Université de Jijel
Faculté des sciences exactes et de l'informatique
Département de mathématiques

Mathématiques 1

Dr TOUIL Imene

Destiné aux étudiants de la première année Sciences de la matière

2018-2019

Table des matières

Introduction

Les mathématiques sont parfois surnommées " reine des sciences ". Elles sont un ensemble de connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations. Elles possèdent plusieurs branches telles que : l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse, la géométrie, la logique mathématique, etc. On désigne par Algèbre l'ensemble des méthodes mathématiques visant à étudier et développer les structures algébriques et à comprendre les relations qu'elles entretiennent entre elles. En un sens très restrictif, l'analyse est la partie des mathématiques s'intéressant aux questions de régularité des applications d'une variable réelle ou complexe : on parle alors plus volontiers d'analyse réelle ou d'analyse complexe.

Les mathématiques, l'étudiant les a certainement manipulées aux cycles précédents. Dans le supérieur, il s'agit d'apprendre à les construire. La première année pose les bases et introduit les outils dont il aura besoin par la suite. Elle est aussi l'occasion de découvrir l'aspect esthétique des mathématiques et leurs applications dans les autres domaines tels que : la physique, la chimie, la biologie et l'économie, dans lesquels le formalisme mathématique s'applique et permet de résoudre des problèmes, par exemple : variation du volume d'un gaz en fonction de la température et de la pression, position d'une comète en fonction du temps, nombre de bactérie en fonction de la nourriture, etc.

Ce polycopié "**Mathématiques 1** " est le fruit d'une disaine d'années d'enseignement aux étudiants du tronc commun **Sciences de la Matière** (SM). C'est un outil pédagogique qui facilitera à nos étudiants la prise de notes pendant le cours et aussi leurs permettra de traiter les exercices. Il est réparti en deux :

I. Partie Analyse :

Cette partie débute par l'étude de la théorie des ensembles, puis la structure de corps des nombres réels. Les chapitres suivants sont consacrés aux fonctions : limites et continuité. Ce sont des notions essentielles, qui reposent sur des définitions et des preuves détaillées. Toutes ces notions ont une interprétation géométrique, qu'on lit sur le graphe de la fonction, pour cela on trouvera dans ce cours de nombreux dessins qui vous aident à comprendre l'intuition cachée derrière les énoncés. Pour achever cette partie, on présente la réciproque d'une fonction bijective. Plus particulièrement, on s'intéresse à l'étude des réciproques des fonctions trigonométriques et des fonctions hyperboliques.

II. Partie Algèbre :

L'outil central abordé dans cette partie, ce sont les lois de compositions internes. A travers les différentes propriétés d'une loi, on peut définir les groupes, les anneaux et les corps. Puis, sur un corps noté $\mathbb{K}$ et à travers un ensemble quelconque E muni de deux lois : l'une interne et l'autre externe, on donne la notion d'un espace vectoriel et ses propriétés, qui seront notre deuxième chapitre. Le troisième chapitre est consacré aux applications linéaires, où on donne de manière détaillée : la définition, l'image et le noyau d'une application linéaire. On termine cette partie par des opérations sur les applications linéaires, on présente dans en particulier un théorème de base, qu'on appelle le théorème du rang.

À la fin de chaque chapitre, on trouve une série d'exercices non résolus.

Pour assurer l'efficacité de ce cours et le rendre plus performant, on conseille nos étudiants :

- Tout d'abord de comprendre le cours.
- Ensuite connaître par cœur les définitions, les théorèmes, les propositions.
- Puis ne pas oublier de refaire les exemples et les démonstrations, qui leurs permettront de bien assimiler les notions nouvelles et les mécanismes de raisonnement.
- Enfin, résoudre eux-mêmes les exercices énoncés dans la fin de chaque chapitre.

TOUIL. Imene

Première partie

Analyse

Chapitre 1

Théorie des ensembles

1.1 Ensembles

Les notions d'ensemble et de relation sont premières, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de les définir à partir d'autres notions.

1. On appel ensemble E une collection (ou groupement) d'objets, par exemple $\{0, 1, 3, 4\}$, $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 1\}$. La notation $x \in E$ signifie : x appartient à (ou : est élément de) E; sa négation est notée $x \notin E$.
2. On dit qu'un ensemble est fini si le nombre de ses éléments est fini.
3. Le nombre des éléments d'un ensemble E, appelé naturellement cardinal de E, est noté *card* E.

Notations et terminologie

- L'ensemble vide noté $\emptyset$ ou $\{\}$ est un ensemble qui n'a aucun élément.
- L'ensemble qui contient un et un seul élément x est appelé singleton, et noté $\{x\}$.
- L'ensemble qui contient deux éléments x et y est appelé paire, et noté $\{x, y\}$.

Remarque. *Deux points importants sont à noter :*

- *L'ordre dans lequel les éléments apparaissent dans la liste n'a aucune importance, par exemple :*

$$E = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 2, 1\}.$$

- *L'ensemble ne change pas si un ou plusieurs éléments sont répétés dans la liste, par exemple :*

$$E = \{1, 2, 3\} = \{1, 1, 2, 3\} = \{1, 3, 2, 3\}.$$

Remarque. *On représente généralement un ensemble par la partie du plan limitée par un contour fermé.*

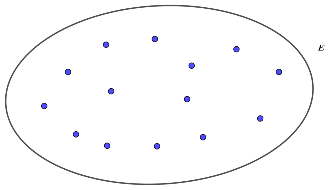


FIGURE 1.1 – Ensemble

Exemple 1.1. $\mathbb{N}$: *l'ensemble des entiers naturels.*
$\mathbb{Z}$: *l'ensemble des entiers relatifs.*
$\mathbb{Q}$: *l'ensemble des nombres rationnels.*
$\mathbb{R}$: *l'ensemble des nombres réels.*
$\mathbb{C}$: *l'ensemble des nombres complexes.*

1.2 Relations entre ensembles

1.2.1 Inclusion et égalité

Définition 1.2. *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus (ou encore contenu) dans F si tout élément de E est élément de F. Ce qu'on note $E \subset F$. On dit encore que E est une partie (ou un sous-ensemble) de F (le symbole "$\subset$" se lit "inclus").*
D'autre part, deux ensembles E er F sont égaux si et seulement si chacun est inclus dans l'autre, c'est-à-dire

$$E = F \Longleftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

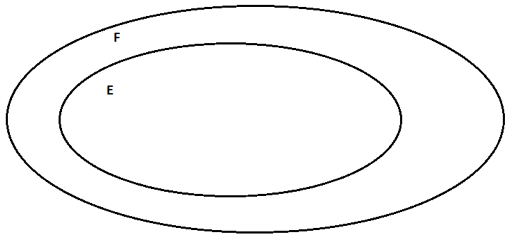


FIGURE 1.2 – Inclusion de deux ensembles ($E \subset F$)

Exemple 1.3.

1. *L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.*
2. *L'ensemble des nombres entiers pairs (resp. impairs) est une partie de l'ensemble des nombres entiers naturels.*
3. *Tout ensemble E est inclus dans lui-même.*
4. *Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$ (l'inclusion est transitive).*

Les parties d'un ensemble E constituent un ensemble, appelé l'ensemble des parties de E, et noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 1.4.

1. *Pour tout ensemble E, la partie vide de E et l'ensemble E lui-même, appartiennent à l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, ce qui revient à dire que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ n'est pas vide.*
2. *Si $E = \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.*
3. *Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.*

Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Définition 1.5. *Soient E un ensemble et A une partie de E. L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A s'appelle complémentaire de A dans E et se note $C_E A$, ou plus simplement $\bar{A}$.*
Autrement dit $\bar{A} = \{x, x \in E \text{ et } x \notin A\}$.
On emploie aussi la notation $E - A$, qui sera généralisées plus loin.

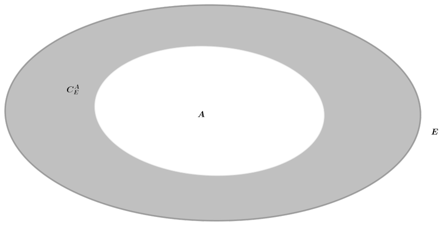


FIGURE 1.3 – Complémentaire d'une partie

Exemple 1.6.

– $C_E\emptyset = \bar{\emptyset} = E$.
– $C_E E = \bar{E} = \emptyset$.
– *Si* $E = \{a, b, c, d\}$ *et* $A = \{b, c\}$ *alors* $C_E A = \bar{A} = \{a, d\}$.
– *Le complémentaire dans l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels du sous-ensemble* A *des entiers impairs (resp. pairs) est l'ensemble des entiers pairs (resp impairs).*

Propriétés 1.7. *Le passage aux complémentaires possède les propriétés suivantes :*

1. $\bar{\bar{A}} = A$ *(le complémentaire dans* E *du complémentaire* $\bar{A}$ *d'une partie* A *de* E *est la partie* A *elle-même).*
2. *Soient* A *et* B *deux parties de* E*. La relation* $A = B$ *a lieu si et seulement si* $\bar{B} = \bar{A}$ *; la relation* $A \subset B$ *a lieu si et seulement si* $\bar{B} \subset \bar{A}$.

1.3 Opérations sur les ensembles

1.3.1 Intersection de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles on appelle intersection de E et F l'ensemble noté $E \cap F$, constitué des éléments appartenant à la fois à E et à F (le symbole "$\cap$" se lit "inter").

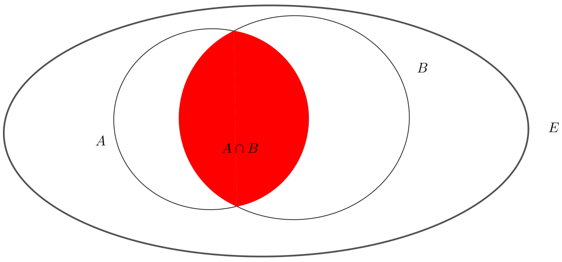


FIGURE 1.4 – Intersection de deux ensembles

Remarque. *Lorsque l'intersection de E et F est l'ensemble vide, on dit que les ensembles E et F sont disjoints.*

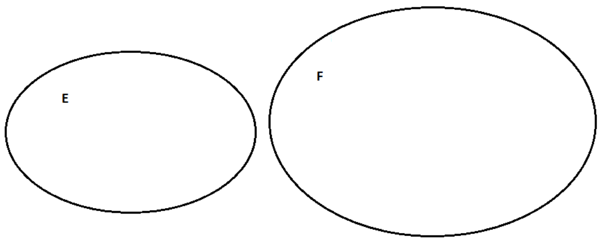


FIGURE 1.5 – Ensembles disjoints

Exemple 1.8. *L'intersection de l'ensemble des entiers naturels multiples de* 2 *et de l'ensemble des entiers naturels multiples de* 3 *est l'ensemble des entiers naturels multiple de* 6.

Propriété de l'intersection : Soient E, F et G trois ensembles non vides alors :

1. $E \cap E = E$, $E \cap \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.
2. $E \cap F = F \cap E$, (l'intersection est commutative).
3. $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G) = E \cap F \cap G$. (l'intersection est distributive).
4. $\forall A \subset E : A \cap \bar{A} = \emptyset$ (l'ensemble A et sont complémentaire $\bar{A}$ sont des ensembles disjoints).

1.3.2 Réunion de deux ensembles

Définition 1.9. *Soient E et F deux ensembles on appelle réunion de E et F l'ensemble, noté* $E \cup F$, *constitué des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles E et F (le symbole "*$\cup$*" se lit "union").*

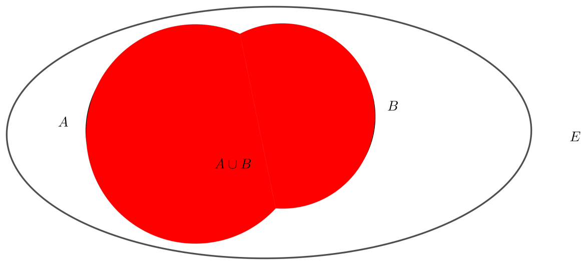


FIGURE 1.6 – Réunion de deux ensembles

Exemple 1.10.

1. *La réunion de l'ensemble des nombres entiers naturels multiple de* 4 *et de l'ensemble des nombres entiers naturels de la forme* $4p + 2$, $p \in \mathbb{N}$, *est l'ensemble des nombres pairs.*
2. *La réunion de l'ensemble des nombres entiers pairs et de l'ensemble des nombres entiers impairs est l'ensemble des nombres entiers naturels.*

Propriétés de la réunion : Soient E, F et G trois ensembles, alors :

1. $E \cup E = E$; $E \cup \emptyset = E$; $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.
2. $E \cup F = F \cup E$. (la réunion est commutative).
3. $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) = E \cup F \cup G$ (la réunion est distributive).
4. $\forall A \subset E : A \cup \bar{A} = E$.

Remarque. *La réunion et l'intersection sont en quelque sorte compatibles avec l'inclusion, c'est-à-dire : soient* E, F *et* G *trois ensembles*

1. *Si* $E \subset F$, *alors* $E \cap G \subset F \cap G$.
2. *Si* $E \subset F$, *alors* $E \cup G \subset F \cup G$.

Relation entre intersection et réunion : Soient E, F et G trois ensembles, alors on a :

1. $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

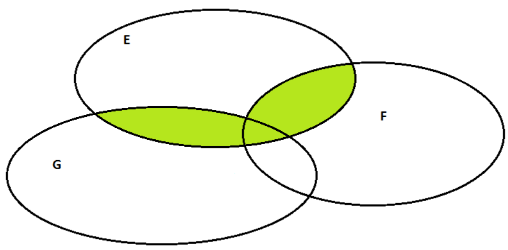


FIGURE 1.7 – Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion

2. $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

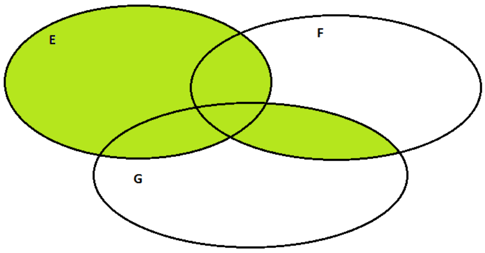


Figure 1.8 – Distributivité de la réunion par rapport à la l'intersection

3. L'intersection et la réunion sont liées au passage aux complémentaires.
   (a) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

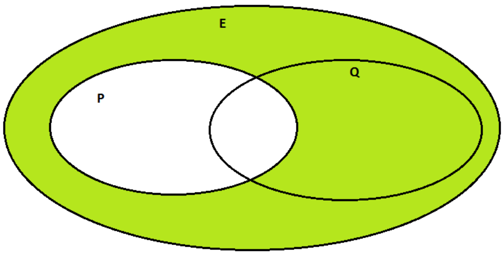


Figure 1.9 – Complémentaire d'une intersection

   (b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

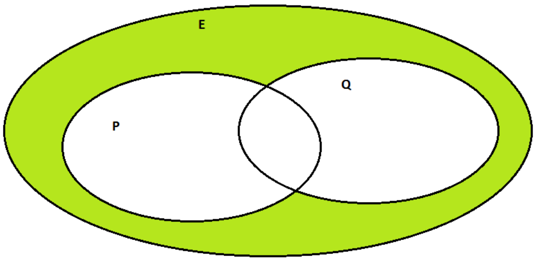


Figure 1.10 – Complémentaire d'une réunion

1.3.3 Différence de deux ensembles

Définition 1.11. *On appelle différence de deux sous-ensembles A et B de E, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B, on note $A - B$, autrement dit*

$$A - B = A \cap \bar{B} = \{x \in E,\ (x \in A \text{ et } x \notin B)\}.$$

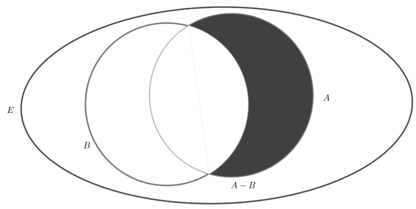


FIGURE 1.11 – Différence de deux ensembles

Partition d'un ensemble : Soient A et B deux parties de E, on dit que A et B forment une partition de E si et seulement si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$.

Exemple 1.12. *La partie A de E et son complémentaire $\bar{A}$ forment une partition de E, (car $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$).*

1.3.4 Différence symétrique de deux ensembles

Définition 1.13. *On appelle différence symétrique de deux sous-ensembles A et B de E, noté $A \Delta B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A \cup B$ et n'appartiennent pas à $A \cap B$, autrement dit*

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \\ &= (A - B) \cup (B - A). \end{aligned}$$

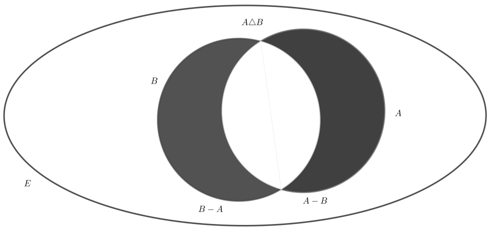


FIGURE 1.12 – Différence symétrique de deux ensembles

1.3.5 Ensemble produit

Si x et y sont deux éléments différents, les couples (x, y) et (y, x) sont différents, alors que les ensembles $\{x, y\}$ et $\{y, x\}$ sont égaux.
On dit que les deux couples (x, y) et (x', y') sont égaux si :

$$(x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'.$$

On définit de même triplets (x, y, z), quadruplets $(x, y, z, t), \cdots$.

Définition 1.14. *Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et de F l'ensemble, noté $E \times F$, constitué des couples (x, y) où x appartient à E et y à F, et on écrit*

$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \textit{ et } y \in F\}.$$

Propriétés 1.15. *Soient E et F deux ensembles. Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et $C, D \in \mathcal{P}(F)$, On a les relations suivantes :*

1. $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C.$
2. $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D).$
3. $(A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C.$
4. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D).$

1.4 Relations

Définition 1.16. *Soit E un ensemble, on appelle relation binaire dans E une relation $\mathcal{R}$ portant sur des couples d'éléments de E.*
Soit (x, y) un couple d'éléments de E vérifiant la relation $\mathcal{R}$; on emploie la notation $x\mathcal{R}y$.

Propriétés des relations : Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire dans E ;

1. On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si, pour tout élément x de E, $x\mathcal{R}x$, c'est-à-dire : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$, (chaque élément est en relation avec lui-même).
2. On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si, la relation $x\mathcal{R}y$ entraîne la relation $y\mathcal{R}x$, c'est-à-dire : $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.
3. On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique si, les relations $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ entraînent la relation $x = y$, c'est-à-dire : $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$.
4. On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si, les relations $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ entraînent la relation $x\mathcal{R}z$, c'est-à-dire : $\forall x, y, z \in E,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

1.4.1 Relation d'équivalence

Définition 1.17. *Soit E un ensemble. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ dans E est une relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.*

Exemple 1.18.

1. *Dans tout ensemble E, la relation d'égalité est une relation d'équivalence, en effet :*
   (a) $\forall x \in E : x = x$ *ce qui implique $\mathcal{R}$ est réflexive.*
   (b) $\forall x, y \in E : x = y \Longrightarrow y = x$ *ce qui implique $\mathcal{R}$ est symétrique.*
   (c) $\forall x, y, z \in E : x = y$ *et* $y = z \Longrightarrow x = z$ *ce qui implique $\mathcal{R}$ est transitive.*
2. *Dans l'ensemble des droites affines d'un plan le parallélisme est une relation d'équivalence.*
3. *Soient $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et n un entier naturel non nul. La relation définie par les couples (x, y) tel que n divise $x - y$ i.e., $x - y = nk,\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}^*$, est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.*

Classes d'équivalence Soient E un ensemble muni de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et x un élément de E.
On appelle classe d'équivalence de x la partie de E, notée $\dot{x}$, constituée des éléments de E qui sont en relation avec x (ou équivalents à x), et on écrit :

$$\dot{x} = \{a \in E, x\mathcal{R}a\}.$$

Remarque.

1. *Les classes d'équivalence de E constituent une partition de E.*

2. *L'ensemble des classes d'équivalence de E s'appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, et se note $E/\mathcal{R}$.*

Exemple 1.19. *Si $\mathcal{R}$ est la relation d'égalité dans un ensemble E, toutes les classes d'équivalence de E sont réduites à un seul élément $\dot{x} = \{x\}$, $\dot{y} = \{y\}$.*

Propriétés des classes d'équivalence Soient E un ensemble muni de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et x, y deux éléments de E, alors :

1. $\forall x \in E : \dot{x} \neq \emptyset$.
2. $\forall x, y \in E : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \dot{x} = \dot{y}$.
3. $\forall x, y \in E : x$ n'est pas en relation avec $y \Longleftrightarrow \dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$.
4. $\bigcup\limits_{x\in E} \dot{x} = E$.

1.4.2 Relation d'ordre

Définition 1.20. *Soit E un ensemble. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ dans E est une relation d'ordre si elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exemple 1.21.

1. *Dans $\mathcal{P}(E)$, la relation d'inclusion est une relation d'ordre, en effet :*
   (a) $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \subset A$ ce qui implique $\mathcal{R}$ est réflexive.
   (b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : A \subset B$ et $B \subset A \Longrightarrow A = B$ ce qui implique $\mathcal{R}$ est antisymétrique.
   (c) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) : A \subset B$ et $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ ce qui implique $\mathcal{R}$ est transitive.
2. *La relation notée $\leq$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.*

Définition 1.22. *(Ordre total et partiel) Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$, si deux éléments quelconques x et y sont comparables, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sinon $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel, et on écrit :*

$$(\mathcal{R} \text{ est une relation d'ordre total}) \Longleftrightarrow (\forall x, y \in E : x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x).$$

Exemple 1.23.

1. *La relation $\leq$ dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre total.*
2. *La relation d'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre partiel, puisque deux parties disjointes non vides ne sont pas comparables.*

1.5 Applications

Définition 1.24. *Soient E et F deux ensembles non vides. On appelle application de E dans F (ou fonction définie sur E à valeurs dans F) toute correspondance f qui à chaque élément x de E, fait correspondre un élément $f(x)$ de F*

1. *L'élément $f(x)$ s'appelle image de x par f et x s'appelle l'antécédent.*
2. *L'ensemble E s'appelle ensemble de définition de f et se note $E = \mathscr{D}_f$, ou encore l'ensemble de départ.*
3. *L'ensemble F s'appelle ensemble d'arrivé.*

On représente l'application de E dans F par l'une des manière suivantes

$$f : E \longrightarrow F \text{ ou } E \xrightarrow{f} F.$$

La correspondance entre x et $f(x)$ se note : $f : x \longmapsto f(x)$.
Dans l'expression $f : E \longrightarrow F$, E est l'ensemble de départ, tandis que dans l'expression $f : x \longmapsto f(x)$, x est un élément de E.

Attention : Dans chacune de ces définitions,

1. La première flèche reliant E à F qui s'écrit $\longrightarrow$ sans barre verticale à l'extrémité gauche se lit : "dans" (f va de E dans F).
2. La deuxième flèche reliant x à $f(x)$ possède, elle une barre verticale à l'extrémité gauche et se lit : "a pour image" (x a pour image $f(x)$).

