Math 1 Corrigé TD4 (3)

Ex. 01 :

1) $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \log_{c-b} a$.

$$\frac{\ln a}{\ln(c+b)} + \frac{\ln a}{\ln(c-b)} = 2 \frac{\ln a}{\ln(c+b)} \cdot \frac{\ln a}{\ln(c-b)}$$

Il faut que : $a>0$, $c+b>0$, $c-b>0$, $c+b \neq 1$, $c-b \neq 1$

$\Rightarrow \ln(c-b) \ln a + \ln(c+b) \ln a = 2 \ln a . \ln a$

$\Rightarrow \ln a (\ln(c-b) + \ln(c+b)) = 2 \ln a \ln a$

$\Rightarrow \ln((c+b)(c-b)) = 2 \ln a$

$\Rightarrow \ln(c^2 - b^2) = \ln a^2$

$\Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$a = 1$ ou $c^2 = a^2 + b^2$

2) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+^*$: $a^a = b$ et $b^b = a$, alors $a = b = 1$

$a^1 = b^b = (a^a)^{a^a} = a^{a^{a+1}}$; d'où $a^{a+1} = 1$

$\Rightarrow \ln(a^{a+1}) = \ln 1 \Rightarrow \ln a = 0$

finalement $a = 1$, $b = 1$

Math 1 **Corrigé** TD 4 (ST)

Ex. 01 : (Suite)

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = ?$

On écrit :

$$\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = e^{x \ln x^x - x^x \ln x} = e^{x^2 \ln x - x^x \ln x}$$

$$= e^{(x^2 - x^x)\ln x} = e^{x^x (x^{2-x} - 1) \ln x}$$

Mais, $x^{2-x} = e^{(2-x)\ln x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

On en deduit que $x^{2-x} - 1 \longrightarrow -1$,

$$x^x (x^{2-x} - 1) \ln x \longrightarrow -\infty$$

Ex. 2 :

a. $f_1(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

f_1 est définie $\iff -1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 \leq 1 \implies 1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 = \frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1 + 2x^2 + x^4 - (1 - 2x^2 - x^4)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$

$D_{f_1} = \mathbb{R}$

Ex. 02 : (Suite)

$f_2(x) = \ln(\operatorname{sh} x) - 2x$ / $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

f_2 est définie ssi $\operatorname{sh} x > 0$

d'où $\operatorname{sh} x > 0$ si $x > 0$

$D_{f_2} =]0, +\infty[$

$f_3(x) = \tanh\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

f_3 est définie ssi $\dfrac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}$

donc $x \neq -1$

$D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-1\}$

b.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\cosh^2 x - \sinh 2x$

En écrivant la fonction à l'aide des exponentielles, on obtient :

$2\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} 2x = 2\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 1 + e^{-2x}$

et ceci tend vers $\underline{\underline{1}}$ lorsque $\underline{\underline{x}}$ tend vers $+\infty$

Ex. 02 : (Suite)

2/ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x}(2\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} 2x)$

$$e^{2x}(2\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} 2x) = e^{2x}(1+e^{-2x}) = e^{2x}+1$$

et ceci tend vers 1 lorsque x tend vers $-\infty$

Ex. 03 :

- $\arcsin(-1) = ?$

Rappel :

Arcsin : $[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0, \pi]$

Arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\arcsin(-1) = x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \sin x = -1 = \sin(-\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

- $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

- $\arccos(0) = x$, $x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

- $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x$, $x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

- $\arctan(1) = x$, $x \in \mathbb{R}$

$\tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Corrigé TD 4 (ST)

Ex. 03 (suite)

$\arcsin\left(\sin \frac{15\pi}{7}\right) =$

On sait que $\forall\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin\theta) = \theta$

On cherche donc un angle θ dans cet intervalle, tel que, $\sin\theta = \sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)$

Or $\frac{15\pi}{7} = \frac{14\pi}{7} + \frac{\pi}{7} = 2\pi + \frac{\pi}{7}$

donc $\arcsin\left(\sin \frac{15\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$

- $\arccos\left(\cos -\frac{2\pi}{3}\right) =$

On sait que $\forall\, \theta \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos\theta) = \theta$

On a $-\frac{2\pi}{3} \notin [0, \pi]$, mais $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

et donc $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\frac{\pi}{3}$

- $\arccos\left(\cos \frac{8\pi}{3}\right) =$

On sait que $\forall\, \theta \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos\theta) = \theta$

$\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi + 2\pi}{3} = 2\pi + 2\frac{\pi}{3}$

comme $2\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$, on aura donc

$\arccos\left(\cos \frac{8\pi}{3}\right) = 2\frac{\pi}{3}$

Corrigé TD4 (ST)

Ex. 03 : (Suite)

. $\tan\left(\arctan \frac{\pi}{2}\right) =$

$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \tan(\arctan \theta) = \theta$

$\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ donc $\tan\left(\arctan \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Ex. 04 :

1) $\cos(\arctan x) =$

On part de la relation $\tan(\arctan x) = x$ vraie pour tout x réel.

On a tout d'abord

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

mais $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et donc $\cos(\arctan x)$ est positif. Alors

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2) $\sin(\arccos x) =$

On part de la relation $\cos(\arccos x) = x$

$\forall x \in [0, \pi]$

Corrigé TD4 (ST)

Ex. 04. (Suite)

On a tout d'abord

$$\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$$

mais $\arccos x \in [0, \pi]$, et donc $\sin(\arccos x)$ est positif. Alors

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

3) $\tan(\arccos x) =$

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

4) $\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] =$

La fonction est définie $\underline{\underline{\text{si}}}$ $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geqslant 1$

Cette inéquation s'écrit : $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$

ou encore $\frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$

Le domaine de définition est donc $]0, +\infty[$

En utilisant l'expression de $\underline{\operatorname{argch}}$ sous forme de logarithme, Ex. 04. (Suite)

$$\arg ch\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{x}\right|\right]$$

- Si $x \geq 1$, $\Rightarrow \frac{x^2-1}{x} \geq 0$ ainsi que $\ln x$

et $\arg ch\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln x = |\ln x|$

- Si $0 < x \leq 1$, $x - \frac{1}{x} \leq 0$ ainsi que $\ln x$

et $\arg ch\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln\frac{1}{x} = -\ln x = |\ln x|$

donc, pour tout $x > 0$

$$\arg ch\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] = |\ln x|$$

5/ $sh(\arg ch\, x) =$

Pour $x \geq 1$, on a $\arg ch\, x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

Ainsi : $sh(\arg ch\, x) = \dfrac{e^{\arg ch x} - e^{-\arg ch x}}{2}$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2}$$

Ex. 04. (Suite)

$$= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\left(x^2-\left(x^2-1\right)\right)}$$

$$= \sqrt{x^2-1}$$

6) $\operatorname{th}(\arg \operatorname{ch} x) =$

$$\operatorname{th}(\arg \operatorname{ch} x) = \frac{\operatorname{sh}(\arg \operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch}(\arg \operatorname{ch} x)} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$