varepsilon_t$$
$$Y_t = \vartheta_0 + (1 + \vartheta_1 L^1 + \vartheta_2 L^2 + .. + \vartheta_q L^q)\varepsilon_t$$
$$Y_t = \vartheta_0 + (1 + \sum_{j=1}^{q} \vartheta_j L^j)\varepsilon_t$$

حيث: Y_t: قيمة المشاهدة الحالية، ϑ_0: ثابت، $\vartheta_1, \vartheta_2, .., \vartheta_q$: معلمات النموذج (معاملات المتوسطات المتحركة)، $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, .., \varepsilon_{t-q}$: الأخطاء العشوائية، L: معامل التأخير (التباطؤ)، q: رتبة المتوسطات المتحركة

<u>خصائص نموذج $MA(q)$</u>

- الأمل الرياضي: $E(Y_t) = \vartheta_0$
- التباين: $V(Y_t) = \gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \sum_{j=1}^{q} \vartheta_j^2)$
- التباين المشترك: $Cov(Y_t Y_{t+k}) = \gamma(k) = \begin{cases} \vartheta_1 \sigma_\varepsilon^2, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$
- دالة الارتباط الذاتي: $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\vartheta_1}{1+\vartheta_1^2} & k = 0 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$
- دالة الارتباط الذاتي تنقطع بعد الدرجة q، أي انعدام معنوي لمعاملات الارتباط الذاتي بعد الدرجة q
- دالة الارتباط الذاتي الجزئي تتناقص أسيا

$AutoRegressive\ Integrated\ Moving\ Average\ (ARIMA)Models$

3. نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة $ARMA(p,q): AutoRegressive\ Moving\ Average$

$$Y_t = \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \cdots + \theta_P Y_{t-P} + \vartheta_0 + \varepsilon_t + \vartheta_1 \varepsilon_{t-1} + \vartheta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \vartheta_P \varepsilon_{t-q}$$

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p} \theta_i Y_{t-i} + \vartheta_0 + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \vartheta_j \varepsilon_{t-j}$$

لاستقرار السيرورة $ARMA(p,q)$، يجب تحقيق الشرط التالي: $\sum_{i=1}^{p}|\theta_i| < 1$

خصائص نموذج $ARMA(p,q)$

- **الأمل الرياضي:** $E(Y_t) = \frac{\vartheta_0}{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}$
- **التباين:** $V(Y_t) = \gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+2\theta_1\vartheta_1)}{1-\theta_1^2}$
- **التباين المشترك:** $Cov(Y_t Y_{t+k}) = \gamma(k) = \begin{cases} \theta_1\gamma(0) - \vartheta_1\sigma_\varepsilon^2 & k = 1 \\ \theta_1\gamma(1) & k \geq 2 \end{cases}$
- **دالة الارتباط الذاتي:** $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \{\ \theta_1\gamma(k-1) + \theta_2\gamma(k-2) + \cdots + \theta_p\gamma(k-p) \qquad k \geq q+1\}$

ملاحظة: نقول عن سلسلة زمنية Y_t أنها متكاملة من الدرجة d، $I(d)$، إذا كانت غير مستقرة، وتستقر بعد الفروقات ∇^d من الرتبة d، في هذه الحالة يمكن التعبير عن Y_t من الشكل $ARIMA(p,d,q)$، و $\nabla^d Y(t)$ من الشكل $ARMA(p,q)$.