Définition 1.25. *(Equation)*
Soient E et F deux ensembles non vides, f une application de E dans F et y un élément de F. On appelle équation la relation

$$f(x) = y. \tag{1.1}$$

L'élément x s'appelle inconnue. On appelle solution de l'équation (1.1) *tout élément x de E vérifiant la relation* (1.1) *(c'est-à-dire : $f(x) = y$).*

Définition 1.26. *(Graphe)*
On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{G}_f$ du produit $E \times F$ est un graphe si tous ses éléments sont des couples de la forme $(x, f(x))$, où f est une application de E dans F.

1.5.1 Exemples d'applications

Définition 1.27. *(Application identité) Soit E un ensemble non vide. On dit que l'application de E dans lui-même est identique si l'image de chaque élément x de E par cette application est l'élément x lui-même, et se note I_E ou id_E.*

$$I_E : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto I_E(x) = x.$$

Définition 1.28. *(Application constante) Soient E et F deux ensembles non vides. On dit que l'application de E dans F est constante si l'image de E par f est un ensemble à un élément dans F, autrement dit*

$$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') = c,$$

où c est élément de F.

Définition 1.29. *Soient E et F deux ensembles, si $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto f(x)$ est une application et si A est une partie de E, l'application de A dans F qui à tout élément x de A associe l'élément $f(x)$ de F s'appelle la restriction de f à la partie A et on note $f_{\backslash A}$ avec $f_{\backslash A} : A \longrightarrow F, x \longmapsto f(x)$. On dit aussi que f est un prolongement à E de l'application $f_{\backslash A}$.*

Exemple 1.30. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{x}$ une application, alors l'application $f_{\backslash \mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{x}$, est une restriction de f à $\mathbb{R}_+$.*

1.5.2 Composition des applications

Définition 1.31. *Soient E, F et G trois ensembles non vides, f et g deux applications définies de E dans F, et de F dans G, alors la composée $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ pour tout élément } x \text{ de } E$$

En général, la composition des applications est associative mais n'est pas commutative.

Exemple 1.32. *Soient f, g et h des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x - 1, \quad h(x) = e^x.$$

1. *On a : $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2(x^2) - 1$, par contre : $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = (2x-1)^2 \neq g \circ f(x)$.*
2. *$h \circ (g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(2x^2 - 1) = e^{2x^2-1}$ et $(h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(x^2) = (h(g(x^2))) = e^{g(x^2)} = e^{2x^2-1}$.*

1.5.3 Applications injective, surjective et bijective

Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. On dit que f est injective si

$$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

2. On dit que f est surjective si

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E : f(x) = y,$$

c'est-à-dire pour tout $y \in F$, il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

3. On dit que f est bijective si f est à la fois injective et surjective, et on écrit :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E : f(x) = y,$$

c'est-à-dire pour tout $y \in F$, il existe un unique élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exemple 1.33. *La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = x^2$ n'est ni injective, ni surjective, sa restriction à l'intervalle $[0, +\infty[$ est injective. La fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$, qui à un réel x associe $f(x) = x^2$ est surjective. Sa restriction à l'intervalle $[0, +\infty[$ est bijective.*

Remarque. *Si f est une bijection de E dans F, on peut définir une application, notée f^{-1} appelée application réciproque de f qui est bijective définie de F dans E, et pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a :*

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Théorème 1.34. *Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors*

1. *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et on a :*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. Comme g est injective, alors $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ entraîne $f(x) = f(y)$, ce qui entraîne à son tour $x = y$ car f est injective. Si f et g sont surjectives, alors $f(E) = F$ et $g(F) = G$. Donc $(g \circ f)(E) = g[f(E)] = g(F) = G$. D'où la surjectivité de $g \circ f$. La dernière assertion découle des deux premières.

Soit $z \in G$ et soit $x \in E$ tels que $(g \circ f)^{-1}(z) = x$, on a :

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1}(z) = x &\iff (g \circ f)(x) = z \\ &\iff g(f(x)) = z \\ &\iff f(x) = g^{-1}(z) \\ &\iff x = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z),\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

On vérifie ainsi les relations suivantes

$$f \circ f^{-1} = I_F \text{ et } f^{-1} \circ f = I_E.$$

1.5.4 Image directe et image réciproque

Définition 1.35. *Soient E et F deux ensembles non vides, f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.*

L'image directe de A par f est définie comme le sous-ensemble de F constitué par les images par f de tous les éléments de A. On note cette partie

$$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\} \subset F.$$

L'image réciproque de B par f est définie comme le sous-ensemble de E constitué par les antécédents des éléments de B. On note cette partie

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\} \subset E.$$

Remarque. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*

- *Si f n'est pas surjective, alors il existe au moins un élément y_0 de F qui n'a pas d'antécédent. Dans ce cas, l'image réciproque du singleton $\{y_0\}$ de F est vide, i.e., $f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$.*
- *Si f n'est pas injective, alors l'image réciproque du singleton $\{y_0\}$ de F peut contenir plusieurs éléments de E.*
- *Si f est bijective, alors l'image réciproque du singleton $\{y_0\}$ de F contient toujours un et un seul élément x_0 de E, i.e., $f^{-1}(\{y_0\}) = \{x_0\}$.*

Exemple 1.36. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$, f n'est ni injective ni surjective. On a*

$$f^{-1}([0,4]) = f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]\,,\ f([-2,2]) = [0,4]\,,$$

$$f^{-1}(-2) = \emptyset \text{ et } f^{-1}(\{4\} = \{-2,2\}.$$

Exemple 1.37. *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^2$, *$f$ est bijective et on a :*

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ : f^{-1}\{y\} = \{\sqrt{y}\}.$$

Proposition 1.38. *Soient E, F deux ensembles quelconques et $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour tous $(A, B) \in [\mathcal{P}(E)]^2$ et $(X, Y) \in [\mathcal{P}(F)]^2$, on a les propriétés suivantes sur les images directes et réciproques par f :*

1. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$ *et* $X \subset Y \Longrightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ *et* $f^{-1}(X \cap Y) \subset f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ *et* $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
4. $A \subset f^{-1}(f(A))$ *et* $f(f^{-1}(X)) \subset X$.

1.6 Exercices

Exercice 1.1. *Soient E, F et G trois ensembles.*
Montrer que, si E est inclus dans F, alors :

a. $E \cap G \subset F \cap G$.

b. $E \cup G \subset F \cup G$.

Exercice 1.2. *Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que :*

a. $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

b. $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

Exercice 1.3. *Soient P et Q deux parties d'un ensemble E. Montrer que :*

a. $\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$.

b. $\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$.

Exercice 1.4. *Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer les égalités :*

a. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

b. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

c. $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$.

Exercice 1.5. *Que dire de deux sous-ensembles A et B de E tels que $A \cup B = A \cap B$?*

Exercice 1.6. *Soit $\mathcal{R}$ une relation définie dans $\mathbb{Z}$ par :*
$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 2k$.

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b. Trouver les classes d'équivalence de 0 *et* 1.

c. En déduire alors l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$.

Exercice 1.7. *Soit $\mathcal{R}$ une relation réflexive et transitive dans un ensemble E. Montrer que la relation $\mathcal{S}$ définie par les couples (x, y) tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ est une relation d'équivalence.*

Exercice 1.8. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie dans $\mathbb{N}^*$ par :*
$\forall x, y \in \mathbb{N}^* : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x$ *est multiple de y.*

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

b. $\mathbb{N}^*$ est-il totalement ordonné ?

Exercice 1.9. *Les fonctions suivantes sont-elles des applications ? Étudier l'injectivité, surjectivité et la bijectivité de chacune de ces fonctions.*

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-2} \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n-1 \end{array}, \quad f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-5} \end{array}.$$

Exercice 1.10. *Démontrer la proposition* 1.38.

Exercice 1.11. *Montrer que l'application f de $\mathbb{Z}$ dans lui-même définie par :*

$$f(n) = \begin{cases} n+2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n+4 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

est bijective.
En est-il de même lorsqu'on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{N}$?

Exercice 1.12. *Soient E, F et G trois ensembles, f une applications de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.*

a. Montrer que si h est injective, f l'est aussi, et que, si de plus f est surjective, alors g est injective.

b. Montrer que si h est surjective, g l'est aussi, et que, si de plus g est injective, alors f est surjective.

Chapitre 2

Structure de corps des nombres réels sur $\mathbb{R}$

2.1 Préambule

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ est considéré comme une notion primitive. L'absence d'éléments de $\mathbb{N}$ dont la somme avec 1, ou avec 2,... donne 0 conduit à la construction de l'ensemble $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ des entiers relatifs. Puis, l'absence d'éléments de $\mathbb{Z}$ dont le produit avec 2, ou avec $3, \cdots$ donne 1 amène à la construction de l'ensemble $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\right\}$ des nombres rationnels, qui est muni d'une structure de corps commutatif totalement ordonné, c'est-à-dire de deux lois internes $+, \cdot$, et d'une relation d'ordre total $\leq$ telles que :

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.
- $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3, \begin{cases} a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c \\ a \leq b \text{ et } 0 \leq c \Longrightarrow ac \leq bc. \end{cases}$

On voit alors, par exemple, qu'il n'existe aucun rationnel de carré 2. En effet, s'il existait $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$, les exposants de 2 dans les décompositions primaires de m^2 et $2n^2$ serait de parités contraires.
D'autres nombres, utiles dans l'analyse classique, comme e, π, ne sont pas rationnels. D'où la nécessité de la construction d'un corps de nombres plus vaste que $\mathbb{Q}$, ce sera le corps des nombres réels.

2.2 Nombres réels

2.2.1 Existence et unicité de $\mathbb{R}$

Définition 2.1. *Nous admettons l'existence et l'unicité, à la notation près, d'un ensemble $\mathbb{R}$ muni de deux lois internes $+, \cdot$, et d'une relation $\leq$ tel que :*

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *est un corps commutatif.*
2. $\leq$ *est une relation d'ordre total dans* $\mathbb{R}$.
3. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a \leq b \Longrightarrow x + z \leq y + z \\ a \leq b \text{ et } 0 \leq z \Longrightarrow xz \leq yz. \end{cases}$
4. *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet dans* $\mathbb{R}$.

Les éléments de $\mathbb{R}$ *sont appelés nombres réels.*

Rappelons que :

1. $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif signifie qu'on a les propriétés suivantes :

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$	(Commutativité de $+$).
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x + (y + z) = (x + y) + z$	(Associativité de $+$).
$\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$	(0 est l'élément neutre de $+$).
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (-x) \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0$	(Tout réel x admet un opposé, noté $-x$).
$\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = yx$	(Commutativité de $\times$).
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x(yz) = (xy)z$	(Associativité de $\times$).
$\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 1 = x$	(1 est l'élément neutre de $\times$).
$\forall x \in \mathbb{R}, x, 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}, x \times x^{-1} = 1$	(Tout réel non nul admet un inverse).
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x(y + z) = xy + xz$	(Distributivité à gauche de $\times$ par rapport à $+$).
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (y + z)x = yx + zx$	(Distributivité à droite de $\times$ par rapport à $+$).

2. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre signifie que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}, x \leq x$, (Réflexivité).
- pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$, (Antisymétrie).
- pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$, (Transitivité).

De plus, elle est totale, puisqu'on a

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a soit $x \leq y$ soit $y \leq x$ i.e., deux réels quelconques sont comparables.

Remarque. *On définit le maximum (resp. minimum) de deux réels x et y par :*

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & si\ x \geq y \\ y & si\ y > x. \end{cases}$$

respectivement

$$\min(x, y) = \begin{cases} x & si\ x \leq y \\ y & si\ y < x. \end{cases}$$

2.3 Propriétés de $\mathbb{R}$

2.3.1 Propriété d'Archimède

Théorème 2.2. *(Propriété d'Archimède) $\mathbb{R}$ est un corps archimédien, c'est-à-dire un corps vérifiant la propriété d'Archimède :*
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y < nx$.

Démonstration. Soit $A = \{nx/n \in \mathbb{N}\}$, A est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée par y, il existerait $s \in \mathbb{R}$ tel que $s = \sup A$. Comme $(s-x) < s$, $s-x$ n'est pas un majorant de A dans $\mathbb{R}$, on pourrait trouver alors, $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $(s-x) < nx \leq s$, d'où $s < (n+1)x \in A$, ce qui est absurde. ■

2.3.2 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Proposition 2.3. *Entre deux réels il y a toujours un rationnel, c'est-à-dire pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $x < \frac{p}{q} < y$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Par le théorème précédent, il existe un entier $q > 0$ tel que $\frac{1}{y-x} < q$ ainsi qu'un entier $n > 0$ tel que $qx < n$. L'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* : qx < n\}$$

est minorée par 1 et non vide. Admettons que tout ensemble non vide d'entiers, ici $A \subset \mathbb{N}$, possède un minimum. Notons $p = \min A$. On a donc $p-1 \leq qx < p$ de sorte que $qx < p \leq qx+1$ et $x < \frac{p}{q} \leq x + \frac{1}{q} < y$ par la première inégalité. ■

La propriété précédente est essentielle, puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel.

2.3.3 Partie entière

Etant donné un nombre réel x, il existe un plus grand entier relatif, noté $E(x)$ ou $[x]$, tel que $E(x) \leq x$. On l'appelle la partie entière de x.
On a donc, par définition : $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x) \leq x < E(x)+1$ et $E(x) \in \mathbb{Z}$.
Attention à ne pas confondre avec la suppression de la partie décimale quand $x < 0$; par exemple $E(-4,3) = -5$.

Remarque. *Soit x un nombre réel, alors $E(x+k) = E(x)+k, \forall k \in \mathbb{Z}$.*

Exemple 2.4.

- $E(2,853) = 2, E(\pi) = 3, E(-3,5) = -4$.
- $E(x) = 3 \Longleftrightarrow 3 \leq x < 4$.

2.3.4 Valeur absolue

La valeur absolue d'un réel x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Propriétés de la valeurs absolue

Proposition 2.5. *Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$, alors*

1. $|x| = \max(x, -x)$.
2. $|x| \geq 0$.
3. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

4. $|xy| = |x||y|$.
5. $|x| = |-x|$.
6. $-|x| \leq x \leq |x|$.
7. $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$.
8. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (*Inégalité triangulaire*).
9. $||x| - |y|| \leq |x \pm y|$ (*Seconde inégalité triangulaire*).
10. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$.

2.4 Intervalles

Définition 2.6. *Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :*

$$\forall a, b \in I, \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad (a \leq x \leq b \Longrightarrow x \in I).$$

Définition 2.7. *Un intervalle ouvert est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme*

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\},$$

où a et b sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Même si cela semble évident il faut justifier qu'un intervalle ouvert est un intervalle (!). En effet soient a', b' des éléments de $]a, b[$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $a' \leq x \leq b'$. Alors on a $a < a' \leq x \leq b' < b$, donc $x \in]a, b[$.

La notion de voisinage sera utile pour les limites.

Définition 2.8. *(Voisinage d'un point)*
Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a si elle contient un intervalle ouvert I centré en a, soit du type $]a - \alpha, a + \alpha[$ avec $\alpha > 0$, tel que $a \in I$ et $I \subset V$.

2.4.1 Formes des intervalles :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x \leq b\}, \ \ ]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x \leq b\}.$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x < b\}, \ \ ]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x < b\}.$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \leq b\}, \ \ ]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x < b\}.$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x\}, \ \ ]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x\}.$$

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\, .$$

On dit que $]a, b[$ est un intervalle ouvert, que $[a, b]$ est un intervalle fermé, et que $[a, b[$ et $]a, b]$ sont des intervalles semi-ouverts ou intervalles semi-fermés. On dit que $]-\infty, b[$ et $]a, +\infty[$ sont des intervalles ouverts, et que $]-\infty, b]$ et $[a, +\infty[$ sont des intervalles fermés. Avec les notations précédentes, les réels a et (ou b) sont appelés les extrémités de l'intervalle.

Remarque. *Notons en particulier que* $\emptyset =]a, a[$ *est un intervalle, et que les singletons* $\{a\} = [a, a]$ *sont des intervalles.*

On utilise souvent la propriété :

$$x \in [a, b] \Longleftrightarrow \exists t \in [0, 1] : x = ta + (1 - t)b.$$

Proposition 2.9. *Une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle si et seulement si :*

$$\forall a, b \in A, \text{ avec } a < b, \text{ alors } [a, b] \subset A.$$

2.5 Ensembles bornés

2.5.1 Majoration, Minoration

Définition 2.10. *Soient* A *une partie de* $\mathbb{R}$. *On dit que* $M \in \mathbb{R}$ *(resp.* $m \in \mathbb{R}$*) est un majorant (resp. minorant) de* A *si* $x \leq M$ *(resp.* $x \geq m$*) pour tout* x *de* A. *Si en plus,* $M \in A$ *(resp.* $m \in A$*), alors* M *(resp.* m*) est le plus grand (resp. le plus petit) élément de* A*, noté* $\max A$ *(resp.* $\min A$*).*
Si A *admet un majorant (resp. minorant), on dit que* A *est majorée (resp. minorée).*
Une partie non vide $A \subset \mathbb{R}$ *est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Théorème 2.11. *(Unicité)*
Si une partie non vide de $\mathbb{R}$ *admet un plus grand élément, ou un plus petit élément, il est unique. Mais il peut ne pas exister.*

Exemple 2.12.

– *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
– *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*

2.5.2 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Définition 2.13.

- *La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A.*
- *La borne inférieure de A est le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de A.*

Caractérisation

On dit que M est la borne supérieure de A et on note $M = \sup A$ si on a à la fois :

1. $\forall x \in A,\ x \leq M$, c'es-à-dire que M est un majorant (ou encore l'ensemble A est borné supérieurement).
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x$, c'est-à-dire que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant.

On dit que m est la borne inférieure de A et on note $m = \inf A$ si on a à la fois :

1. $\forall x \in A, m \leq x$, c'est à dire que m est un minorant (ou encore l'ensemble A est borné inférieurement).
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < m + \varepsilon$, c'est-à-dire que $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant.

Remarque.

– *Si A admet un plus grand élément, alors c'est la borne supérieure de A, on a alors* $\sup A = \max A$.
– *Si A admet un plus petit élément, alors c'est la borne inférieure de A, on a alors* $\inf A = \min A$.
– *L'ensemble A est dit borné s'il est à la fois borné supérieurement et inférieurement.*

Exemple 2.14. • *Les intervalles bornés de $\mathbb{R}$ sont :*
$[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$ et $[a, b[$, tels que $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. • *Les intervalles non bornés de $\mathbb{R}$ sont :* $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$ *et* $]a, +\infty[$, *tel que* $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.15. *(de la borne supérieure)*
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Corollaire 2.16. *(Existence de la borne inférieure)*
$\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne inférieure, c'est-à-dire que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Démonstration. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et soit m un minorant de A. Posons $(-A) = \{-x : x \in A\}$. Alors $(-A)$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée (par $-m$). Donc $(-A)$ admet une borne supérieure $s = \sup(-A)$. s majore $(-A)$, donc $-s$ minore A. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists x \in (-A) : \ s - \varepsilon < x,$$

ce qui équivaut à

$$\exists y = -x \in A : \ y < -s + \varepsilon.$$

Par conséquent, $-s$ est la borne inférieure de A ($-s = \inf A$). ∎

Exemple 2.17. *Soit* $A = \left\{\frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$. *On a, pour tout* $n \geq 1, 0 \leq \dfrac{n-1}{n+1}$.
Comme $0 \in A$, *on en déduit que* $0 = \min A = \inf A$.
Montrons que $1 = \sup A$. *Comme* $n - 1 < n + 1$, *on a* $\dfrac{n-1}{n+1} < 1$. *Donc* 1 *majore* A. *Soit* $\varepsilon > 0$.
On a :

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1} \Longleftrightarrow 1 - \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} - 1 < n.$$

(Un tel n existe par la propriété d'Archimède). Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $x \in A$ ($x = \dfrac{n-1}{n+1}$, *où* $n > \dfrac{2}{\varepsilon} - 1$) *tel que* $1 - \varepsilon < x < 1$. *Donc* $\sup A = 1$.

2.6 Raisonnement par récurrence

Définition 2.18. *Un raisonnement par récurrence est un raisonnement du type suivant :*
$\mathcal{P}(n)$ désigne une certaine propriété dépendant d'un entier n et n_0 désigne un entier naturel donné.
On veut démontrer que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Pour cela, on procède en deux étapes :

- ***Etape 1.*** *On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.*
- ***Etape 2.*** *On se donne un entier $n > n_0$ quelconque.*
  On suppose que pour cet entier n la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence) et on montre que sous cette hypothèse la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Exemple 2.19. *Montrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^n \geq n$.
Pour $n = 1$ *on a* $2^1 = 2 \geq 1$ *donc* $\mathcal{P}(1)$ *est vraie.*
On suppose que $\mathcal{P}(n)$ *est vraie c'est-à-dire :* $2^n \geq n$*, et on montre que* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie i.e.,* $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^{n+1} \geq n+1$.
On a $2^{n+1} = 2^n \times 2 \geq n \times 2 = n + n \geq n + 1$*, d'où* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie. Donc la propriété est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 2.20. *Montrer par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour $n = 1$ *: On a* $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6}$ *d'où* $\mathcal{P}(1)$ *est vraie.*
Supposons que $\mathcal{P}(n)$ *est vraie, c'est-à-dire :*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie, c'est-à-dire :*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\underbrace{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.*

2.7 Exercices

Exercice 2.1.

1. *Donner la partie entière des nombres suivants :* $-2,9$; $3,98$; $10,35$; $-8,2$.

2. *Écrire en fonction de la valeur absolue les inégalités suivantes :*

$$-4 < x < 10, \quad 2 < x < 5, \quad -7 < x < -3.$$

Exercice 2.2. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que :*

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$$

Exercice 2.3. *Démontrer la Proposition* 2.5.

Exercice 2.4. *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, si on définit l'ensemble $-A$ par :*

$$-A = \{-x : \ x \in A\},$$

- *Montrer que si A est borné, alors $-A$ est borné et on a :*

$$\sup(-A) = -\inf A \ et \ \inf(-A) = -\sup A.$$

Exercice 2.5. *Soient $A, \ B$ deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ avec $A \subset B$.*

- *Montrer que si B est borné, alors A est borné et on a :*

$$\inf B \leq \inf A \ et \ \sup A \leq \sup B.$$

Exercice 2.6. *Soit A l'ensemble non vide définie par :*

$$A = \left\{a_n = \frac{n+3}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

1. *Montrer que A est borné.*
2. *Trouver* $\inf A, \ \sup A, \ \min A, \ et \ \max A.$

Exercice 2.7. *Trouver la borne supérieure (resp. inférieure), le plus grand (resp. le plus petit) élément des ensembles suivants :*

$$A = [-1, 0[\,, \quad B = \left\{2 - \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad C = \left\{-x^2 + 2x : x \in \,]1, 2[\right\}.$$

Exercice 2.8. *Mêmes questions de l'exercice précédent pour les ensembles :*

$$A = \left[\sqrt{2}, 2\right] \cap \mathbb{Q}, \ B = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^3 > 27\right\}, \ C = \left\{\frac{n}{mn+1} : \ n, m \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 2.9. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 6$, on a $2^n \geq 6n + 7$.*

Exercice 2.10. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{2n} + 2$ est un entier divisible par* 3.

Chapitre 3

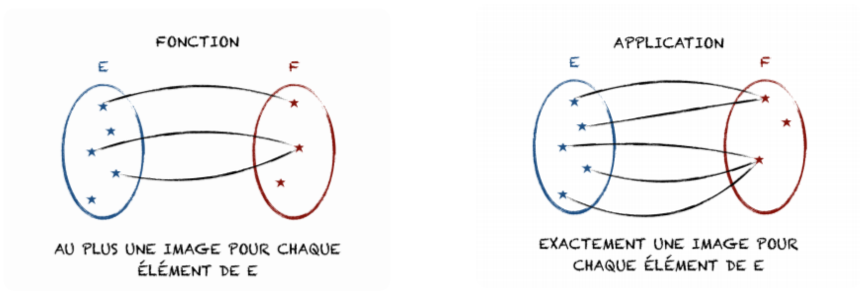
Fonctions réelles d'une variable réelle

3.1 Notions de base sur les fonctions

Commençons par donner les définitions de base des fonctions.
On considère ici deux ensembles I et J inclus dans $\mathbb{R}$. Ces ensembles peuvent être $\mathbb{R}$ lui-même.

Définition 3.1. *(Fonction)*
La fonction f définie par un ensemble de départ I et par un ensemble d'arrivée J est une relation de I vers J dans laquelle chaque élément de I appelé antécédent possède au plus un élément dans l'ensemble J appelé image.

Remarque. *Le fait que chaque élément de I possède au plus une image dans J signifie que certains éléments de I peuvent ne pas avoir d'images dans J du tout. Mais d'un autre côté, cela veut également dire que les éléments de I ne peuvent pas avoir plus d'une image dans J.*



(a) Représentation d'une fonction. (b) Représentation d'une application.

FIGURE 3.1 – Exemple de fonction et d'application.

Que se passe-t-il si l'on ne sélectionne que les éléments de I qui auront exactement une image, en laissant de côté ceux qui n'en ont pas. C'est la définition suivante.

Définition 3.2. *(Domaine de définition) Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction. L'ensemble des éléments de I qui ont exactement une image dans J par la fonction f est appelé domaine de définition de f. On le note $\mathscr{D}_f$ tel que*

$$\mathscr{D}_f = \{x \in I / \ \exists y \in J \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

Exemple 3.3. *Pour les fonctions :*

$$f(x) = x^2, \ g(x) = e^x \ h(x) = \ln(x-1) \text{ et } l(x) = \frac{|x|}{x-1},$$

les domaines de définition sont :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}, \ \mathscr{D}_g = \mathbb{R}, \ \mathscr{D}_h =]1, +\infty[, \ \mathscr{D}_l = \mathbb{R} - \{1\}.$$

On peut carrément définir les fonctions à partir de leur ensemble de définition. Dans ce cas là, on ne les appellera plus fonctions mais applications.

Remarque. • *On peut dire qu'une fonction $f : I \longrightarrow J$ est une application de $\mathscr{D}_f$ dans J.*
• *Réciproquement, une application est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble de départ.*

Exemple 3.4. *La fonction :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x}, \end{array}$$

est une application puisque $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+$ l'ensemble de départ.
Par contre la fonction :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x}, \end{array}$$

n'est pas une application puisque $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^* \neq \mathbb{R}$ l'ensemble de départ.

Nous pouvons maintenant essayer de tracer ces applications. Les courbes représentant ces applications, appelées également graphes, permettent de les visualiser plus facilement dans un repère en deux dimensions. Pour cela nous avons besoin de définir le graphe d'une application.

Définition 3.5. ***(Graphe d'une application)*** *Le graphe, appelé encore courbe représentative, noté $\mathscr{G}_f$ d'une application $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que x appartienne à $\mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$ appartienne à J.*

Remarque. *Le graphe de f s'écrit en général de la façon suivante :*

$$\mathscr{G}_f = \{(x, f(x));\ x \in \mathscr{D}_f\}.$$

Exemple 3.6. *Voici dans les figures suivantes, le graphe de deux fonctions usuelles :*

$$1.\ f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array} \quad ;\ 2.\ f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3. \end{array}$$

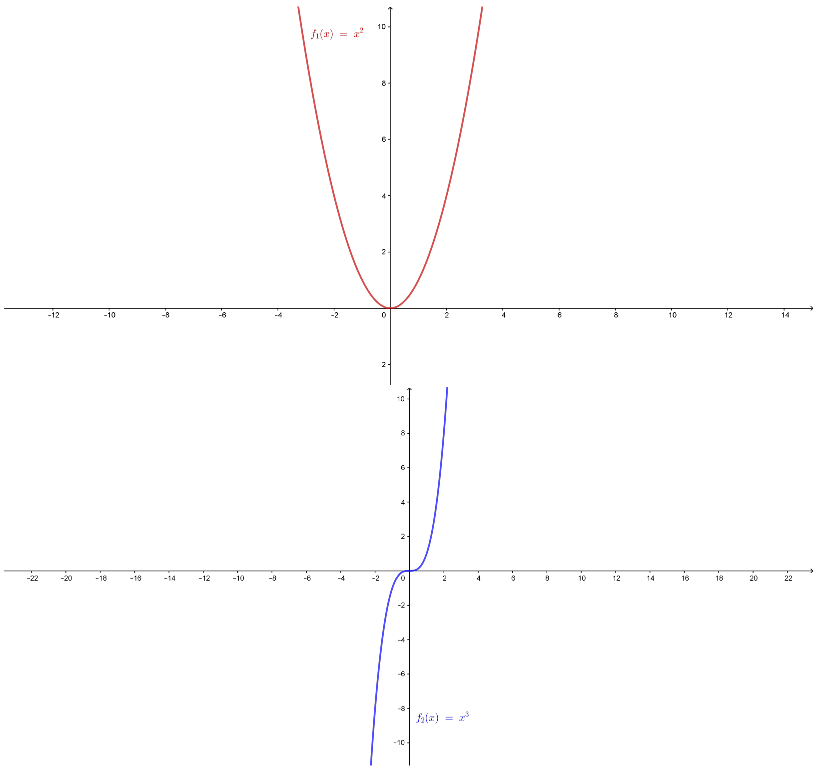


FIGURE 3.2 – Deux fonctions classiques.

3.2 Quelques propriétés des fonctions

Nous allons donner ici quelques propriétés connues, et d'autres moins connues sur les fonctions. Ces propriétés permettront de décomposer des fonctions un peu compliquées en fonctions connues plus simples.

3.2.1 Opérations algébriques

Commençons par les opérations connues : somme, produit et division (ou quotient) de fonctions.

Définition 3.7. *Si f et g sont deux fonctions définies sur le même intervalle I, on a alors les résultats suivants :*

1. ***Somme*** *: la fonction somme $f + g$ est définie pour tout réel x de I par :*
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
2. ***Produit*** *: la fonction produit fg est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :*
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$
3. ***Quotient*** *: lorsque la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I, la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ est définie pour tout réel x de I par :*
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

3.2.2 Restriction

Il se peut que de temps à autre, nous n'ayons pas besoin d'étudier une fonction sur tout son domaine de définition, mais seulement sur une partie. On restreint alors la fonction sur un intervalle plus petit que son domaine de définition.

Définition 3.8.
Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit I_0 un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I. On appelle restriction de f à I_0 que l'on note $f|_{I_0}$, la fonction définie sur I_0 par :
$$\text{pour tout } x \in I_0, f|_{I_0}(x) = f(x).$$

Remarque. *Cette définition signifie juste que les fonctions f et $f|_{I_0}$ prennent les mêmes valeurs en chaque point de l'intervalle I_0.*

3.2.3 Fonctions majorées, minorées et bornées

Il se peut que l'on ait besoin de savoir de temps en temps si une fonction peut-être majorée ou minorée (on pourrait par exemple chercher le coût minimum ou maximum d'une opération financière). Pour cela nous devons définir les notions suivantes.

Définition 3.9. *(Fonction majorée (resp. minorée))*
Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, étant donné un réel M (resp.m), la fonction f est dite majorée (resp. minorée) par M (resp. m) sur I, si pour tout réel de I on a : $f(x) \leq M$ (resp. $f(x) \geq m$).

Définition 3.10. *(Fonction bornée)*
Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, la fonction f est dite bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

Quelques fois, ce n'est pas un nombre qui majore (ou minore) une fonction. ll se peut que ce soit carrément une autre fonction. Nous avons alors la définition suivante.

Définition 3.11.
Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I. On dit que f majore g (ou g minore f), si pour tout x de I on a :

$$f(x) \geq g(x).$$

On écrit alors $f \geq g$.

3.2.4 Composition

Définition 3.12.
Soit f une fonction définie sur l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle J. Soit g une fonction définie de l'intervalle J vers l'intervalle K de $\mathbb{R}$. La fonction composée des fonctions f et g est la nouvelle fonction que l'on écrit $g \circ f$ (et que l'on lit g rond f) définie pour tout x dans l'intervalle I par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

et que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & I & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & g\left(f(x)\right). \end{array}$$

3.2.5 Monotonie

Définition 3.13. *(Croissance et stricte croissance)*
Soit f une fonction définie sur I. La fonction f est dite croissante (resp. strictement croissante)

sur I si pour tous x_1 et x_2 de I, on a :

$$si\ x_1 \leq x_2,\ \ alors\ f(x_1) \leq f(x_2).$$

$$\left(resp.\ si\ x_1 < x_2,\ \ alors\ f(x_1) < f(x_2)\right).$$

Définition 3.14. *(Décroissance et stricte décroissance)*
Soit f une fonction définie sur I. La fonction f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) sur I si pour tous x_1 et x_2 de I, on a :

$$si\ x_1 \leq x_2,\ \ alors\ f(x_1) \geq f(x_2).$$

$$\left(resp.\ si\ x_1 < x_2,\ \ alors\ f(x_1) > f(x_2)\right).$$

De façon générale nous avons la définition de la monotonie suivante.

Définition 3.15. *(Monotonie et stricte monotonie)*
Soit f une fonction définie sur I. La fonction f est dite monotone (resp. strictement monotone) sur I si elle est croissante (resp. strictement croissante) ou décroissante (resp. strictement décroissante).

3.2.6 Sens de variation d'une fonction

Étudier les variations d'une fonction (ou application) consiste donc à regarder sa variation de monotonie et donc à partager son ensemble de définition en intervalles tels que sur chacun d'eux, la fonction soit monotone. On synthétise alors les résultats obtenus dans un tableau de variations.

Définition 3.16. (Tableau de variations)

Afin de rassembler les informations concernant les variations d'une fonction, on utilise un tableau de variations dans lequel la croissance est représentée par une flèche vers le haut, la décroissance par une flèche vers le bas. On y indique également les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 3.3 – Exemple de tableau de variations pour la fonction $f : x \longmapsto x^2$.

Quelques propriétés relatives à la monotonie.

Proposition 3.17.
Soient f et g deux fonctions définies sur I.

1. *Si f et g sont croissantes sur I, la somme $f + g$ est croissante.*
2. *Si f et g sont positives ou nulles sur I. Si f et g sont croissantes sur I, alors leur produit fg est croissant sur I.*
3. *Si f et g sont croissantes toutes les deux, ou décroissantes toutes les deux alors leur composée (si elle existe), est croissante.*
4. *Si l'une des fonctions f ou g est croissante et l'autre décroissante, alors la composée est décroissante.*

3.2.7 Parité

Définition 3.18. *(Fonction paire (resp. impaire))*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. La fonction f est dite paire (resp. impaire), si pour tout x de I, on a :

$$f(-x) = f(x)(\text{ resp. } f(-x) = -f(x)).$$

Exemple 3.19. *La fonction $f(x) = \cos x$ est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, et la fonction $g(x) = \sin x$ est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.*

Remarque. • *Si f est paire, sa courbe représentative (ou son graphe) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, c'est-à-dire la droite d'équation $x = 0$.*
• *Si f est impaire, sa courbe représentative (ou son graphe) est symétrique par rapport à l'origine O.*

Remarque. *Toute fonction f impaire s'annule en 0. Autrement dit, si f est impaire $f(0) = 0$.*

Exemple 3.20. *Dans l'exemple 3.6, la fonction f_1 est paire et la fonction f_2 est impaire (voir Figure 3.2).*

3.2.8 Fonctions périodiques

Montrer qu'une fonction est périodique peut être très utile, dans le sens où, un peu comme dans le cas de la parité, cela permet de réduire fortement le domaine d'étude de la fonction, en l'occurrence ici sur une seule période.

Définition 3.21.
Soit f une fonction définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit T un nombre réel non nul tel que pour tout x de I, l'on ait :

$$x + T \text{ dans l'intervalle } I.$$

La fonction f est dite T-périodique si pour tout réel x de I : $f(x + T) = f(x)$. T est alors appelé la période de f.

Remarque. *Si f est une fonction périodique et si T et T' sont deux périodes de f telles que $T + T' \neq 0$, alors $-T$ et $T + T'$ sont également des périodes de f.*

f peut donc posséder plusieurs périodes. La plus petite d'entre elle est appelée période fondamentale.

Définition 3.22. *(Période fondamentale)*
Soit f une fonction définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est périodique. Si l'ensemble des périodes strictement positives de f a un plus petit élément T_0, celui-ci est appelé période fondamentale de f. Toutes les périodes de f sont alors de la forme nT_0, où n est un entier relatif.

Exemple 3.23. *Dans l'exemple* 3.19, *les fonctions f et g sont des fonctions périodiques de période fondamentale $T = 2\pi$.*

3.3 Injectivité, surjectivité et bijectivité d'une fonction

Définition 3.24. *(Fonction injective)*
On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow J$ est injective si et seulement si tout élément y de l'ensemble

d'arrivée J admet au plus un antécédent dans l'ensemble I de départ. Autrement dit, il en possède soit un, soit aucun mais pas plus de un. En mathématiques cela s'écrit :

$$\forall x_1, x_2 \in I : \; f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

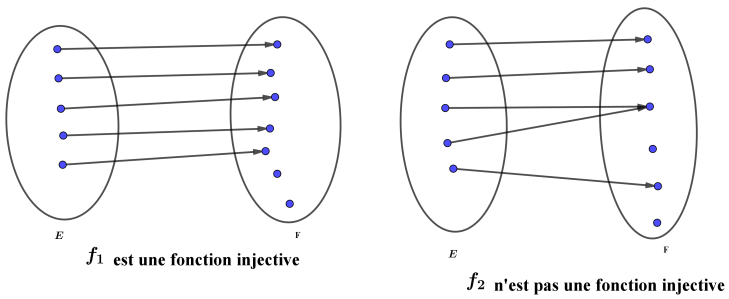


FIGURE 3.4 – Concept d'injection.

Définition 3.25. *(Fonction surjective)*
On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow J$ est surjective si et seulement si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet au moins un antécédent dans l'ensemble I de départ. Autrement dit, il en possède soit un, soit plus, mais il est obligé d'en posséder un. En mathématiques cela s'écrit :

$$\forall y \in J, \; \exists x \in I : f(x) = y.$$

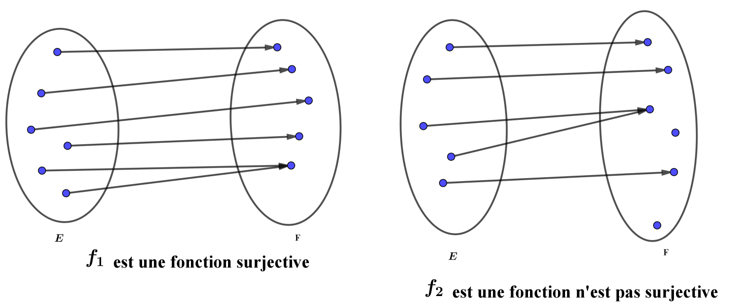


FIGURE 3.5 – Concept de surjection.

Définition 3.26. *(Fonction bijective)*
On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow J$ est bijective si et seulement elle est à la fois injective et surjective. C'est-à-dire si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet exactement un (un et

un seul) antécédent dans l'ensemble I de départ. En mathématiques, cela s'écrit :

$$\forall y \in J, \exists! x \in I : f(x) = y.$$

Il est alors possible de passer de y à x par ce qu'on appelle la fonction réciproque, que l'on note f^{-1}. Et donc si f est bijective on a :

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & J \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rccl} f^{-1}: & J & \longrightarrow & I \\ & y & \longmapsto & x = f^{-1}(y). \end{array}$$

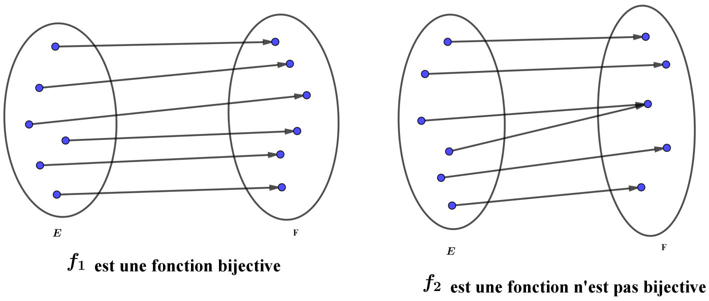


FIGURE 3.6 – Concept de bijection.

Question.
Comment construire le graphe de f^{-1}, la fonction réciproque d'une fonction bijective $f : I \longrightarrow J$?

Réponse.
On voit par construction de la fonction réciproque que si l'on suppose x un point de l'intervalle I et y un point de l'intervalle J tel que $y = f(x)$, alors

(x, y) appartient au graphe $\mathscr{G}_f$ si et seulement si (y, x) appartient au graphe $\mathscr{G}_{f^{-1}}$.

Autrement dit tout point du graphe $\mathscr{G}_{f^{-1}}$ est le symétrique du graphe $\mathscr{G}_f$ par rapport à la première bissectrice, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Exemple 3.27. *Dans l'exemple* 1.37 *le graphe de la fonction* $f(x) = x^2$ *et sa fonction réciproque* $\sqrt{x}$ *pour* $x \geq 0$ *est comme suit :*

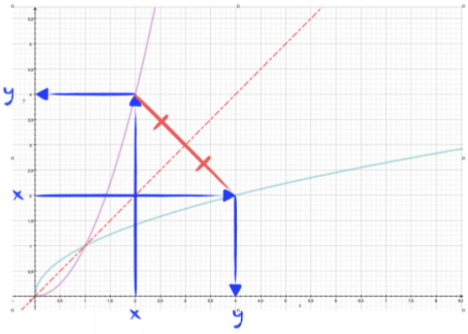


Figure 3.7 – Construction de la fonction f et sa fonction réciproque f^{-1}.

3.4 Exercises

Exercice 3.1. *Soient* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

1. *Calculer* $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$.
2. *Montrer que :*
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$
3. *En déduire que :*
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \frac{\ln(x+y)}{2} \leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Exercice 3.2. *Soit* f *une application définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que :*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(xy) = f(x) \cdot f(y)$.

Supposons que f *n'est pas l'application nulle (i.e.,* $\exists x \in \mathbb{R} : \ f(x) \neq 0$*).*

1. *Calculer* $f(0)$ *et* $f(1)$.
2. *Montrer que :* $\forall x, y \in \mathbb{R} : \ f(x-y) = f(x) - f(y)$.
3. *En déduire que :* $\forall y \in \mathbb{R} : \ f(-y) = -f(y)$.
4. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{Z} : \ f(n) = n$.
5. *Soit* $n \in \mathbb{Z}^*$*, donner l'expression de* $f\left(\frac{1}{n}\right)$ *en fonction de* $f(n)$.

Exercice 3.3. *Soit la fonction* f *définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f : & \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos x} \end{array}$$

1. *Calculer* $f(I)$.
2. *Montrer que :* f *est une bijection de* I *dans* $f(I)$.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Afin de faire une étude plus complète d'une fonction, nous avons besoin de connaître son comportement en des points particuliers et la plupart du temps aux bornes de son domaine de définition. Nous allons faire la différence entre les limites en un point, et les limites en l'infini. Puis nous verrons quelques propriétés sur les limites.

4.1 Limite finie d'une fonction en un point

Définition 4.1. *Soit f une fonction définie au voisinage V du point $a \in \mathbb{R}$, sauf peut être en a. On dit que f admet une limite finie l en a (c'est-à-dire que l est différente de $+\infty$ et $-\infty$), et on écrit $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V, (x \neq x_0) : \ |x - a| < \delta \implies \left| f(x) - l \right| < \varepsilon.$$

Remarque.

1. *Intuitivement, cette définition signifie que $f(x)$ est aussi près de l que l'on veut (autrement dit dans un voisinage de l aussi petit que l'on veut), à condition de choisir x suffisamment près de a (autrement dit x doit être dans un voisinage suffisamment petit de a).*
2. *La définition de la limite précédente permet de dire qu'il y a équivalence entre écrire que $f(x)$ tend vers l et $f(x) - l$ tend vers 0 quand x tend vers a, autrement dit on a équivalence entre :*
   (*a*) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$,
   (*b*) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x) - l) = 0$,

(c) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} |f(x) - l| = 0.$

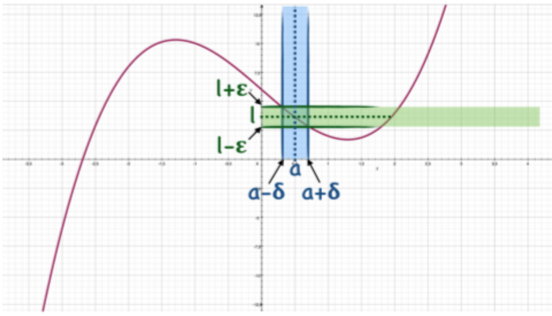


FIGURE 4.1 – Illustration de la définition de la limite finie au point a.

4.2 Limite infinie d'une fonction en un point

Définition 4.2. *Soit f une fonction définie au voisinage V du point $a \in \mathbb{R}$, sauf peut être en a. On dit que f admet la limite $+\infty$ en a, et on écrit $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V : \ |x - a| < \delta \implies f(x) > A.$$

Remarque. *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a, $f(x)$ devient très grand.*

Définition 4.3. *Soit f une fonction définie au voisinage V du point $a \in \mathbb{R}$, sauf peut être en a. On dit que f admet la limite $-\infty$ en a, et on écrit $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V : \ |x - a| < \delta \implies f(x) < -A.$$

Remarque.

- *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a, $f(x)$ devient très petit.*
- *Lorsqu'on est en présence d'une limite infinie ($\pm\infty$) en un point fini a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.*

4.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition 4.4. *(Limite finie à droite (resp. à gauche))*
On dit que f admet une limite à droite (resp. à gauche) en a, et on écrit $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = l$ (resp.

$\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = l$) *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : 0 < x - a < \delta(\textit{ resp. } 0 < a - x < \delta) \implies \left| f(x) - l \right| < \varepsilon.$$

Remarque. • *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a en étant plus grand (resp. plus petit) que a, $f(x)$ devient très proche de l.*

• *On a l'équivalence suivante :*

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = l.$$

Définition 4.5. *(Limite $+\infty$ à droite)*
On dit que f admet une limite $+\infty$ à droite en a et on écrit $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x : \ 0 < x - a < \delta \implies f(x) > A.$$

Remarque.
• *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a en étant plus grand que a, $f(x)$ devient très grand.*

• *On aurait de façon analogue :*

1. *La limite $+\infty$ à gauche s'obtient en remplaçant $0 < x - a < \delta$ par $-\delta < x - a < 0$ dans la définition précédente.*
2. *La limite $-\infty$ à droite s'obtient en remplaçant $f(x) > A$ par $f(x) < -A$ dans la définition précédente.*
3. *La limite $-\infty$ à gauche s'obtient en remplaçant $0 < x - a < \delta$ par $-\delta < x - a < 0$ et $f(x) > A$ par $f(x) < -A$ dans la définition précédente.*

4.4 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 4.6. *(Limite finie en $+\infty$)*
On dit que f admet une limite finie l en $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists B > 0, \ \forall x : x > B \implies \left| f(x) - l \right| < \varepsilon.$$

Remarque.

1. *Ceci se traduit par le fait que lorsque x devient très grand (tend vers $+\infty$), $f(x)$ devient très proche de l.*

2. *Si on remplace $x > B$ par $x < -B$, dans la définition précédente, on obtient la limite finie en $-\infty$ que l'on note $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = l$.*

Remarque. *Dans les deux cas précédents (limite finie l en $+\infty$ ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.*

Définition 4.7. *(Limite infinie en $+\infty$)*
On dit que f admet une limite $+\infty$ en $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x :\ x > B \implies f(x) > A.$$

Remarque.

1. *Ceci se traduit par le fait que lorsque x devient très grand (tend vers $+\infty$), $f(x)$ devient très grand.*
2. *Si l'on remplace $f(x) > A$ par $f(x) < -A$ dans la définition précédente on obtient la définition de la limite $-\infty$ en $+\infty$ que l'on note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.*
3. *Si l'on remplace $x > B$ par $x < -B$, on définit la limite $+\infty$ en $-\infty$ que l'on note $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.*
4. *Enfin, si l'on remplace $x > B$ par $x < -B$ et $f(x) > A$ par $f(x) < -A$, on définit alors la limite $-\infty$ en $-\infty$ que l'on note $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.*

4.5 Propriétés de la limite

4.5.1 Unicité de la limite

Théorème 4.8. *Si f possède une limite l au point a, cette limite est unique.*

Démonstration. Supposons que la fonction f définie dans un voisinage V de a (sauf peut être en a), admette deux limites l et l' au point a, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in V :\ |x - a| < \delta_1 \implies \left|f(x) - l\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x \in V :\ |x - a| < \delta_2 \implies \left|f(x) - l'\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte, en posant $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$,

$$\forall x \in V :\ 0 < |x - a| < \delta \implies |l - l'| < \left|f(x) - l\right| + \left|f(x) - l'\right| < \varepsilon \implies l = l',$$

car l, l' sont deux nombres fixes et $\varepsilon > 0$ est arbitraire. ∎

4.5.2 Limite et comparaison

Proposition 4.9. *Si f et g possèdent respectivement l_1 et l_2 comme limites en a, et s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, on a $f(x) \leq g(x)$ alors :*

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = l_1 \leq l_2 = \lim_{x \longrightarrow a} g(x).$$

De plus, si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$.

Si de plus $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = +\infty$.

Théorème 4.10. *(Théorème des gendarmes)*
Soient f, g et h trois fonctions, s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, on a :

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x),$$

et si de plus $\lim\limits_{x \longrightarrow a} h(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = l$, alors :

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = l.$$

4.6 Opérations algébriques sur les limites

Théorème 4.11. *Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I. On suppose que les limites $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = l_2$ existent, alors :*

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$;
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x) \times g(x)) = l_1 \times l_2$;
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda l_1, \ (\lambda \in \mathbb{R})$;
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} |f(x)| = |l_1|$;
5. *Si de plus* $l_2 \neq 0$, *alors* $\left[\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{l_1}{l_2}$.

D'autres cas peuvent se présenter si l'une des limites est infinie, on les résume dans les tableaux suivants :

$\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$	$\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)$	$\lim\limits_{x \longrightarrow a}(f(x) + g(x))$
l_1	l_2	$l_1 + l_2$
l_1	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	***Forme indéterminée***

$\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$	$\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)$	$\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)g(x))$
l_1	l_2	$l_1 l_2$
l_1	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	***Forme indéterminée***

$\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$	$\lim\limits_{x \longrightarrow a} (\lambda f(x))$
l_1	λl_1
∞	∞
0	0

$\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$	$\lim\limits_{x \longrightarrow a} \lvert f(x) \rvert$
l_1	$\lvert l_1 \rvert$
∞	$+\infty$

$\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$	$\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)$	$\lim\limits_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
l_1	$l_2 (\neq 0)$	$\frac{l_1}{l_2}$
l_1	∞	0
l_1	0	∞
0	∞	0
∞	0	∞
∞	∞	***Forme indéterminée***
0	0	***Forme indéterminée***

Remarque. *Les formes* $+\infty - \infty, 0 \times (\pm\infty), 0/0$ *et* ∞/∞ *sont indéterminées. Une étude plus approfondie doit être faite pour lever l'indétermination.*

4.7 Autre propriétés sur les limites :

4.7.1 Limite de fonctions composées

Théorème 4.12. *Soient* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $f(I) \subset J$. *Soit* a *un réel de* I *tel que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l_1$, *de plus si* $\lim\limits_{y \longrightarrow l_1} g(y) = l_2 = g(l_1)$ *existe, alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (g \circ f)(x) = l_2$.

Démonstration. En effet, $\lim\limits_{y\longrightarrow l_1} g(y) = g(l_1)$ signifie

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0, \forall y \neq l_1 : |y - l_1| < \delta_1 \Longrightarrow |g(y) - g(l_1)| < \varepsilon.$$

Si l'on prend $\varepsilon > 0$ arbitrairement, il existe pour $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ un $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l_1| < \delta,$$

d'où

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |g(f(x)) - g(l_1)| < \delta.$$

Ainsi

$$\lim_{x\longrightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x\longrightarrow a} f(x)) = g(l_1).$$

■

4.7.2 Limite et monotonie

Théorème 4.13. *Soit $f :]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors pour tout $a \in]\alpha,\beta[$, les limites $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)$ existent et on a*

$$\sup_{\alpha<x<a} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) = \inf_{a<x<\beta} f(x).$$

D'autre part, si $\alpha < a < b < \beta$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) \leq \lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x)$.

Remarque. *Il existe un résultat analogue pour les fonctions décroissantes, mais le sens des inégalités est inversé.*

Exemple 4.14. *(Limite de quelques fonctions usuelles)*

- *Soit $c \in \mathbb{R}$, si $f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est appelé la fonction constante, et on a pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = c.$$

- *Si $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, alors f est appelé la fonction identité, et on a pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = a, \lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- *Si $f(x) = |x|$ est la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, f est appelée la fonction valeur absolue, et on a pour tout $a \in \mathbb{R}$, :*

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = |a| \text{ et } \lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

• *Si $f(x) = E(x)$ est la fonction partie entière définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$, alors on a :*

$$\forall x \in [n, n+1[, n \in \mathbb{Z} : E(x) = n.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\lim_{x \longrightarrow n^+} E(x) = n \text{ et } \lim_{x \longrightarrow n^-} E(x) = n - 1.$$

4.8 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point, Notations de Landau

4.8.1 Fonctions négligeables et fonctions dominées

Définitions

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage V du point a, sauf peut-être, en a.

Définition 4.15. *On dit que f est négligeable devant g lorsque $x \longrightarrow a$ (ou tout simplement en a), et l'on écrit $f = o(g)$, si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in V :\ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

Définition 4.16. *On dit que f est dominée par g lorsque $x \longrightarrow a$ (ou en a), et l'on écrit $f = O(g)$, si :*

$$\exists k > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in V :\ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq k |g(x)|.$$

Les symboles o et O s'appellent notations de Landau.
Il résulte des définitions que si g ne s'annule pas dans un voisinage de a, alors

$$f = o(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

$f = O(g) \Longleftrightarrow$ le rapport $|\frac{f}{g}|$ est borné dans un voisinage de a privé du point a (voisinage pointé de a).

Définition 4.17. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a, +\infty[$. On posera par définition*

$$f = o(g) \text{ lorsque } x \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I :\ x > \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

$$f = O(g) \text{ lorsque } x \longrightarrow +\infty \iff \exists k > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I :\ x > \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq k|g(x)|.$$

De façon analogue, on définit les relations $f = o(g)$ et $f = O(g)$ pour $x \longrightarrow -\infty$, on remplace l'intervalle $]a, +\infty[$ par $]-\infty, a[$ et $x > \delta$ par $x < -\delta$.

Exemple 4.18. *Pour $x \longrightarrow 0$, on a :*

$$x^2 = o(x), \qquad x \tan x = O(x^2),$$
$$\frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x^4}), \qquad x^2 \sin\frac{1}{x} + x^3 = o(\tan x).$$

Pour $x \longrightarrow +\infty$, on a :

$$x^2 = o(x^3), \qquad x \tan x = O(x),$$
$$\frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x}), \qquad x^2 \sin\frac{1}{x} + x^3 = o(x^4).$$

Propriétés

Théorème 4.19.

$$f = o(g) \iff f = gh,\ h = o(1)(\text{ ou plus simplement}) \ o(g) = g.o(1);$$

$$f = O(g) \iff f = gh,\ h = O(1)(\text{ ou plus simplement}) \ O(g) = g.O(1).$$

Corollaire 4.20.

$$f = o(g) \iff f = g.o(h);$$

$$f = O(g) \iff f = g.O(h).$$

Exemple 4.21.

$$\frac{1}{x^2}.o(x^3) = o(x),\ x^2.O(x^2) = O(1).$$

4.8.2 Fonctions équivalentes

Définition 4.22. *Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a, sauf peut-être, en a. On dit que f est équivalente à g lorsque $x \longrightarrow a$ (ou en a), et l'on note $f \sim g$ si :*

$$f - g = o(f) \text{ lorsque } x \longrightarrow a.$$

Remarquons que

$$f - g = o(f) \iff f - g = o(g).$$

Proposition 4.23.

- *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence entre les fonctions définies au voisinage d'un point a.*
- *Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ en a, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$*
- *Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ en a, si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ existe, alors il en est de même de $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$ et les deux limites sont égales.*
- *En général, $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ n'entraîne pas que $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.*
- *Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = l$ et si $l \in \mathbb{R}^*$, alors $f \sim g$.*
- *Si $f \sim g$ et si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$.*
- *Si $f \sim g$, alors $f(x)$ et $g(x)$ sont du même signe au voisinage du point a.*

Remarque. *S'il existe un voisinage V de a tel que f et g ne s'annulent pas dans $V \backslash \{a\}$, alors*

$$f \sim g \text{ en } a \iff \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 4.24. *Pour $x \longrightarrow 0$, on a :*

$$\sin x \sim x \sim \tan x, \; \ln(1+x) \sim x,$$

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, \; 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Pour $x \longrightarrow +\infty$, on a :

$$\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \sim \tan \frac{1}{x}, \; a_0 + a_1 + ... + a_n x^n \sim a_n x^n \text{ si } a_n \neq 0.$$

4.9 Exercices

Exercice 4.1. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$,
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$,
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$,
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$,
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$,
6. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$,
7. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sin x \ln x$,
8. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(e^x + 2x)}{x}$,
9 $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sin \dfrac{1}{x^2+1} \ln(1+x^2)$,
10 $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$,
11. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x}$,
12. $\lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x$.

Exercice 4.2. *Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Posons : $h(x) = f(x)g(x)$, soit $a \in \mathbb{R}$.*

- *Montrer que si g est bornée au voisinage de a et f tend vers 0 quand x tend vers a, alors h tend vers 0 quand x tend vers a.*

Exercice 4.3. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$ 2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ 3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{(x+h)^n-h^n}{x}, h\in\mathbb{R}$,

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right)$ *avec* $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, 5. $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x-\cos x}$ 6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$,

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sin x\left[x-E\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ 8. $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}}{\sin\frac{1}{x}}$, 9. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} x^2\sin\frac{1}{x}$,

10 $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}$ 11. $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^4+1}{\cot\frac{1}{x}}$ 12. $\lim\limits_{x\longrightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Exercice 4.4. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$, 2. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+1}$, 3. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{x}$.

On donne :

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad et \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=0.$$

Exercice 4.5. *Montrer par définition que :*

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} x^2+1=2$, 2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} x^2=1$,

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x^2}=+\infty$, 4. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{2}{x^2+x+1}=0$,

5. $\lim\limits_{\substack{<\\ x\longrightarrow 0}} \frac{1}{x^3}=-\infty$, 6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} x^2-9=0$.

Exercice 4.6.

1. *Montrer par définition que :*

   1. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2+x+1}{1-x}=1$, 2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1}=+\infty$, 3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}(x^2-x)+1=3$,

   4. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}=0$, 5. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} e^x=+\infty$.

2. *Les fonctions* $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos\frac{1}{x}$ *possèdent-elles une limite au voisinage de* $+\infty$ *et* 0 *? (Justifier).*

Chapitre 5

Continuité des fonctions

Nous allons voir dans ce chapitre comment formaliser mathématiquement la notion de continuité. Le long de ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point, a un point de I et f une fonction définie sur I.

5.1 Définitions

5.1.1 Fonctions continues en un point

Commençons par donner la définition de la continuité d'une fonction en un point que l'on appelle "caractérisation de Weierstrass").

Définition 5.1. *(Caractérisation de Weierstrass)*
La fonction f est dite continue en a si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un autre réel $\delta > 0$ (qui dépend du choix de ε) tel que pour tout x de I

$$\text{si } |x-a| < \delta \text{ alors } \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$

Remarque.

1. *Le réel δ dépend à la fois de ε que l'on va choisir, mais également du point a. Il peut être différent suivant le point a que l'on étudiera.*

La définition précédente peut se caractériser de la façon suivante en termes de limites :

Définition 5.2. *(Continuité et limite)*
On dit que la fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

De façon similaire, on utilisera la limite à gauche pour parler de continuité à gauche et de la limite à droite pour parler de continuité à droite.

Définition 5.3. *(Continuité à gauche et à droite)*

1. *La fonction f est dite continue à gauche de a si $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : 0 \leq a - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

2. *La fonction f est dite continue à droite de a si $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : 0 \leq x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Évidement, la continuité de f à droite et à gauche en a entraîne la continuité de f en a.

5.1.2 Fonctions continues sur un intervalle

Définition 5.4. *On dit que la fonction f définie sur l'intervalle I est continue sur I si elle est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur I se note* $\mathrm{C}(I)$.

Remarque. *En d'autres termes, dire qu'une fonction est continue sur I signifie que dans cet intervalle sa courbe représentative ne présente pas de sauts.*

Exemple 5.5. *Les fonctions suivantes sont continues sur leurs domaines de définition :*

1. *La fonction constante $x \longmapsto c$ $(a \in \mathbb{R})$, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.*
2. *La fonction identité $x \longmapsto x$, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.*
3. *La fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.*
4. *La fonction puissance entière $x \longmapsto x^n$ définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ si $n \geq 0$, ou définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ si $n \leq 0$.*
5. *La fonction racine $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ n-ième définie $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+$ si n est pair, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ si n est impair.*
6. *La puissance rationnelle $x \longmapsto x^{\frac{p}{q}}$ $(p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*)$ où $\dfrac{p}{q}$ est irréductible définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$*

7. *La fonction homographique définie par* $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ *sur* $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{\frac{-d}{c}\}$.
8. *La fonction logarithme népérien* $x \longmapsto \ln x$, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.
9. *La fonction exponentielle* $x \longmapsto e^x$, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
10. *Les fonctions circulaires définies sur* $\mathbb{R}$ *pour sinus et cosinus,* $\mathbb{R} \backslash \{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ *pour tangente, et* $\mathbb{R} \backslash \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *pour cotangente.*
11. *Les fonctions hyperboliques* sinh, cosh *et* tanh *sont définies sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^*$ *pour la fonction* coth .

5.2 Opérations sur les fonctions continues

5.2.1 Opérations algébriques

Comme pour les limites, nous pouvons énoncer quelques propriétés de continuité qui peuvent conserver des opérations sur les fonctions.

Propriétés 5.6. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies de* I *dans* $\mathbb{R}$. *Supposons que* f *et* g *sont continues en* $a \in \mathbb{R}$. *On a alors les propriétés suivantes :*

1. *La fonction* $f + g$ *est continue en* a, *et on a* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f + g)(x) = f(a) + g(a)$.
2. *Pour tout réel* λ, *la fonction* λf *est continue en* a, *et on a :* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (\lambda f)(x) = \lambda f(a)$.
3. *La fonction* fg *est continue en* a, *et on a* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (fg)(x) = f(a)g(a)$.
4. *La fonction* $|f|$ *est continue en* a, *et on a* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} |f(x)| = |f(a)|$.
5. *Si* $g(a) \neq 0$, *la fonction* $\dfrac{f}{g}$ *est continue en* a, *et on a :* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(a)}{g(a)}$.

Exemple 5.7.

1. *La fonction polynôme est continue sur* $\mathbb{R}$,
2. *Toute fonction rationnelle* f *définie pour tout* x *dans l'intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *où* P *et* Q *sont des polynômes définis sur* I *avec* $Q(x) \neq 0$ *sur* I, *est continue sur* I.

5.2.2 Continuité de la fonction composée

Théorème 5.8. *Soient* $f : I \longrightarrow J$ *et* $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions avec* I *et* J *sont des intervalles quelconques de* $\mathbb{R}$. *Supposons que* f *soit continue en* $a \in I$, *et que* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a) = l$ *(où* $l \in J$*).*

Si g est continue en $l = f(a)$, alors la fonction composée $(g \circ f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en a, et on a :

$$\lim_{x \longrightarrow a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) = g(l).$$

Démonstration. Soit f continue en $a \in I$ et soit g définie sur un intervalle J contenant la point $l = f(a)$ et continue au point l.
La continuité de g s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall y \in I : |y - l| < \delta_1 \Longrightarrow |g(y) - g(l)| < \varepsilon,$$

tant que f est continue en a, on peut associer à ce nombre δ_1 un nombre $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| = |y - l| < \delta_1,$$

comme $x \in I \Longrightarrow f(x) \in J$, il en résulte

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - a| < \delta \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon,$$

et par suite, $g \circ f$ est continue en a. ■

5.2.3 Prolongement par continuité

Proposition 5.9. *Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$. On suppose de plus que f admet une limite finie l en a. Alors la fonction $\widetilde{f}$ définie pour tout x de I (autrement dit le domaine de définition de f auquel on a ajouté le point a), par :*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \;\; x \neq a, \\ l & si \;\; x = a, \end{cases}$$

est continue en a.
On dit que $\widetilde{f}$ constitue le prolongement par continuité de f en a.

Exemple 5.10. *Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
La fonction f admet un prolongement par continuité en 0 et on a :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si \;\; x \neq 0, \\ 1 & si \;\; x = 0. \end{cases}$$

Exemple 5.11. *Soit la fonction $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a :*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \; et \; \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = -1$$

, donc cette fonction n'admet pas un prolongement par continuité au point 0.

5.3 Théorèmes sur la continuité

Nous introduisons dans cette section les théorèmes fondamentaux sur la continuité auxquels vous ne pourrez pas échapper.

Théorème 5.12. *(Théorème de Bolzano)*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$. *Si* $f(a)$ *et* $f(b)$ *sont tels que* $f(a)f(b) < 0$, *alors il existe au moins* $c \in]a,b[$ *tel que* $f(c) = 0$.

Théorème 5.13. *(Théorème des valeurs intermédiaires)*
Soit f *une fonction définie sur* I *un intervalle quelconque de* $\mathbb{R}$. *Soient* a *et* b *deux réels de* I. *Alors tout réel* k *compris strictement entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *possède au moins un antécédent* c *par la fonction* f.
En d'autres termes, pour tout a *et* b *réels de* I *tels que* $a < b$,

$$\text{si } k \in]f(a), f(b)[\text{ alors il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f(c) = k.$$

Démonstration. Supposons que $f(a) < f(b)$. Soit donc k tel que $f(a) < k < f(b)$. Considérons la fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - k$. Il est clair que g vérifie toutes les hypothèses du théorème précédent (Théorème de Bolzano), alors il existe au moins $c \in]a,b[$ tel que $g(c) = 0$. Ce qui achève la preuve. ■

Théorème 5.14. *(Théorème de Weierstrass (bornes atteintes))*
Soit f *une fonction définie et continue sur un segment* $[a,b]$ *de* I *(autrement dit sur un intervalle fermé et borné de* I*). Alors il existe deux réels* c_1 *et* c_2 *dans* $[a,b]$ *tels que pour tout* x *dans* $[a,b]$, *on a :*

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$

Remarque. *Ce théorème signifie que si* f *est continue sur un intervalle fermé borné, alors* f *est aussi bornée et atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

Corollaire 5.15. *Pour tous réels* a *et* b *avec* $a < b$ *et* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue, alors* $f([a,b])$ *est un segment, i.e., l'image d'un intervalle est un intervalle..*

Démonstration. Soit $y_1, y_2 \in f(I), y_1 < y_2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout $y,\ y_1 < y < y_2$, est une valeur de f. Il en résulte que le segment $[y_1, y_2]$ est inclus dans $f(I)$, donc $f(I)$ est un intervalle. Ce qui termine la démonstration. ■

5.4 Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle

Proposition 5.16. *(Continuité et monotonie)*
Si f est une fonction monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f(I)$ (l'image par f de I) soit également un intervalle, alors f est continue sur I.

Remarque. *Attention, il faut que la fonction soit monotone pour avoir le résultat. En général, si l'image par une fonction f d'un intervalle est un intervalle, alors f n'est pas forcément continue.*

Exemple 5.17. *Si l'on considère la fonction suivante*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ k & si \quad x = 0. \end{cases} \end{array}$$

avec $k \in [-1, 1]$.
Alors f n'est pas continue en 0 et pourtant pour tout intervalle I contenant 0, on a $f(I) = [-1, 1]$.

Proposition 5.18. *(Monotonie et injectivité)*
Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective.

Remarque. *Pour avoir la réciproque, nous sommes obligés de supposer la continuité de f, sinon cela ne marche pas.*

Théorème 5.19. *(Continuité et injectivité)*
Si la fonction f est injective et continue sur I, alors elle est nécessairement strictement monotone.

Remarque. *Une fonction injective et non continue n'est pas forcément monotone. On peut par exemple considérer une fonction f continue par morceaux donc sur chaque morceau f est soit strictement croissante soit strictement décroissante.*

Théorème 5.20. *(Théorème de la fonction réciproque)*
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors f est bijective et sa fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur $f(I)$.

Démonstration. D'après la proposition précédente f est strictement monotone donc elle est injective, d'où l'existence de f^{-1}. Reste à démontrer la continuité de f^{-1}. En effet, f étant continue, $f(I)$ est un intervalle. D'autre part, comme f est strictement monotone,

f^{-1} l'est aussi (elles ont le même sens de variation). Par conséquent, f^{-1} est continue d'après la proposition 5.16 car $f^{-1}(f(I)) = I$ est un intervalle. Donc le théorème est démontré. ∎

5.5 Exercices

Exercice 5.1. *Étudier la continuité des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & si\ x \neq 2, \\ 3 & si\ x = 2. \end{cases}$,
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4 + 2x^3 x^2}}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} & si\ x \neq -1, \\ \frac{1}{3} & si\ x = -1. \end{cases}$

Exercice 5.2. *Etudier la continuité des fonctions suivantes au point* $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Exercice 5.3. *Etudier le prolongement par continuité des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \dfrac{1 - \cos\sqrt{|x|}}{|x|}$.
2. $g(x) = \cos \dfrac{1}{x}$.
3. $h(x) = \sin(x + 1) \ln|x + 1|$.
4. $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.
5. $g(x) = \dfrac{a^x - 1}{x}$.

Exercice 5.4. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues définies de* $[0, 1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

$$f(1) = g(0) = 1,\ et\ f(0) = g(1) = 0.$$

• *Montrer que :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in]0, 1[: g(x) = \lambda f(x).$$

Chapitre 6

Fonctions réciproques

6.1 Existence et propriétés

Proposition 6.1. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $f : I \longrightarrow J$ est une fonction bijective, alors il existe une unique fonction $g : J \longrightarrow I$ telle que $g \circ f = I_I$ et $f \circ g = I_J$. La fonction g est la bijection réciproque de f est se note f^{-1}.*

Remarque.

- *Rappelons que dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*
- *Si f est une fonction paire (resp. impaire), alors sa fonction réciproque f^{-1} est une fonction paire (resp. impaire).*

Le théorème suivant est très utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème 6.2. *(Théorème d'existence)*
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors la fonction f réalise une bijection de I sur $f(I)$. La fonction récirpoque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue, strictement monotone et varie dans le même sens que f.

Démonstration. Puisque f est strictement monotone, elle est aussi injective et réalise une bijection de I sur $f(I)$. Supposons que f est strictement croissante. Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ et soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Alors $f(x_1) < f(x_2)$, ce qui implique que $x_1 < x_2$ puisque f est strictement croissante. Ce qui est équivalent à $f^{-1}(y_1) <$

$f^{-1}(y_2)$. D'où f^{-1} est strictement croissante. On vérifie de même que f^{-1} est strictement décroissante si f l'est. Il reste à prouver la continuité de f^{-1}. Notons d'abord que $f(I)$ est un intervalle (car f est continue). D'autre part, $f^{-1}(f(I)) = I$ est un intervalle et f^{-1} est monotone, donc d'après le théorème précédent, f^{-1} est continue. ■

Remarque. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective.*
Pour déterminer la fonction réciproque de f

1. *Résoudre l'équation $y = f(x)$ où l'inconnue est x, on obtient alors $x = g(y)$.*
2. *La fonction réciproque de f est la fonction $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ définie par*

$$f^{-1}(x) = g(x), \forall x \in f(I).$$

Exemple 6.3. *Soit $f(x) = x^2$ pour à valeurs dans $]0, +\infty[$. Pour déterminer sa fonction réciproque, on résout l'équation $y = x^2,\ x > 0$, où l'inconnue est x, on obtient*

$$x = \sqrt{y},\ y > 0.$$

Ainsi, la fonction réciproque est la fonction racine carrée $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 6.4. *Déterminer la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 4x + 1$.*
On résout l'équation $y = 4x + 1$ où l'inconnue est $x \in \mathbb{R}$. On trouve

$$x = \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4},\ x \in \mathbb{R}$.

6.2 Fonctions trigonométriques réciproques

Notons tout de suite que les fonctions trigonométriques ne sont pas injectives sur $\mathbb{R}$. Afin de déterminer leurs fonctions réciproques, on part d'intervalles, les plus grands possibles, sur lesquels elles sont strictement monotones.

6.2.1 Fonction arcsinus

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de la fonction sin à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sur cet intervalle, la fonction sin est continue et strictement croissante. Donc elle est bijective. Par conséquent, elle admet une fonction réciproque qu'on appelle arcsinus et qu'on note arcsin, ainsi :

$$\begin{aligned} \arcsin \ : [-1,1] &\longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ x &\longmapsto \arcsin x = y. \end{aligned}$$

Remarque. *Les propriétés fondamentales de cette nouvelle fonction sont :*

1. *Le domaine de définition de* arcsin *est* $[-1,1]$.
2. *Le domaine image de* arcsin *est* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
3. $\sin(\arcsin x) = x$ *pour tout* $x \in [-1,1]$.
4. $\arcsin(\sin x) = x$ *pour tout* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
5. *La fonction* arcsin *est continue et strictement croissante sur* $[-1,1]$.

Calcul de $\arcsin \alpha$

Le calcul de $\arcsin \alpha$ est la recherche de l'angle θ tel que $\alpha = \sin\theta$, où $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exemple 6.5. *Pour calculer* $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

On voit que $\frac{3\pi}{4} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Ainsi, on a besoin de trouver un nombre* x *dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *tel que* $\sin x = \sin\frac{3\pi}{4}$.
On utilise la formule suivante (elle est facile à montrer)

$$\sin(\pi - x) = \sin(x),$$

et donc si on prend $x = \frac{\pi}{4}$, *on obtient* $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$.

D'où

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exemple 6.6. *Soit* $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$. *Déterminer le domaine de définition et le domaine image de* f.

On a

– *La fonction* f *est définie pour les réels* x *vérifiant* $-1 \leq x^2 - 1 \leq 1$, *soit* $0 \leq x^2 \leq 2$, *donc le domaine de définition de la fonction* f *est :*

$$\mathscr{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\right\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

– *Par ailleurs, il est facile de vérifier que quand x varie dans* $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $x^2 - 1$ *prend toutes les valeurs entre* -1 *et* 1, *c'est-à-dire le domaine de* arcsin. *Ainsi, le domaine image de* $\arcsin(x^2 - 1)$ *est le même que celui de* $\arcsin x$, *qui est* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *D'où*

$$Imf = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Graphe de la fonction arcsin

La courbe de arcsin s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de sin.

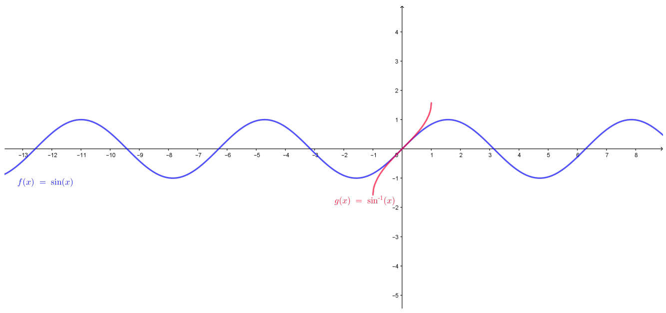


FIGURE 6.1 – Représentation graphique de la fonction arcsin

Remarque. *La fonction* arcsin *admet des asymptotes en* $x = \pm 1$.

6.2.2 Fonction arccosinus

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle la fonction cos est continue et strictement décroissante, elle est donc bijective. Par conséquent elle admet une fonction réciproque qu'on appelle arccosinus et qu'on note arccos, ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \arccos \ : [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x = y. \end{array}$$

Remarque. *Les propriétés fondamentales de cette nouvelle fonction sont :*

1. *Le domaine de définition de* arccos *est* $[-1, 1]$.
2. *Le domaine image de* arccos *est* $[0, \pi]$.

3. $\cos(\arccos x) = x$ *pour tout* $x \in [-1, 1]$.

4. $\arccos(\cos x) = x$ *pour tout* $x \in [0, \pi]$.

5. *La fonction* $\arccos$ *est continue et strictement décroissante sur* $[-1, 1]$.

Exemple 6.7. *Déterminer le domaine de définition et le domaine image de la fonction* $f(x) = \arccos(1 - 2x)$.

Notons que la fonction f *est définie pour tout* x *tel que* $-1 \leq 1 - 2x \leq 1$, *c'est-à-dire, quand* $1 - 2x$ *est dans le domaine de* $\arccos$. *En résolvant cette inéquation on déduit que* $0 \leq x \leq 1$. *D'où*

$$\mathscr{D}_f = [0, 1].$$

Par ailleurs, quand x *varie dans l'intervalle* $[0, 1]$, $1 - 2x$ *prend toute les valeurs de* $[-1, 1]$. *Ainsi,*

$$Imf = [0, \pi].$$

Calcul de $\arccos \alpha$

Le calcul de $\arccos \alpha$ *est la recherche de l'angle* θ *tel que* $\alpha = \cos \theta$, *où* $\theta \in [0, \pi]$.

Exemple 6.8. *Calculer* $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
On est tenté de dire que la réponse est $-\frac{\pi}{4}$ *ce qui est faut car* $-\frac{\pi}{4} \notin [0, \pi]$. *Ainsi, on a besoin de trouver un nombre* x *dans* $[0, \pi]$ *tel que* $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. *Comme* $\cos x$ *est une fonction paire on a* $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. *Ainsi,*

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Graphe de la fonction $\arccos$

La courbe de arccos s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de $\cos$.

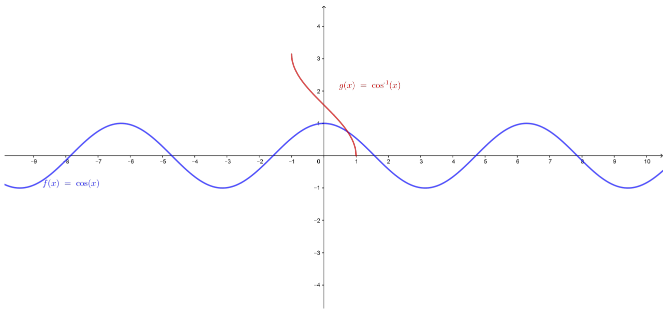


FIGURE 6.2 – Représentation graphique de la fonction arccos

Remarque. *La fonction* arccos *admet des asymptotes en* $x = \pm 1$.

6.2.3 Fonction arctangente

Comme vous pouvez le constater, l'ensemble image de la fonction tangente, qu'on note tan, est $\mathbb{R}$ et cette fonction est bijective sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (car continue et croissante). La restriction de la fonction tan à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ admet une fonction réciproque qu'on appelle arctangente et qu'on note arctan, ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \arctan x = y. \end{array}$$

Remarque. *Les propriétés de cette fonction sont :*

1. *Le domaine de définition de* arctan *est* $\mathbb{R}$.
2. *Le domaine image de* arctan *est* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. $\tan(\arctan x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
4. $\arctan(\tan x) = x$ *pour tout* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
5. *La fonction* arctan *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Calcul de $\arctan \alpha$

Le calcul de $\arctan \alpha$ est la recherche de l'angle θ tel que $\alpha = \tan\theta$, où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exemple 6.9. *Calculer* $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

Attention $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ *n'est pas égale à* $\frac{5\pi}{4}$ *car* $\frac{5\pi}{4} \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. *Sachant que* $\tan x$ *est périodique de période* π, *on a alors,* $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, *donc*

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Graphe de la fonction arctan

La courbe de arctan s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de tan.

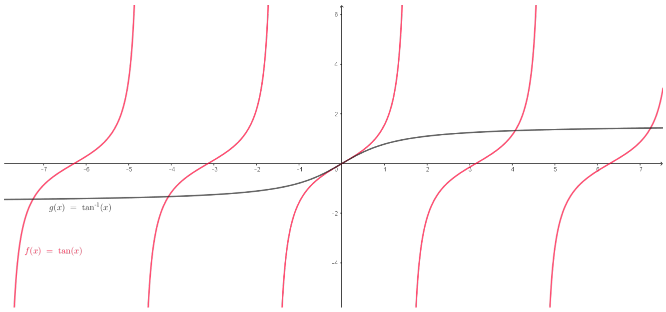


FIGURE 6.3 – Représentation graphique de la fonction $arc\tan$

6.2.4 Fonction arccotangente

Notons que la fonction cotangente n'est pas bijective sur son domaine de définition, mais que sa restriction à l'intervalle $]0, \pi[$ l'est (continue et strictement décroissante). Ainsi, la restriction de la fonction cot à $]0, \pi[$ admet une fonction réciproque qu'on appelle arccotangente et qu'on note $arc\cot$. On a donc :

$$\begin{array}{rccc} arc\cot & : \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, \pi[\\ & x & \longmapsto & arc\cot x = y. \end{array}$$

Remarque. *Les propriétés fondamentales de cette nouvelle fonction sont :*

1. *Le domaine de définition de* $arc\cot$ *est* $\mathbb{R}$.
2. *Le domaine image de* $arc\cot$ *est* $]0, \pi[$.
3. $\cot(arc\cot x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
4. $arc\cot(\cot x) = x$ *pour tout* $x \in]0, \pi[$.
5. *La fonction* $arc\cot$ *est continue et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$.

Calcul de $arc\cot\alpha$ **:** Le calcul de $arccot\alpha$ est la recherche de l'angle θ tel que $\alpha = \cot\theta$, où $\theta \in]0, \pi[$.

Exemple 6.10. *Calculer* $arc\cot\left(\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Comme précédemment, on doit trouver un angle θ dans l'ensemble image de arc cot *tel que* cot = $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. *Comme* $\cot x$ *est périodique de période* π, *on a* $\cot\frac{3\pi}{4} = \cot\frac{-\pi}{4}$. *Par conséquent,*

$$arc\cot\left(\cot\frac{-\pi}{4}\right) = arc\cot\left(\cot\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Graphe de la fonction *arccot*

La courbe de *arc* cot s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de cot.

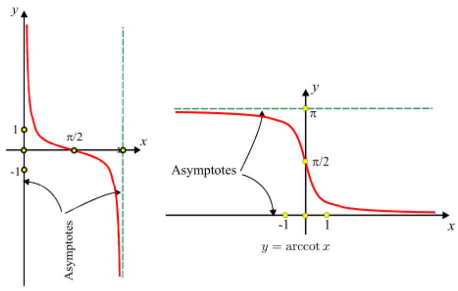


FIGURE 6.4 – Représentation graphique de la fonction *arc* cot

6.2.5 Fonctions trigonométriques (Propriétés trigonométriques)

$$\begin{aligned}
\cos^2 a + \sin^2 a &= 1\\
\cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b\\
\sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b\\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}\\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}\\
\cos 2a &= 2 \cdot \cos^2 a - 1\\
&= 1 - 2 \cdot \sin^2 a\\
&= \cos^2 a - \sin^2 a\\
\sin 2a &= 2 \cdot \sin a \cdot \cos a\\
\tan 2a &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}\\
\cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]\\
\sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]\\
\sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]\\
\cos p + \cos q &= 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}\\
\cos p - \cos q &= -2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}\\
\sin p + \sin q &= 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}\\
\sin p - \sin q &= 2 \cdot \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

6.3 Fonctions hyperboliques

6.3.1 Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

L'identité d'Euler est définie par :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'après cette relation, on a :

$$\cos x = \Re(e^{ix}) \ et \ \sin x = \Im(e^{ix}),$$

où $\Re$ et $\Im$ désigne la partie réelle et imaginaire de la fonction e^{ix}.

En outre, toujours grâce à l'identité d'Euler, on a :

$$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x),$$

et donc e^{-ix} est le conjugué de e^{ix}. Ceci permet de dire :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad i\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Si on remplace x par ix dans les formules précédentes avec $i^2 = -1$, on obtient :

$$\cos(ix) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad i\sin(ix) = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Les deux fonctions $x \longmapsto \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ et $x \longmapsto \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ s'appellent cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique respectivement, avec la notation

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On observe tout d'abord que :

$$\cosh(-x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc le cosinus hyperbolique est une fonction paire, tandis que sinus hyperbolique est impaire.

Lemme 6.11. *(Monotonie). La fonction cosinus hyperbolique est strictement croissante sur* $[0, +\infty[$, *tandis que la fonction sinus hyperbolique est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Comme $x \longmapsto \cosh x$ est une fonction paire qui est strictement croissante pour $x \geq 0$, alors elle est strictement décroissante pour $x \leq 0$. Ceci implique que $\cosh x \geq \cosh 0 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Comme on a aussi $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \cosh x = +\infty$, et que le cosinus hyperbolique est une fonction continue, on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} \cosh & : [0, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \cosh x = y, \end{array}$$

est une fonction bijective.

Par contre, comme la fonction sinus hyperbolique est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \sinh x = +\infty \; et \; \lim_{x \longrightarrow -\infty} \sinh x = -\infty,$$

donc

$$\begin{array}{rrcl} \sinh & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sinh x = y, \end{array}$$

est une fonction bijective.

6.3.2 Fonctions tangente et cotangente hyperboliques

On définit aussi la tangente (resp. la cotangente) hyperbolique de $x \in \mathbb{R}$ (resp. $x \in \mathbb{R}^*$) comme suit :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

C'est immédiat à voir que :

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = -\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\coth(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = -\frac{\cosh x}{\sinh x} = -\coth x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Donc les fonctions tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique sont des fonctions impaires.

Lemme 6.12. *La fonction tangente (resp. cotangente) hyperbolique est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^*$). En outre, on a*

$$-1 < \tanh(x) < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \textit{et} \ |\coth(x)| > 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

6.4 Fonctions hyperboliques réciproques

6.4.1 Argument cosinus hyperbolique.

On a vu que si on considère la restriction du cosinus hyperbolique sur $[0; +\infty[$, alors la fonction cosinus hyperbolique devient bijective et donc elle admet l'application réciproque, qui s'appelle argument cosinus hyperbolique. Il s'agit de la fonction

$$\begin{array}{rccc} argcosh & : [0, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & argcoshx. \end{array}$$

Remarque. *Par définition de fonction réciproque, on a les propriétés suivantes :*

- $\arg\cosh(\cosh x) = x,$ *pour tout* $x \geq 0.$
- $\cosh(\arg\cosh x) = x,$ *pour tout* $x \geq 1.$

Expression logarithmique de la fonction *argcosh*

Pour cela, pour tout $y \geq 1$ il nous suffit de résoudre (par rapport à x) l'équation suivante, $\cosh x = y$, parmi les $x \geq 0$.
En revenant à la définition de $\cosh x$, ceci est équivalent à chercher $x \geq 0$ tel que :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y.$$

On observe que

$$\begin{aligned}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y &\Longleftrightarrow \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = y \\ &\Longleftrightarrow e^{2x} + 1 = 2ye^x \\ &\Longleftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.\end{aligned}$$

Au fin de résoudre la dernière équation, on pose $A = e^x$ et celle-ci devient :

$$A^2 - 2yA + 1 = 0.$$

Les solutions sont :

$$A_1 = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad et \quad A_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}.$$

Maintenant on se souvient qu'on avait posé $A = e^x$ et qu'on avait la condition $x \geq 0$, donc la seule solution qui est la bonne pour nous est celle telle que $A \geq e^0 = 1$. Finalement, cela veut dire :

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

et donc

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

On peut donc en conclure que :

$$arg \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \ \forall x \geq 1.$$

Graphe de la fonction *argcosh*

La courbe de *arg* cosh s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de cosh .

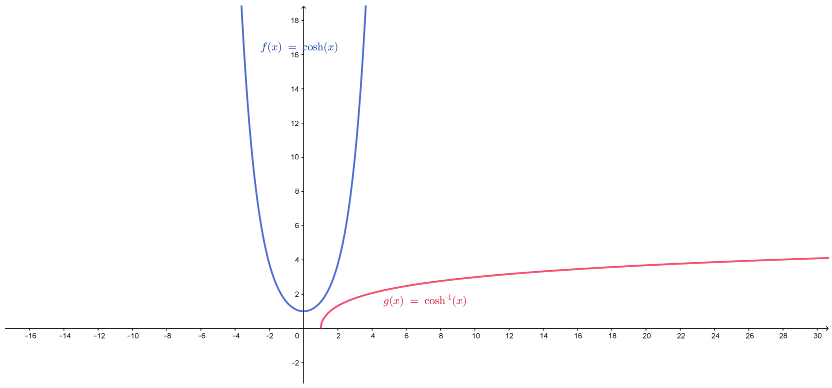


FIGURE 6.5 – Représentation graphique de la fonction *argcosh*.

6.4.2 Argument sinus hyperbolique

On a vu que la fonction sinh : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est bijective. Donc elle admet la fonction réciproque, qui s'appelle argument sinus hyperbolique. Il s'agit de la fonction :

$$\begin{array}{rccc} argsinh & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & argsinhx = y. \end{array}$$

Remarque. *Comme d'habitude, on a les propriétés suivantes :*

- $\arg\sinh(\sinh x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\sinh(\arg\sinh x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Expression logarithmique de la fonction *argsinh*

À nouveau, on peut donner une forme explicite de la fonction $argsinhy$, en terme de fonctions usuelles. Pour cela, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il nous suffit de résoudre (par rapport à x) l'équation $\sinh x = y$. En revenant à la définition de $\sinh x$, ceci est équivalent à :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y.$$

On observe que

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y &\Longleftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = y \\ &\Longleftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \\ &\Longleftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Comme avant, on pose $A = e^x$ et l'équation précédente devient

$$A^2 - 2yA - 1 = 0,$$

dont les solutions sont

$$A_1 = y + \sqrt{y^2+1} \quad et \quad A_2 = y - \sqrt{y^2+1}.$$

Du fait que $A = e^x$ qui est toujours une quantité positive, donc la seule solution qui est la bonne pour nous est celle telle que $A \geq 0$. Comme on a

$$y \leq |y| = \sqrt{y^2} < \sqrt{y^2+1},$$

ça veut dire qu'il faut choisir

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1},$$

et donc

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

On en peut donc conclure que :

$$arg\sinh x = \ln(y + \sqrt{x^2+1}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Graphe de la fonction *argsinh*

La courbe de arg sinh s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de sinh .

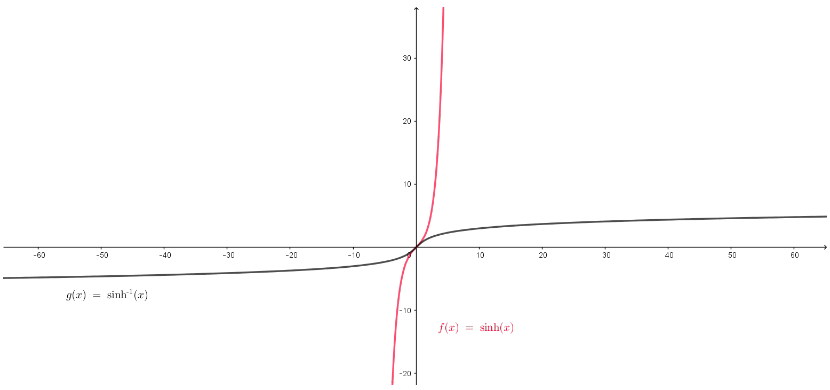


Figure 6.6 – Représentation graphique de la fonction *argsinh*.

6.4.3 Argument tangente hyperbolique

On a vu que la fonction

$$\tanh \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$$

$$x \longmapsto \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

est une fonction bijective, elle admet donc une fonction réciproque qu'on appelle argument tangente hyperbolique. Il s'agit de la fonction :

$$\begin{array}{rcl} argth \quad : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \arg\tanh x. \end{array}$$

Remarque. *Comme d'habitude, on a les propriétés suivantes :*

- $arg\tanh(\tanh x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\tanh(arg\tanh x) = x, \quad \forall x \in]-1,1[.$

Expression logarithmique de la fonction *arg* tanh

On peut donner une forme explicite de la fonction argtanh y, en terme de fonctions usuelles. Pour cela, pour tout $y \in]-1,1[$, il nous suffit de résoudre (par rapport à x) l'équation $\tanh x = y$.
En revenant à la définition de $\tanh x$, ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y &\Longleftrightarrow e^{2x}-1 = y(e^{2x}+1) \\ &\Longleftrightarrow e^{2x}(1-y) = (1+y) \\ &\Longleftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\ &\Longleftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

Donc l'expression logarithmique de la fonction *arg* tanh est définie par :

$$\arg\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad -1 < x < 1.$$

Graphe de la fonction *arg* tanh

La courbe de argtanh s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de tanh .

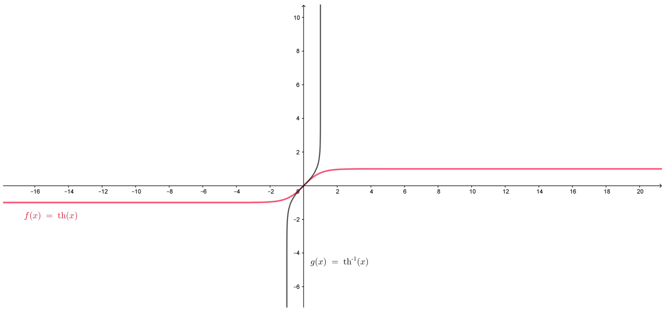


FIGURE 6.7 – Représentation graphique de la fonction $arg\tanh$.

6.4.4 Argument cotangente hyperbolique

Comme la fonction

$$\begin{array}{rcl} \coth \; : \; \mathbb{R}^* & \longrightarrow &]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}, \end{array}$$

est une fonction bijective, elle a donc fonction réciproque qu'on appelle argument cotangente hyperbolique. Il s'agit de la fonction :

$$\begin{array}{rcl} arg\coth \; :]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & arg\coth x. \end{array}$$

Remarque. *On a :*

- $arg\mathrm{coth}(\coth x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$
- $\coth(arg\coth x) = x, \qquad \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[.$

Expression logarithmique de la fonction argcoth

Donnons une forme explicite de la fonction $\mathrm{argcoth}\, y$, en terme de fonctions usuelles. Pour cela, pour tout $y \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, il nous suffit de résoudre (par rapport à x)

l'équation $\coth x = y$. Ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = y &\Longleftrightarrow e^{2x}+1 = y(e^{2x}-1)\\
&\Longleftrightarrow e^{2x}(y-1) = (1+y)\\
&\Longleftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{y-1}\\
&\Longleftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1+y}{y-1}\right)\\
&\Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{y-1}\right).
\end{aligned}$$

Ceci donne l'expression logarithmique de la fonction argcoth :

$$arg\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right), \quad \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[.$$

Graphe de la fonction *argcoth*

La courbe de argcoth s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de coth .

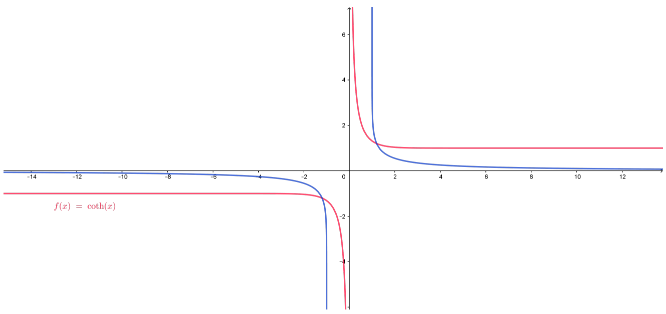


FIGURE 6.8 – Représentation de la fonction *argcoth*

6.4.5 Fonctions hyperboliques (Propriétés hyperboliques)

$$\begin{aligned}
\cosh^2 a - \sinh^2 a &= 1\\
\cosh(a+b) &= \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b\\
\cosh(a-b) &= \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b\\
\sinh(a+b) &= \sinh a \cdot \cosh b + \cosh a \cdot \sinh b\\
\sinh(a-b) &= \sinh a \cdot \cosh b - \cosh a \cdot \sinh b\\
\tanh(a+b) &= \frac{\tanh a + \tanh b}{1 - \tanh a \cdot \tanh b}\\
\tanh(a-b) &= \frac{\tanh a - \tanh b}{1 + \tanh a \cdot \tanh b}\\
\cosh 2a &= 2 \cdot \cosh^2 a - 1\\
&= 1 + 2 \cdot \sinh^2 a\\
&= \cosh^2 a + \sinh^2 a\\
\sinh 2a &= 2 \cdot \sinh a \cdot \cosh a\\
\tanh 2a &= \frac{2\tanh a}{1 + \tanh^2 a}\\
\cosh a \cdot \cosh b &= \frac{1}{2}\left[\cosh(a+b) + \cosh(a-b)\right]\\
\sinh a \cdot \sinh b &= \frac{1}{2}\left[\cosh(a+b) - \cosh(a-b)\right]\\
\sinh a \cdot \cosh b &= \frac{1}{2}\left[\sinh(a+b) + \sinh(a-b)\right]\\
\cosh p + \cosh q &= 2 \cdot \cosh \frac{p+q}{2} \cdot \cosh \frac{p-q}{2}\\
\cosh p - \cosh q &= 2 \cdot \sinh \frac{p+q}{2} \cdot \sinh \frac{p-q}{2}\\
\sinh p + \sinh q &= 2 \cdot \sinh \frac{p+q}{2} \cdot \cosh \frac{p-q}{2}\\
\sinh p - \sinh q &= 2 \cdot \sinh \frac{p-q}{2} \cdot \cosh \frac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

6.5 Exercices

Exercice 6.1. *Montrer les égalités suivantes :*

1. $\left(\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}\right)^n = \dfrac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.
2. $\tanh x = \dfrac{2}{\tanh(2x)} - \dfrac{1}{\tanh x}$, $\forall x > 0$.
3. $\sinh x = \dfrac{\tanh\ x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.2. *Trouver les valeurs réelles de x et y vérifiant :*

1. $\begin{cases} \cosh x + \cosh y = \dfrac{35}{12} \\ \sinh x + \sinh y = \dfrac{25}{12}. \end{cases}$
2. $\arcsin(\tan x) = x$.
3. $\arccos(\tan x) = \arcsin(1 - x)$.
4. $\mathit{arg}\cosh x = \mathit{arg}\sinh(2 - x)$.

Exercice 6.3. *Montrer que :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^* : \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \mathit{signe}(x)$.
2. $\forall x \in [-1, 1] : \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6.4. *Simplifier les expressions suivantes, où x est une variable réelle :*

$$\sinh(\mathit{arg}\cosh x),\ \cosh(\mathit{arg}\sinh x),\ \sin(\arccos x)\ \mathit{et}\ \cos(\arcsin x).$$

Exercice 6.5. *Résoudre les équations suivantes, d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$:

$$1)\ 7\cosh x + 2\sinh x = 9, \quad b)\ \sinh x - 4\sinh 2x + \sinh 3x = 0.$$

Première partie

Algèbre

Chapitre 7

Structures algébriques

7.1 Loi de composition interne :

Définition 7.1. *Soit E un ensemble non vide, on appelle loi de composition interne (ou opération binaire) sur E, toute application de $E \times E$ dans E qui à (x, y) associe une image qu'on note $x * y$.*

Les lois de compositions internes sont notées par : $\star,\ \triangle,\ \top,\ \square,\ \diamond,\ \oplus,\ \otimes,\ \odot,\ \bullet$,... .

Exemple 7.2. *L'addition usuelle + est une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.*
La multiplication usuelle $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
La soustraction usuelle $-$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{N}$.

Exemple 7.3.

1. *Pour $E = \mathbb{R}$ et $\star$ une loi définie par :*

$$\forall x, y \in E : x \star y = x^2 + y^2.$$

   On voit que $\star$ est une loi de composition interne puisque : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$.

2. *Pour $E = \mathbb{N}$ et $\top$ une loi définie par :*

$$\forall x, y \in E : x \top y = x - y.$$

   On voit que $\top$ n'est pas une loi de composition interne puisque : par exemple, pour $x = 3$ et $y = 4$ on a $x - y = 3 - 4 = -1 \notin \mathbb{N}$.

3. *Soit A un ensemble et $E = \mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A, alors l'intersection $\cap$ et l'union $\cup$ d'ensembles sont deux lois de compositions internes dans E car : $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$, on a*

– *$X \cap Y \subset X \subset A$ et $X \cap Y \subset Y \subset A$ donc*

$$\forall x,\ x \in (X \cap Y) \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \in Y) \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in A) \Rightarrow x \in A,$$

ce qui montre que $\cap$ est une loi interne dans $\mathcal{P}(A)$.

– *On a $X \cup Y \subset A$ puisque $(X \subset A)$ et $(Y \subset A)$, donc*

$$\forall x,\ x \in (X \cup Y) \Rightarrow (x \in X) \vee (x \in Y) \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in A) \Rightarrow x \in A,$$

ce qui implique que $\cup$ est une loi interne dans $\mathcal{P}(A)$.

Remarque. *Un ensemble non vide E muni d'une ou plusieurs lois de compositions internes notées $*_1, *_2, ..., *_n$, est notée $(E, *_1, *_2, ..., *_n)$.*

Exemple 7.4. $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, +, -), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathcal{L}(E, E), \circ)$ *et* $(\mathcal{P}(E); \cap)$.

7.1.1 Propriétés d'une loi de composition interne

Définition 7.5. *Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\star$, on dit que :*

1. *La loi $\star$ est associative, si pour tous $x, y, z \in E$, on a :$(x * y) * z = x * (y * z)$.*
2. *La loi $\star$ est commutative, si pour tous $x, y \in E$, on a : $x * y = y * x$.*
3. *e est un élément neutre à gauche (resp. à droite) de la loi $\star$ si pour tout $x \in E$, on a : $e * x = x$ (resp. $x * e = x$).*
   Si e est un élément neutre à gauche et à droite de la loi $\star$, on dit que e est un élément neutre de $\star$.
4. *Un élément x de E est inversible (ou symétrisable), s'il existe un élément inverse (ou symétrique) à gauche (resp. à droite) x' de E tel que : $x' * x = e$ (resp. $x * x' = e$).*
   Si x' est un élément symétrique à gauche et à droite de x, on dit que x' est un élément symétrique de x et est noté x^{-1}.

Remarque. *La disposition des parenthèses est inutile si, la loi $*$ est associative et on peut écrire $x * y * z$ au lieu de $(x * y) * z$ et $x * (y * z)$.*

Exemple 7.6. *L'addition usuelle + sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ est une loi associative, commutative, et elle admet 0 comme élément neutre ; de plus, dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ tout élément x a $-x$ comme symétrique pour l'addition.*
Dans $\mathbb{N}$ le seul élément symétrisable pour l'addition usuelle est 0.

La multiplication usuelle $\times$ sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ est une loi associative et commutative admettant 1 *comme élément neutre et dans $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ tout élément x a $\frac{1}{x}$ comme inverse pour la multiplication. L'élément* 0 *n'a pas d'inverse pour la multiplication usuelle $\times$.*
Dans $\mathbb{Z}$, les seuls éléments inversibles pour la multiplication usuelle sont -1 *et* 1.

Exemple 7.7. *L'intersection $\cap$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est une loi associative et commutative, admettant E comme élément neutre, et le seul élément inversible est bien E. ($(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$, $X \cap E = X = E \cap X$, si $X \neq E$, on ne peut pas trouver X' variant $X \cap X' = E$, ça marche seulement pour $X = E$).*

Théorème 7.8. *Soit E un ensemble non vide muni dune loi de composition interne $*$, alors :*

1. *L'élément neutre e, s'il existe, il est unique.*
2. *Si $*$ est associative et admet un élément neutre e, alors l'élément inverse x^{-1} de x, s'il existe, il est unique, de plus $(x^{-1})^{-1} = x$ et $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ (si y^{-1} existe aussi).*

Démonstration.

1. Supposons e' un autre élément neutre de $*$, alors $e * e' = e$ et comme e est aussi un élément neutre alors $e * e' = e'$, d'où l'égalité $e' = e$.
2. Supposons $\overline{x}$ un autre inverse de x alors $\overline{x}*x = e$, ainsi $x^{-1} = (\overline{x}*x)*x^{-1} = \overline{x}*(x*x^{-1}) = \overline{x}$ donc l'inverse est unique.
   On a $x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$, et puisque l'inverse est unique, alors x est l'inverse de x^{-1} ; c'est-à-dire $(x^{-1})^{-1} = x$.
   On a aussi
   $$\begin{cases} (y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = y^{-1} * (x^{-1} * x) * y = y^{-1} * y = e \\ (x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = x * (y * y^{-1}) * x^{-1} = x * x^{-1} = e, \end{cases}$$
   et puisque l'inverse est unique, alors $y^{-1} * x^{-1}$ est l'inverse de $x * y$, c'est-à-dire $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.

■

Autres propriétés d'une loi de composition interne

Définition 7.9. *Soient $\star$ et $\top$ deux lois de compositions internes sur un ensemble non vide E, alors :*

1. *$\star$ est distributive par rapport à $\top$ si :*

$$\forall x, y, z \in E : x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z) \ \text{ et } (y \top z) * x = (y * x) \top (z * x).$$

2. *$r \in E$ est un élément régulier à droite (resp. à gauche) de $*$ si :*

$$\forall x, y \in E,\ x * r = y * r \Rightarrow x = y \ \ (\textit{resp. } r * x = r * y \Rightarrow x = y).$$

3. *Un sous-ensemble F de E est dit stable par rapport à $*$ si :*

$$\forall x, y \in F :\ x * y \in F.$$

7.2 Structure de groupe

7.2.1 Groupes

Définition 7.10. *Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $*$, on dit que $(G, *)$ est un groupe si et seulement si :*

1. *$*$ est associative.*
2. *$*$ possède un élément neutre e.*
3. *Tout élément de E est symétrisable.*

De plus, si la loi $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Exemple 7.11. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ *et* $(\mathbb{C}, +)$ *sont des groupes commutatifs.*
$(\mathbb{Q}, \times)$, $(\mathbb{R}, \times)$ *et* $(\mathbb{C}, \times)$ *ne sont pas des groupes (L'élément* 0 *na pas d'inverse pour la multiplication usuelle* $\times$*).*
$(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$ *et* $(\mathbb{C}^*, \times)$ *sont des groupes commutatifs.*
$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \times)$ *et* $(\mathbb{Z}, \times)$ *ne sont pas des groupes.*

Exemple 7.12. $(\mathcal{P}(E), \cap)$ *n'est pas un groupe si $E \neq \emptyset$. (l'inverse de $\emptyset$ n'existe pas).*

7.2.2 Sous-groupe

Définition 7.13. *On appelle sous-groupe d'un groupe $(G, *)$ toute partie non vide H de G qui est elle même un groupe pour la loi $*$ restreinte H. Autrement dit :*
La partie non vide H de G est un sous-groupe de $(G, *)$ si elle est stable par rapport à $*$ et à l'opération inversion, c'est-à-dire :

1. *$H \neq \emptyset$.*
2. *$\forall x, y \in H :\ x * y \in H$.*

3. $\forall x \in H : x^{-1} \in H$.

Il est claire que si $(G, *)$ est un groupe, alors G est un sous-groupe de G.

Proposition 7.14. *Une partie H de G est un sous-groupe d'un groupe $(G, *)$, si et seulement si :*

1. *H contient l'élément neutre e.*
2. *Pour tous $x, y \in H : x * y^{-1} \in H$.*

Démonstration.

a. Soit H un sous-groupe de $(G, *)$, alors

1. $*$ a un élément neutre dans H, donc $H \neq \emptyset$.
2. Soient $x, y \in H$, comme H muni de la restriction de $*$ est un groupe, alors y^{-1} existe dans H et comme H est stable par rapport à $*$ on déduit que $x * y^{-1} \in H$.

b. Inversement, supposons que H vérifie les assertions 1. et 2.

Montrons, alors que H muni de la restriction de $*$ est un groupe.

1. Comme $H \neq \emptyset$, alors il existe $x \in H$ et d'après 2. on a $e = x * x^{-1} \in H$, ce qui montre que la restriction de $*$ admet un élément neutre e dans H.
2. Soit $x \in H$, comme $e \in H$ alors d'après 2. on aura $x^{-1} = e * x^{-1} \in H$, ce qui montre que tout élément $x \in H$ est inversible dans H par rapport à la restriction de $*$.
3. Pour tous x et y dans H et d'après 2. de **b.**. on a $y^{-1} \in H$, par l'utilisation de 2) on déduit que $x * y = x * (y^{-1})^{-1} \in H$, ce qui prouve que la restriction $*$ à H est une loi de composition interne.
4. La restriction $*$ à H est associative, car $*$ est associative dans G.

■

Exemple 7.15. *Si $(G, *)$ est un groupe, alors $\{e\}$ et G sont des sous-groupes de G, appelés sous-groupes triviaux.*

Exemple 7.16. $(\mathbb{Z}, +)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{Q}, +)$ *qui est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$ *et de* $(\mathbb{C}, +)$.
Pour la multiplication $(\{-1, 1\}, \times)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{Q}^*, \times)$ *qui est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *et de* $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exemple 7.17. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $n\mathbb{Z} = \{nx,\ x \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Car l'élément neutre $0 \in n\mathbb{Z}$, et pour tous $m, m' \in n\mathbb{Z}$, on a : $m + (-m') \in n\mathbb{Z}$.*

Théorème 7.18. *Tous les sous-groupes de* $(\mathbb{Z}, +)$ *sont de la forme* $(n\mathbb{Z}, +)$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 7.19. *L'intersection quelconque de sous-groupes d'un groupe* $(G, *)$, *est un sous-groupe de* $(G, *)$, *c'est-à-dire :*
Si $(H_i)_{i\in I}$ *est une famille de sous-groupes d'un groupe* $(G, *)$, *alors* $\bigcap\limits_{i\in I} H_i$ *est aussi un sous-groupe de* $(G, *)$.

Démonstration.

1. Soit e l'élément neutre de $(G, *)$, Pour tout $i \in I$, on a $e \in H_i$, alors $e \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i$.
2. Si $x, y \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i$, alors pour tout $i \in I$, on a $x * y^{-1} \in H_i$, donc $x * y^{-1} \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i$, par suite $\bigcap\limits_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

■

Remarque. *L'union quelconque de sous-groupes d'un groupe* $(G, *)$, *n'est pas nécessairement un sous-groupe de* $(G, *)$.

Remarque. *Soit* $(G, *)$ *un groupe, alors on a :*

1. $\forall x, y \in G : \ (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
2. $\forall x_1, ..., x_n \in G : \ (x_1 * ... * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * ... * x_1^{-1}$.
3. $\forall x \in G : \ x^n = \begin{cases} \underbrace{x * x * ... * x}(n \text{ fois}) & , si\ n \in \mathbb{N}*. \\ e & , si\ n = 0. \\ \underbrace{x^{-1} * x^{-1} * ... * x^{-1}}(-n \text{ fois}) & , si\ n \in \mathbb{Z}_-^*. \end{cases}$

7.2.3 Centre d'un groupe

Définition 7.20. *Soit* $(G, *)$ *un groupe, on appelle centre de groupe G, l'ensemble C définie par :*

$$C = \{x \in G / (\forall y \in G : \ x * y = y * x)\}.$$

Théorème 7.21. *Le centre du groupe* $(G, *)$ *est un sous-groupe de G.*

Démonstration.

1. Si e est l'élément neutre de $*$, alors $e \in C$ car

$$\forall y \in G, \ e * y = y * e = y.$$

2. Soient $x, y \in C$, alors

$$\begin{aligned}
\forall z \in G,\ (x * y^{-1}) * z &= (x * y^{-1}) * (z^{-1})^{-1} \\
&= x * (y^{-1} * (z^{-1})^{-1})(\text{ car } * \text{ est associative}) \\
&= x * (z^{-1} * y)^{-1} \\
&= x * (y * z^{-1})^{-1}(\text{car } y \in C) \\
&= x * ((z^{-1})^{-1} * y^{-1}) \\
&= x * (z * y^{-1}) \\
&= (x * z) * y^{-1}(\text{car } * \text{ est associative}) \\
&= (z * x) * y^{-1}(\text{car } x \in C) \\
&= z * (x * y^{-1})(\text{ car } * \text{ est associative}),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(x * y^{-1}) \in C$.

De 1. et 2., on déduit que C est un sous-groupe de G. ■

7.3 Structure d'Anneau

7.3.1 Anneaux

Définition 7.22. *On appelle anneau tout ensemble A non vide muni de deux lois notées $+_A$ et $\cdot_A$ vérifiant :*

1. *$(A, +_A)$ est un groupe commutatif (on notera 0 ou 0_A l'élément neutre de $+_A$).*
2. *$\cdot_A$ est une loi associative.*
3. *$\cdot_A$ est une loi distributive par rapport à la loi $+_A$.*
   De plus
   - *Si la loi $\cdot_A$ admet un élément neutre noté 1 ou 1_A, on dit que l'anneau est unitaire ou unifière.*
   - *Si la loi $\cdot_A$ est commutative, on dit que l'anneau est commutatif.*
   - *Le symétrique d'un élément x par rapport à la loi $+_A$ est noté $-x$ et appelé opposé.*
   - *Le symétrique d'un élément x par rapport à la loi $\cdot_A$ est noté x^{-1} et appelé inverse.*

Exemple 7.23.

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un anneau commutatif, les seuls éléments inversibles sont* 1 *et* -1.
- $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, *et* $(\mathbb{C}, +, \times)$ *sont des anneaux unitaires et commutatifs, tous les éléments sont inversibles sauf* 0.

7.3.2 Sous-anneau

Définition 7.24. *On appelle sous-anneau d'un anneau* $(A, +_A, \cdot_A)$ *toute partie non vide B de A qui est elle même un anneau pour les lois* $+_A, \cdot_A$ *restreintes à B.*
De plus, si A est un anneau unitaire et $1_A \in B$*, on dit que B est un sous-anneau unitaire.*

On a la carctérisation suivante des sous-anneaux.

Proposition 7.25. *Une partie B de A est un sous-anneau d'un anneau* $(A, +_A, \cdot_A)$ *si et seulement si :*

1. $B \neq \emptyset$ *(B contient l'élément zéro* 0_A*).*
2. $\forall x, y \in B : x - y \in B.$
3. $\forall x, y \in B : x \cdot_A y \in B.$

Démonstration.

a. On sait que B est un sous-groupe de $(A, +_A)$ si et seulement si :

$$(B \neq \emptyset) \text{ et } (\forall x, y \in B : x - y \in B),$$

donc pour que B soit un sous-anneau de A, il suffit de voir si la restriction de la deuxième loi $\cdot_A$ est interne dans B, ce qui revient à dire que : $\forall x, y \in B : x \cdot_A y \in B$.

b. Inversement, soit B un sous-ensemble de A vérifie les assertions 1., 2. et 3..
Montrons, alors que B muni de la restriction de $*$ est un anneau.
Les assertions 1. et 2. implique que $(B, +_A)$ est un sous-groupe de $(A, +_A)$. L'assertion 3. montre que la restriction de $\cdot_A$ à B est une loi interne sur B donc, elle demeure associative et distributive par rapport à $+_A$ sur B, Par suite B est un sous-anneau de $(A, +_A, \cdot_A)$.

Ce qui termine la démonstration. ∎

Exemple 7.26. *L'ensemble* $\mathbb{Z}$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Exemple 7.27. *Les structures* $(n\mathbb{Z}, +, \times)$*, avec* $n \in \mathbb{N}$ *sont des sous-anneaux de* $(\mathbb{Z}, +, \times)$*, car :* $n\mathbb{Z}$ *contient l'élément zéro* $0_{\mathbb{Z}}$ *et pour tous* $x, y \in n\mathbb{Z} : x - y \in n\mathbb{Z}$ *et* $x \times y \in n\mathbb{Z}$.

Exemple 7.28. *L'ensemble* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Z}\}$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Règles de calcul dans un anneau

Théorème 7.29. *Soit $(A, +_A, \cdot_A)$ un anneau, alors pour tous $x, y, z \in A$, on a :*

1. $x \cdot_A 0_A = 0_A = 0_A \cdot_A x$.
2. $x \cdot_A (-y) = -(x \cdot_A y) = (-x) \cdot_A y$.
3. $x \cdot_A (y - z) = x \cdot_A y - x \cdot_A z$ *et* $(y - z) \cdot_A x = y \cdot_A x - z \cdot_A x$.
4. *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$: $x \cdot_A (ny) = n(x \cdot_A y) = (nx) \cdot_A y$.
5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$ *tel quexy* $= yx$. *(Formule du biôme de Newton).*

Démonstration.

1. $$0_A = (x \cdot_A 0_A) - (x \cdot_A 0_A) = x \cdot_A (0_A +_A 0_A) - (x \cdot_A 0_A) = (x \cdot_A 0_A) +_A (x \cdot_A 0_A) - (x \cdot_A 0_A) = (x \cdot_A 0_A),$$
   de la même façon, on montre que $0_A = 0_A \cdot_A x$.
2. $x \cdot_A (-y) +_A x \cdot_A y = x \cdot_A (-y +_A y) = x \cdot_A 0_A = 0_A$, alors $x \cdot_A (-y) = -(x \cdot_A y)$, de la même façon, on montre que $-(x \cdot_A y) = (-x) \cdot_A y$.
3. $x \cdot_A (y - z) = x \cdot_A y +_A x \cdot_A (-z) = x \cdot_A y +_A (-x \cdot_A z) = x \cdot_A y - x \cdot_A z$,
   de la même manière, on montre que $(y - z) \cdot_A x = y \cdot_A x - z \cdot_A x$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, la preuve se fait par récurrence sur n .
   - $x \cdot_A (0y) = x \cdot_A 0_A = 0_A = 0(x \cdot_A y)$, alors la propriété est vraie pour $n = 0$
   - Supposons la propriété vraie pour n et montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$

   $$\begin{aligned} x \cdot_A ((n+1)y) &= x \cdot_A (y +_A ny) = x \cdot_A y +_A x \cdot_A (ny) \\ &= x \cdot_A y +_A n(x \cdot_A y) = (n+1)(x \cdot_A y). \end{aligned}$$

   Pour $-n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), on a

   $$x \cdot_A (-ny) = x \cdot_A (n(-y)) = n(x \cdot_A (-y)) = n(-(x \cdot_A y)) = -n(x \cdot_A y).$$

   De la même façon, on montre que $n(x \cdot_A y) = (nx) \cdot_A y$.
5. Par récurrence, pour $n = 0$ la formule est évidente.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on démontre $\mathcal{P}(n+1)$, pour x, y fixés. On a :

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)^n(x+y) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}\right)(x+y) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}\right)x + \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}\right)y \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{l=0_l=k+1}^{n+1} C_n^{l-1} x^l y^{n-l+1} + \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

■

7.3.3 Anneau intègre

Définition 7.30. *On dit qu'un un anneau $(A, +_A, \cdot_A)$ est intègre, si pour tous $x, y \in A$, on a : $x \cdot_A y = 0_A$ implique $x = 0_A$ ou $y = 0_A$.*

Exemple 7.31. *Les structures $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux unitaires, commutatifs et intègres.*

Exemple 7.32. *La structure $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est un anneau non intègre puisque :*

$$\begin{aligned}
\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{Z}^2 : \quad (x,y) + (x',y') &= (x+x', y+y') \in \mathbb{Z}^2 \\
(x,y) \times (x',y') &= (x \times x', y \times y') \in \mathbb{Z}^2.
\end{aligned}$$

Comme $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$ est un anneau d'élément neutre $(0,0)$, alors pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$(x,0) \neq (0,0) \text{ et } (0,y) \neq (0,0), \quad \text{mais} (x,0) \times (0,y) = (0,0),$$

ce qui montre que $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est un anneau non intègre.

7.3.4 Idéaux d'un anneau

Soit $(A, +_A, \cdot_A)$ un anneau.

Définition 7.33. *On appelle idéal à droite (resp. à gauche) de l'anneau A, tout ensemble I de A tel que :*

1. *$(I, +_A)$ est un sous-groupe du groupe $(A, +_A)$.*

2. *$\forall a \in A, \forall x \in I, a \cdot_A x \in I$ (resp. $x \cdot_A a \in I$).*

Si I est idéal à droite et à gauche de A, on dit que I est un idéal bilatère de A.

Si l'anneau A est commutatif, tout idéal de A est bilatère, et dans ce cas on parle seulement d'idéal sans préciser s'il est à droite, à gauche ou bilatère.

Exemple 7.34. *Soit $(A, +_A, \cdot_A)$ un anneau, alors $I = \{0_A\}$ est un idéal bilatère de A.*

Exemple 7.35. *Dans l'anneau commutatif $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $n\mathbb{Z}$ est un idéal.*

Proposition 7.36. *Soit I un idéal à gauche (ou à droite) d'un anneau unitaire $(A, +_A, \cdot_A)$, alors :*

$$1_A \in I \Leftrightarrow I = A \Leftrightarrow \exists x \in I\ ;\ x \text{ est inversible.}$$

Définition 7.37. *On appelle idéal principal d'un anneau commutatif $(A, +_A, \cdot_A)$, tout idéal I de A tel que :*

$$\exists x \in A;\ I = x \cdot_A A = \{x \cdot a \setminus a \in A\}.$$

Et on note $I = \langle x \rangle$. L'anneau A est dit principal si tous ses idéaux sont principaux.

Remarque. *Il est clair qu'un idéal est un sous-anneau.*

Exemple 7.38. *Les ensembles $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$ sont des idéaux de $(Z, +, \times)$.*
D'une manière générale, si $(A, +_A, \cdot_A)$ est un anneau unitaire et commutatif, alors l'ensemble $xA = \{x \cdot_A a\ /\ a \in A\}$ est un idéal principal de $(A, +_A, \cdot_A)$.

7.3.5 Homomorphismes des structures algébriques

Homomorphismes de groupes

Soient $(G, \star)$ et $(H, \top)$ deux groupes et $f : G \longrightarrow H$ une application.

Définition 7.39. *On dit que f est un homomorphisme (ou morphisme) du groupe si :*

$$\text{Pour tous } x, y \in G : f(x \star y) = f(x) \top f(y).$$

- *Un homomorphisme injectif est appelé momorphisme.*
- *Un homomorphisme surjectif est appelé epimorphisme.*
- *Un homomorphisme bijectif est appelé isomorphisme.*
- *Un homomorphisme de $(G, *)$ dans $(G, *)$ est appelé endomorphisme de $(G, *)$.*

• *Un endomorphisme bijectif est appelé automorphisme.*

Exemple 7.40. *L'application* $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ *telle que :* $f(z) = |z|$ *est un homomorphisme du groupe* $(\mathbb{C}^*, \times)$ *dans le groupe* $(\mathbb{R}^*, \times)$.
$(f(z \times z') = |z \times z'| = |z| \times |z'| = f(z) \times f(z'))$.
• f *n'est pas un isomorphisme de groupes (*f *n'est pas injective).*

Exemple 7.41. *L'application* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *telle que :* $g(x) = \cos x + i \sin x$ *est un homomorphisme de groupes* $(\mathbb{R}, +)$ *dans le groupe* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
$(g(x + y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = g(x) \cdot g(y))$.
• g *n'est pas un isomorphisme de groupes (*g *n'est ni injective ni surjective).*

Exemple 7.42. *L'application* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ *telle que :* $\exp(x) = e^x$ *est un isomorphisme du groupe* $(\mathbb{R}, +)$ *dans le groupe* $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ *puisque*
$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x) \cdot \exp(y)$ *et* $\exp$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^*_+$.

Exemple 7.43. *Pour tout élément* a *d'un groupe* $(G, *)$, *l'application* $I_a : G \longrightarrow G$ *telle que :* $I_a(x) = a * x * a^{-1}$ *est un automorphisme du groupe* $(G, *)$.
$(I_a(x * y) = a * x * y * a^{-1} = a * x * (a * a^{-1}) * y * a^{-1} = I_a * (x) I_a(y)$ *et si* $I_a(x) = I_a(x')$, *alors* $a * x * a^{-1} = a * x' * a^{-1}$ *et en composant gauche par* a^{-1} *est droite par* a, *on obtient* $x = x'$, *donc* I_a *est injective.*
Pour avoir $I_a(x) = y$, *c'est-à-dire :* $a * x * a^{-1} = y$, *il suffit que* $x = a^{-1} * y * a$, *donc* I_a *est surjective).*

Exemple 7.44. *L'application* $h : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ *telle que :* $h(n) = pn$ *est un endomorphisme du groupe* $(\mathbb{Z}, +)$.
• h *n'est pas un automorphisme si :* $p \neq 1$ *et* $p \neq -1$.

Théorème 7.45. *Si* $f : (G, *) \longrightarrow (H, \top)$ *est un homomorphisme de groupes, alors :*

1. $f(e) = e'$.
2. $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Homomorphismes d'anneaux

Soient $(A, +_A, \cdot_A)$ et $(B, +_B, \cdot_B)$ deux anneaux et $f : A \longrightarrow B$ une application.

Définition 7.46. *On dit que* f *est un homomorphisme (ou morphisme) d'anneaux si :* *et*

- *Un homomorphisme bijectif est appelé isomorphisme d'anneaux.*
- *Si $A = B$, f est appelé endomorphisme de l'anneau A.*
- *Un endomorphisme de l'anneau A bijectif est appelé automorphisme de A.*

Exemple 7.47. *L'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que : $f(x) = \dot{x}$ est un homomorphisme d'anneaux.*

$$(f(x+y) = \dot{\widehat{x+y}} = \dot{x} \dot{+} \dot{y} = f(x) \dot{+} f(y) \text{ et } f(x \times y) = \dot{\widehat{x \times y}} = \dot{x} \dot{\times} \dot{y} = f(x) \dot{\times} f(y)).$$

7.4 Structure de corps

7.4.1 Corps

Définition 7.48. *On dit qu'un anneau unitaire $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps si tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est inversible. Si de plus $\times$ est commutative, on dit que $\mathbb{K}$ est un corps est commutatif.*

Exemple 7.49. *Les structures $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps commutatifs.*
La structure $(\mathbb{Z}, +, \times)$, n'est pas un corps.

Lemme 7.50. *Tout corps $\mathbb{K}$ est un anneau intègre.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x \cdot y = 0$. On a

1. ou bien $x = 0$ (évident).
2. sinon, si $x \neq 0$, x est inversible dans $\mathbb{K}$, on aurait :

$$x \cdot y = 0 \Longrightarrow x^{-1} \cdot x \cdot y = 0 \Longrightarrow 1 \cdot y = 0 \Longrightarrow y = 0.$$

■

On a aussi la caractérisation des corps suivante :

Proposition 7.51. *Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire, alors $\mathbb{K}$ est un corps si et seulement si les seuls idéaux de $\mathbb{K}$ sont $\{0_{\mathbb{K}}\}$ et $\mathbb{K}$ lui-même.*

7.4.2 Sous-corps

Définition 7.52. *On appelle sous-corps, d'un corps* $(\mathbb{K}, +, \times)$*, tous sous-ensemble* K' *de* $\mathbb{K}$ *tel que, muni des restrictions des lois* $+$ *et* $\times$ *est un corps.*

Proposition 7.53. $K' \subset \mathbb{K}$ *est un sous-corps de* $(\mathbb{K}, +, \times)$ *si et seulement si :*

- $K' \neq \emptyset$.
- $\forall x, y \in K', \quad x - y \in K'$ *et* $x \times y^{-1} \in K'$.

Exemple 7.54. $\mathbb{Q}$ *est un sous-corps de* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *et* $\mathbb{R}$ *est un sous-corps de* $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Remarque. *tout sous-corps* K' *d'un corps* $\mathbb{K}$ *est un corps pour les lois induites, et les neutres de* K' *pour* $+$ *et* $\times$ *sont ceux de* $\mathbb{K}$.

7.5 Exercices

Exercice 7.1. *On définit sur l'ensemble* $E =]-1, 1[$ *la lois de composition interne* $*$ *par :*

$$\forall x, y \in E : \; x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

1. *Etudier les propriétés de la lois* $*$ *(interne ? commutatif ? associatif ? admet un élément neutre ? chaque élément admet un élément symétrique).*
2. *En déduire la structure du couple* $(E, *)$.

Exercice 7.2. *Soit* T *une lois définit sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \; xTy = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1).$$

1. *Montrer que* T *interne, commutatif et que* 1 *est un élément neutre de* T *dans* $\mathbb{R}$.
2. T *est-il associative ?*

Exercice 7.3. *Montrer que* $(2\mathbb{Z}, +)$ *un sous-groupe de* $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 7.4. *Soient* Δ *et* $\circ$ *deux lois de composition internes définies par :*

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : (x, y)\Delta(x', y') = (xx', xy' + y)$$
$$(x, y) \circ (x', y') = (xx', yy')$$

1. *Montrer que* $(]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \Delta, \circ)$ *un sous-annau de* $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \Delta, \circ)$.

Signalons que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \Delta)$ *est un groupe son élément neutre est* $(1, 0)$ *et que chaque élément* (x, y) *admet un élément symétrique* $(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x})$.

Exercice 7.5. *Montrer que* $(\mathbb{Q}, +, \times)$ *un sous-corps de* $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Chapitre 8

Espaces vectoriels

8.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 8.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel tout ensemble E muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe $\times$, définies par :*

$$+ \; : E \times E \longrightarrow E \qquad\qquad \times \; : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto x + y \qquad\qquad (\lambda, x) \longmapsto \lambda \times x \text{ qu'on note} \lambda x.$$

telles que :

1. *$(E, +)$ est un groupe abélien,*
2. *$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$*
3. *$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall(x, y) \in E^2, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$*
4. *$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,$*
5. *$\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} x = x.$*

On abrègera espace vectoriel en "e.v" et $\mathbb{K}$-espace vectoriel en $\mathbb{K}-e.v$.

Définition 8.2. *Les éléments d'un $\mathbb{K}$-e.v seront appelés **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés **scalaires**.*

Exemple 8.3.

1. *L'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \setminus x \in \mathbb{R}, \; y \in \mathbb{R}\}$ est un $\setminus$-e.v pour les opérations :*

   – *L'addition : $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$.*
   – *La multiplication : $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.*

2. *Le corps* $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v, en prenant pour loi interne l'addition et pour loi externe la multiplication dans* $\mathbb{K}$:
$$\begin{array}{rrcl} + & : \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \times & : \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\times x = \lambda x. \end{array}$$
Ici les éléments de $\mathbb{K}$ *sont simultanément considérés comme des vecteurs et comme des scalaires.*

3. *Plus généralement, soit* $\mathbb{L}$ *un corps tel que* $\mathbb{K}$ *soit un sous-corps de* $\mathbb{L}$*. Alors* $\mathbb{L}$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v, pour les lois interne* $+$ *et externe* $\times$ *dans* $\mathbb{L}$
$$\begin{array}{rrcl} + & : \mathbb{L}\times\mathbb{L} & \longrightarrow & \mathbb{L} \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \times & : \mathbb{K}\times\mathbb{L} & \longrightarrow & \mathbb{L} \\ & (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\times x = \lambda x. \end{array}$$
En particulier, $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}$*-e.v pour les lois usuelles.*

4. *Soient* $n \in \mathbb{N}^\star, E_1, ..., E_n$ *des* $\mathbb{K}$*-e.v. Le produit cartésien* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ *est alors un* $\mathbb{K}$*-e.v pour la loi interne et la loi externe définies respectivement par :*
   – $\forall((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) \in E^2, (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
   – $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall(x_1, ..., x_n) \in E, \lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

   En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star, \mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v pour les lois usuelles.*
   Plus particulièrement $\mathbb{R}^n$ *est un* $\mathbb{R}$*-e.v pour les lois usuelles.*

5. *L'ensemble* $\mathbb{K}[X]$ *des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v pour l'addition et la multiplication externe par scalaire.*

Proposition 8.4. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-e.v. On a, pour tous* λ, μ *de* $\mathbb{K}$ *et tous* x, y *de* E :

1. $\lambda x = 0 \Longleftrightarrow (\lambda = 0$ *ou* $x = 0)$,
2. $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$,
3. $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

Démonstration.

1. • $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$ d'où $0x = 0$,
   • $\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$ d'où $\lambda 0 = 0$.
   • si $\lambda x = 0$ et si $\lambda \neq 0$ alors, en notant λ^{-1} l'inverse de λ dans le corps K on a $x = 1x = (\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}0 = 0$.
2. $\lambda x = ((\lambda - \mu) + \mu)x = (\lambda - \mu)x + \mu x$ d'où $(\lambda - \mu)x = (\lambda x) - (\mu x)$ ce qui est noté $\lambda x - \mu x$.
3. $\lambda x = \lambda((x - y) + y) = \lambda(x - y) + \lambda y$ d'où $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

∎

La proposition suivante est immédiate par récurrence.

Proposition 8.5. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $n, p \in \mathbb{N}^\star, x, x_i, y_i, x_{ij}$ des éléments de E, λ et λ_i des éléments de $\mathbb{K}$. On a :*

1. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) + \left(\sum\limits_{i=n+1}^{p} x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ *(si $p \geq n+1$),*
2. $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i,$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{p} x_{ij}\right) = \sum\limits_{j=1}^{p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}\right),$
4. $\sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda x_i) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i,$
5. $\sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x.$

8.1.1 Sous-espaces vectoriels

Définition 8.6. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $F \in \mathcal{P}(E)$. F est dit un s.e.v de E, si F est un $\mathbb{K}$-e.v pour les lois $+ : F \times F \longrightarrow F$ et externe $: K \times F \longrightarrow F$ induites par celles de E.*
Où $(x, y) \longmapsto x + y$ et $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$.

Proposition 8.7. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $F \in \mathcal{P}(E)$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

1. $F \neq \emptyset,$
2. $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F,$
3. $\forall \lambda \in K, \forall x \in F, \lambda x \in F.$

On abrègera sous-espace vectoriel en s.e.v. Pour rappeler le corps $\mathbb{K}$ utilisé, on dit parfois sous-$\mathbb{K}$-e.v au lieu de s.e.v.

Exemple 8.8.
- $\mathbb{R} \times \{0\}$ *est un s.e.v du $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^2$.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}[X]$.*

Remarque.
- *L'ensemble $\{0_E\}$ constitué de l'unique élément nul est un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E, à ne pas confondre avec l'ensemble vide $\{\emptyset\}$ qui n'est pas un s.e.v de E puisque il ne contient pas le vecteur nul. Et l'ensemble E est un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E.*
- *Si F est un s.e.v de l'e.v E et si G est un s.e.v de F alors G est un s.e.v de E, on dit qu'il y a transitivité de la notion de s.e.v.*

Exemple 8.9. *L'ensemble*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$$

est un s.e.v. du $\mathbb{R}$*-e.v* $\mathbb{R}^3$*. En effet :*

1. $F \subset \mathbb{R}^3$.
2. $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ *car* $0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0$.
3. *Si* X *et* Y *appartienent à* $\mathbb{R}^3$*, c'est-à-dire :* $X = (x, y, z) : x - y + 2z = 0$ *et* $Y = (x', y', z') : x' - y' + 2z' = 0$*, alors* $X + Y \in \mathbb{R}^3$*, car :*

$$x + x' - y - y' + 2 \cdot z + 2 \cdot z' = x - y + 2z + x' - y' + 2z' = 0 + 0 = 0.$$

4. *Si* $X \in \mathbb{R}^3$*, c'est-à-dire :* $X = (x, y, z) : x - y + 2z = 0$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors* $\lambda X \in \mathbb{R}^3$*, car :*

$$\lambda x - \lambda y + 2\lambda z = \lambda(x - y + 2z) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Exemple 8.10. 1. F_1 *est un s.e.v de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, ; \mathbb{R})$ *car :*

- $0 \in F_1$,
- $f, g \in F_1 \Longrightarrow f + g \in F_1$ *car :* $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$,
- $f \in F_1, \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \cdot f \in F_1$ *car :*

$$(\lambda \cdot f)(-x) = \lambda \cdot f(-x) = \lambda \cdot f(x) = (\lambda \cdot f)(x).$$

2. F_2 *est un s.e.v de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, ; \mathbb{R})$ *car :*

   - $0 \in F_2$,
   - $f, g \in F_2 \Longrightarrow f + g \in F_2$ *car :* $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f+g)(x)$,
   - $f \in F_2, \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \cdot f \in F_2$ *car :*
     $(\lambda \cdot f)(-x) = \lambda \cdot f(-x) = -\lambda \cdot f(x) = -(\lambda \cdot f)(x)$.

3. F_3 *n'est pas un s.e.v de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, ; \mathbb{R})$ *car il ne contient pas la fonction nulle.*

4. F_4 *n'est pas un s.e.v de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, ; \mathbb{R})$ *car* $f \in F_4, \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \cdot f \notin F_4$ *pour* $\lambda < 0$*, on trouve* $\lambda f(x) \leq 0$.

5. F_5 *est un s.e.v de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, ; \mathbb{R})$ *car :*

   - $0 \in F_5$,
   - $f, g \in F_5 \Longrightarrow f + g \in F_5$ *car :* $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

– $f \in F_5, \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \cdot f \in F_5$ *car :*
$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) = 0$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

6. F_6 *n'est pas un s.e.v de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, ; \mathbb{R})$ *car il ne contient pas la fonction nulle.*

7. F_5 *est un s.e.v de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, ; \mathbb{R})$ *car :*

– $0 \in F_7$,
– $f, g \in F_7 \Longrightarrow f + g \in F_7$ *car :* $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0$,
– $f \in F_7, \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \cdot f \in F_7$ *car :*
$(\lambda \cdot f)(1) = \lambda \cdot f(1) = 0$.

Proposition 8.11. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un s.e.v de E.*

Démonstration. Notons $F = \bigcap_{i\in I} F_i$.
– $F \neq \emptyset$; en effet, $0_E \in F$ puisque $\forall i \in I, 0_E \in F_i$.
– Soit $(x, y) \in F^2$. On a $\forall i \in I, x \in F_i$ et $y \in F_i$ donc $\forall i \in I, x + y \in F_i$ d'où $x + y \in F$.
– Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F$. On a $\forall i \in I, x \in F_i$ donc $\forall i \in I, \lambda x \in F_i$ d'où $\lambda x \in F$.

■

Proposition 8.12. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, F_1, F_2 deux s.e.v de E. On note*

$$F_1 + F_2 = \{x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2\} = \{x_1 + x_2, (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\},$$

alors $F_1 + F_2$ est un s.e.v de E appelé la somme de F_1 et F_2.

Démonstration. Montrons que $F_1 + F_2$ est un s.e.v de E :
– $F_1 + F_2 \neq \emptyset$ car $0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$.
– Soit $(x, y) \in (F_1 + F_2)^2$. Il existe $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, (y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$ tels que : $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. On a alors, $x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in F_1 + F_2$.
– Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times (F_1 + F_2)$. Il existe $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a alors, $\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in F_1 + F_2$.

■

Proposition 8.13. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On a pour tous s.e.v F_1, F_2, F_3 de E :*

$F_1 + F_2 = F_2 + F_1$	$F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_1$
$F_1 \subset F_1 + F_2$	$F_1 \cap F_2 \subset F_1$
$\begin{cases} F_1 \subset F_3 \\ F_2 \subset F_3 \end{cases} \Longleftrightarrow F_1 + F_2 \subset F_3$	$\begin{cases} F_1 \subset F_3 \\ F_2 \subset F_3 \end{cases} \Longleftrightarrow F_1 \cap F_2 \subset F_3$
$F_1 \subset F_2 \Longrightarrow F_1 + F_3 \subset F_2 + F_3$	$F_1 \subset F_2 \Longrightarrow F_1 \cap F_3 \subset F_2 \cap F_3$
$F_1 + F_1 = F_1$	$F_1 \cap F_1 = F_1$
$F_1 + \{0_E\} = F_1$	$F_1 \cap \{0_E\} = \{0_E\}$
$F_1 + E = E$	$F_1 \cap E = F_1$
$(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$	$(F_1 \cap F_2) \cap F_3 = F_1 \cap (F_2 \cap F_3)$

Démonstration. Les démonstrations sont presque immédiates. Par exemple, pour démontrer qu $F_1 \subset F_1 + F_2$, on remarquera que $\forall x \in F_1$, on peut écrire $x = x + 0_E$ où $x \in F_1$ et $0_E \in F_2$ donc $x \in F_1 + F_2$. ∎

Définition 8.14. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, F_1, F_2 deux s.e.v de E. On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.*
Lorsque F_1 et F_2 sont deux s.e.v en somme directe, on note $F_1 \oplus F_2$ au lieu de $F_1 + F_2$.

Exemple 8.15. *Pour $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$, les s.e.v $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$ et $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ sont en somme directe.*

Exemple 8.16. *Pour $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$, les s.e.v $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y = 0\}$ sont en somme directe, car pour tout $X \in F_1 \cap F_2$, on trouve : $X = (0, 0)$, donc $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.*

Proposition 8.17. *Pour que deux s.e.v F_1 et F_2 d'un $\mathbb{K}$-e.v soient en somme directe, il faut et il suffit que tout élément de $F_1 + F_2$ se décompose d'une façon unique en somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.*

Démonstration.

1. Supposons que F_1 et F_2 soient en somme directe, et soit $x \in F_1 + F_2$.
   - Par définition de $F_1 + F_2$, il existe $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
   - Soient $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, (y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Alors $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$. Comme $x_1 - y_1 \in F_1, x_2 - y_2 \in F_2, F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, on en déduit que $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0_E$ donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$. Ainsi, x se décompose d'une façon unique sur F_1 et F_2.

2. Réciproquement, supposons que tout élément de $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique sur F_1 et F_2. Soit $x \in F_1 \cap F_2$, on dispose de deux décompositions de 0_E sur F_1 et F_2 : $0_E = 0_E + 0_E$ et $0_E = x + (-x)$ d'où $x = 0_E$. Ainsi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et F_1 et F_2 sont en somme directe.

■

Définition 8.18. *Deux s.e.v F_1 et F_2 d'un $\mathbb{K}$-e.v sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si*

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \text{ et } F_1 + F_2 = E.$$

Exemple 8.19. *Pour $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$, les s.e.v $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y = 0\}$ sont supplémentaires dans E, en effet :*

1. *$X \in \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow X = (x, y) = (x, 0) + (0, y) \in F_1 + F_2$,*
2. *pour tout $X \in F_1 \cap F_2$, on trouve : $X = (0, 0)$, car*

$$X \in F_1 \cap F_2 \Longleftrightarrow X \in F_1 \text{ et } X \in F_2 \Longleftrightarrow X = (x, y); x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow X = (0, 0).$$

Exemple 8.20.

– *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$. F_1 et F_2 sont deux s.e.v supplémentaires dans E.*

– *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, F_1 (resp. F_2) est l'ensemble des applications paires (resp. impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. F_1 et F_2 sont deux s.e.v de E supplémentaires dans E. En effet :*

  Si $f \in F_1 \cap F_2$ alors f est paire et impaire donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(x)$ d'où $f = 0$.

  Tout f de E se décompose en $f = g + h$ où $g \in F_1$ et $h \in F_2$ sont définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ et } h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Remarque.

1. *Un s.e.v F de E peut admettre plusieurs supplémentaires dans E. Par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$, le s.e.v $F = \mathbb{R} \times \{0\}$ de E admet une infinité de supplémentaires dans E, qui sont tous les x, $\ x \in E - F = \{x_1 - x_2 \setminus x_1 \in E \text{ et } x_2 \in F\}$.*

2. *On montrera plus loin que si E est de dimension finie, alors tout s.e.v de E admet au moins un supplémentaire dans E.*

8.2 Dépendance et indépendance linéaires

8.2.1 Familles liées, familles libres

Combinaisons linéaires

Définition 8.21. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $n \in \mathbb{N}^\star$, $(x_1, ..., x_n) \in E^n$. On appelle combinaison linéaire de $x_1, ..., x_n$ tout élément x de E tel qu'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :*

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Plus généralement, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille (éventuellement infinie) d'éléments d'un $\mathbb{K}$-e.v E, on appelle combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ tout élément x de E tel qu'il existe une partie finie J de I et une famille $(\lambda_i)_{i\in J}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i$.

Proposition 8.22. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $F \in \mathcal{P}(E)$. Pour que F soit un s.e.v de E, il faut et il suffit que F soit non vide et que F soit stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire :*

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F.$$

Démonstration.

(a) Si F est un s.e.v de E, alors $F \neq \emptyset$ et pour tous (λ, μ) de $\mathbb{K}^2$ et (x, y) de F^2, λx et μy sont dans F, puis $\lambda x + \mu y \in F$.

(b) Réciproquement, supposons que $F \neq \emptyset$ et $\forall(\lambda, \mu) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$. En choisissant $\mu = 0$ puis $\lambda = \mu = 1$, on conclut que F est un s.e.v de E.

■

Exemple 8.23. *Considérons les trois vecteurs* $u = (-1, -2, 3)$, $v = (0, 2, 1)$, $w =$
Montrons que w est combinaison linéaire des vecteurs u et v.
Pour prouver que le vecteur w est une combinaison linéaire des vecteurs u et v, il faut montrer qu'il existe deux constantes α et β telles que :

$$w = \alpha u + \beta v,$$

ce qui est équivalent à résoudre le système

$$\begin{cases} -\alpha = -1, \\ -2\alpha + 2\beta = 0, \\ 3\alpha + +\beta = 4. \end{cases}$$

Ce qui donne $\alpha = \beta = 1$.

Par conséquent w *est combinaison linéaire de* u *et* v, *puisque* $w = u + v$.

Familles liées, familles libres

Définition 8.24. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-e.v,* $n \in \mathbb{N}^\star, (x_1, ..., x_n) \in E^n$.

(a) *On dit que la famille finie* $\{x_1, ..., x_n\}$ *est* ***liée*** *si et seulement si :*

$$\exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n - \{(0, ..., 0)\}; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E.$$

(b) *On dit que la famille* $\{x_1, ..., x_n\}$ *est* ***libre*** *si et seulement si elle n'est pas liée c'est-à-dire :*

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Longrightarrow (\forall i \in \{1, ..., n\}, \lambda_i = 0)\right).$$

Plus généralement, soit $(x_i)_{i\in I}$ *une famille éventuellement infinie d'éléments de* E.

(a) *On dit que* $(x_i)_{i\in I}$ *est* ***liée*** *si et seulement s'il existe une sous-famille de* $(x_i)_{i\in I}$ *qui soit liée, c'est-à-dire si et seulement si'il existe une partie finie* J *de* I *telle que* $(x_i)_{i\in J}$ *soit liée.*

(b) *On dit que* $(x_i)_{i\in I}$ *est* ***libre*** *si et seulement si elle n'est pas liée, c'est-à-dire si et seulement si toute sous-famille finie de* $(x_i)_{i\in I}$ *est libre.*

Remarque.

(a) *Deux vecteurs* $x, y \in E - \{0_E\}$ *sont colinéaires si et seulement si* $\{x, y\}$ *est lié, c'est-à-dire si et seulement s'il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que :* $y = \lambda x$.

(b) *Pour qu'une famille* $\{x\}$ *à un seul élément soit liée, il faut et il suffit que :* $x = 0_E$.

(c) *Pour qu'une famille* $\{x\}$ *à un seul élément soit libre, il faut et il suffit que :* $x \neq 0_E$.

(d) *Pour tout* x *de* E, *la famille* $\{x, x\}$ *est liée puisque :* $1x + (-1)x = 0$ *avec* $(1, -1) \neq (0, 0)$.

(e) *Si une famille* $(x_i)_{i\in}$ *d'éléments de* E *est liée, alors toute sur famille de* $(x_i)_{i\in I}$, *(c'est-à-dire toute famille d'éléments de* E *dont* $(x_i)_{i\in I}$ *est une sous-famille) est liée. Par exemple, toute famille contenant le vecteur* 0_E *est liée.*

(f) *Si une famille* $(x_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* E *est libre, alors toute sous-famille de* $(x_i)_{i\in I}$ *est libre.*

(g) *Si une famille* $(x_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* E *est libre, alors les* x_i, $i \in I$ *sont deux à deux distincts. En effet, soit* $(i, j) \in I^2$ *tel que* $i \neq j$. *D'après le point précédent, la famille* $\{x_i, x_j\}$ *à deux éléments est libre, donc* $x_i \neq x_j$.

Exemple 8.25.

(a) $E = \mathbb{R}^3$ *,* $n = 2$*,* $u_1 = (1, 0, 1)$*,* $u_2 = (2, 1, -1)$*. La famille* $\{u_1, u_2\}$ *est libre, car*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (0, 0, 0),$$

ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$*.*

(b) $E = \mathbb{R}^2, n = 3, v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1), v_3 = (-1, 0)$*. La famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est liée, puisque*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0),$$

ce qui donne $\lambda_1 = -\lambda_2, \quad \lambda_3 = \lambda_2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}$*,*
d'où $v_1 = v_2 + v_3$*.*

8.2.2 Sous-espace engendré par une partie

Définition 8.26. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-e.v,* $A \in \mathcal{P}(E)$*. On appelle s.e.v engendré par* A*, et on note* $Vect(A) = \langle A \rangle$*, l'intersection de tous les s.e.v de* E *contenant* A *:*

$$\langle A \rangle = Vect(A) = \bigcap_{\substack{F \in V(E),\\ A \subset F}} F.$$

Proposition 8.27. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-e.v,* $A \in \mathcal{P}(E)$*.*

1. $Vect(A)$ *est le plus petit s.e.v (au sens de l'inclusion) de* E *contenant* A*.*
2. *Si* $A \neq \emptyset$*, alors* $\langle A \rangle = Vect(A)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de* A*.*
3. $\langle 0_E \rangle = Vect(0_E) = \{0_E\}$*.*

Définition 8.28. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-e.v,* $(x_i)_{i \in I}$ *une famille d'éléments de* E*. On appelle s.e.v engendré par* $(x_i)_{i \in I}$ *et on note* $\langle (x_i)_{i \in I} \rangle = Vect((x_i)_{i \in I})$ *le s.e.v engendré par la partie* $\{x_i \;\; ; \;\; i \in I\}$ *de* E*.*
En particulier, le s.e.v de E *engendré par une famille finie non vide* $\{x_1, ..., x_n\}$ *d'éléments de* E *est* $\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$*, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires de* $x_1, ..., x_n$*.*

Proposition 8.29. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-e.v,* $A, B \in \mathcal{P}(E)$*. On a :*

1. $A \subset B \Longrightarrow \langle A \rangle = Vect(A) \subset \langle B \rangle = Vect(B)$*,*
2. A *est un s.e.v de* E *si et seulement si* $\langle A \rangle = Vect(A) = A$*,*
3. $\langle \langle A \rangle \rangle = Vect(Vect(A)) = Vect(A) = \langle A \rangle$*,*
4. $Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B) = \langle A \rangle + \langle B \rangle$*.*

Démonstration. Les démonstrations de 1., 2. et 3. sont immédiates. Montrons 4.

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Vect(A) \subset Vect(A \cup B) \\ Vect(B) \subset Vect(A \cup B) \end{cases} \Longrightarrow Vect(A) + Vect(B) \subset Vect(A \cup B).$$

Réciproquement soit $x \in Vect(A \cup B)$. Il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, $(c_1, ..., c_n) \in (A \cup B)^n$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$. En groupant les termes de A d'une part, ceux de B d'autre part, on en déduit qu'il existe $a \in Vect(A)$, $b \in Vect(B)$ tels que $x = a + b$. Ceci montre que $Vect(A \cup B) \subset Vect(A) + Vect(B)$. ■

8.2.3 Familles génératrices, bases

Définition 8.30. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $\mathcal{G}$ une famille d'éléments de E. On dit que $\mathcal{G}$ est une famille **génératrice** de E (ou que $\mathcal{G}$ **engendre** E) si et seulement si $\langle \mathcal{G} \rangle = Vect(\mathcal{G}) = E$.*

Proposition 8.31. *Si $\mathcal{G} = \{x_1, ..., x_n\}$ est une famille finie d'éléments d'un $\mathbb{K}$-e.v, $\mathcal{G}$ engendre E si et seulement si*

$$\forall x \in E, \ \ \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Une partie $\mathcal{G}$ d'un $\mathbb{K}$-e.v est dite génératrice de E si et seulement si $\langle \mathcal{G} \rangle = Vect(\mathcal{G}) = E$. Ceci revient à ce que la famille $(x)_{x \in \mathcal{G}}$ des éléments de $\mathcal{G}$ engendre E au sens de la définition 8.30.

Définition 8.32. *On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$-e.v est une **base** de E si et seulement si $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de E.*

La proposition suivante est immédiate :

Proposition 8.33. *Une famille finie $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$-e.v E est une base de E si et seulement si :*

$$\forall x \in E, \ \ \exists! (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Si E admet une base finie $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, pour tout x de E, les éléments $\lambda_1, ..., \lambda_n$, définis ci-dessus s'appellent les coordonnées (ou composantes) de x dans (ou sur) la base $\mathcal{B}$. λ_i s'appelle la i-ème coordonnée (ou composante) de x dans (ou sur) la base $\mathcal{B}$.

Exemple 8.34. *La famille $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ où $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ où le 1 est à la $i - ime$ place est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 8.35.

1. *Montrer que les vecteurs* $v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,1)$ *et* $v_3 = (1,1,0)$ *forment une base de* $\mathbb{R}^3$.

   Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1,1,1)$.

2. *Donner, dans* $\mathbb{R}^3$ *, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.*

3. *Donner, dans* $\mathbb{R}^3$ *, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.*

Correction :

1. Il est très simple de montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre et génératrice.

   Le vecteur x vérifie $x = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$. Donc, dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, les coordonnées de x sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. Par exemple la famille $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice, car le vecteur $(0,0,2)$ n'est pas combinaison linéaire des deux vecteurs de la famille.

3. La famille $\{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1), u_4 = (1,1,1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre, car $u_4 = u_1 + u_2 + u_3$.

8.3 Théorie de la dimension

E désigne dans ce chapitre un $\mathbb{K}$-e.v.

8.3.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 8.36. *Soient* $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2, (x_1, ..., x_{n+p}) \in E^{n+p}$,

$$\mathcal{A} = (x_1, ..., x_p), \mathcal{A}' = (x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_{n+p}).$$

1. *Si* $\mathcal{A}'$ *est libre, alors* $\mathcal{A}$ *est libre.*
2. *Si* $\mathcal{A}$ *est génératrice de* E*, alors* $\mathcal{A}'$ *est génératrice de* E.

Démonstration.

1. On rappelle (remarque 8.2.1) que si une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est libre, alors toute sous-famille de $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

2. Soit $x \in E$. Puisque $\mathcal{A}$ engendre E, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$. En notant $\lambda_{p+1} = ... = \lambda_{n+p} = 0$, on a alors $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$. Ceci montre que $\mathcal{A}'$ engendre E.

■

La proposition précédente se généralise à des familles quelconques (non nécessairement finies) :

1. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ et si $\mathcal{A}'$ est libre, alors $\mathcal{A}$ est libre.
2. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ et si $\mathcal{A}$ est génératrice de E alors $\mathcal{A}'$ est génératrice de E (où $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ signifie que $\mathcal{A}$ est une sous-famille de $\mathcal{A}'$).

Proposition 8.37. *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $(x_1, ..., x_{n+1}) \in E^{n+1}$, $\mathcal{A} = \{x_1, ..., x_n\}$ et $\mathcal{A}' = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$.*

1. *Si $\mathcal{A}$ est libre et si $x_{n+1} \notin Vect(\mathcal{A})$, alors $\mathcal{A}'$ est libre.*
2. *Si $\mathcal{A}'$ est génératrice de E et si $x_{n+1} \in Vect(\mathcal{A})$, alors F est génératrice de E.*

Démonstration.

1. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0_E$. Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors on déduit $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_{n+1}^{-1} \lambda_i) x_i \in Vect(\mathcal{A})$, d'où une contradiction. Donc $\lambda_{n+1} = 0$ d'où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$ puis $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ puisque $\mathcal{A}$ est libre.
2. Soit $x \in E$, puisque $\mathcal{A}'$ est génératrice de E, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ Comme $x_{n+1} \in Vect(\mathcal{A})$, il existe $(\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$. On en déduit $x = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_{n+1} \mu_i) x_i \in Vect(\mathcal{A})$, ce qui montre que $\mathcal{A}$ est génératrice de E.

■

La proposition précédente se généralise à des familles quelconques (non nécessairement finies) :

1. Si $\mathcal{A}$ est libre et si $x \notin Vect(\mathcal{A})$ alors $\mathcal{A} \cup \{x\}$ est libre.
2. Si $\mathcal{A} \cup \{x\}$ est génératrice de E et si $x \in Vect(\mathcal{A})$? alors $\mathcal{A}$ est génératrice de E.

Théorème 8.38. ***(Théorème de l'échange)***
Soient $\mathcal{G} = \{x_1, ..., x_p\}$, $\mathcal{L} = \{y_1, ..., y_r\}$ deux familles finies d'éléments de E. Si $\mathcal{G}$ est génératrice de E et si $\mathcal{L}$ est libre alors

1. *$r \leq p$.*

2. *On peut remplacer d'au moins une façon r des vecteurs de $\mathcal{G}$ par ceux de $\mathcal{L}$ pour obtenir une famille génératrice de E.*

Définition 8.39. *Un $\mathbb{K}$-e.v E est dit de* ***dimension finie*** *si et seulement si E admet au moins une famille génératrice finie.*

Exemple 8.40.

1. $\mathbb{K}^n$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$ *est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.*
2. $\mathbb{K}[X]$ *est un $\mathbb{K}$-e.v qui n'est pas de dimension finie car si $\mathbb{K}[X]$ admettait une famille génératrice finie $\{P_1, ..., P_n\}$, alors pour tout P de $\mathbb{K}[X]$, on aurait $deg(P) \leq \max\limits_{1\leq i\leq n}(deg(P_i))$ ce qui est impossible.*

Théorème 8.41. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, alors :*

1. *E admet au moins une base finie.*
2. *Toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal.*

Le cardinal d'une base de E est appelé la dimension de E et est notée $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ *ou plus simplement* $\dim(E)$.

Démonstration.

1. Puisque E est de dimension finie, E admet au moins une famille génératrice $\mathcal{G} = \{x_1, ..., x_p\}$. Si $\mathcal{G}$ est libre, alors $\mathcal{G}$ est une base finie de E.
   Supposons que $\mathcal{G}$ soit liée, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p - \{(0, ..., 0)\}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$. Quitte à permuter $x_1, ..., x_p$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$, on peut se ramener à $\lambda_p \neq 0$ d'où, en notant $\mathcal{G}_1 = \{x_1, ..., x_{p-1}\}$ on a $x_p = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \lambda_p^{-1}\lambda_i x_i \in Vect(\mathcal{G}_1)$. D'après la proposition 4.5.2, $\mathcal{G}_1$ est génératrice de E.
   On réitère le procédé. S'il existe $r \in \{1, ..., p\}$ tel que la famille génératrice $\mathcal{G}_r = \{x_1, ..., x_{p-r}\}$soit libre alors G_r est une base de E. Sinon $\mathcal{G}_1 = \{x_1\}$ est liée et génératrice d'où $E = \{0_E\}$ est une base finie de E.
2. D'après 1., E admet au moins une base finie $\mathcal{B}$, notons n le nombre d'éléments de $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Si $\mathcal{B}'$ est infinie ou finie de cardinal $> n$ alors B' contient au moins une famille finie libre L ayant $n + 1$ éléments. Mais $\mathcal{B}$ est génératrice à n éléments et $\mathcal{L}$ libre à $n + 1$ éléments, ce qui contredit le résultat 1. du théorème de l'échange. Donc $\mathcal{B}'$ est finie de cardinal $\leq n$. De même, B' étant libre à n éléments et $\mathcal{B}'$ génératrice, le résultat 1. du théorème de l'échange montre que $n \leq Card(\mathcal{B}')$. Finalement $\mathcal{B}'$ est finie et admet n éléments.

■

Remarque.

– *La preuve précédente établit plus précisément que toute famille génératrice finie d'un* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie contient au moins une base.*
– *On dit qu'un s.e.v F d'un e.v E est de dimension finie si et seulement si l'e.v F est de dimension finie.*
– *On dit parfois qu'un e.v qui n'est pas de dimension finie est de dimension infinie.*
– *Pour tout e.v E de dimension finie,* $\dim(E) = 0 \Longleftrightarrow E = \{0_E\}$.
– *La dimension d'un* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie dépend du corps* $\mathbb{K}$*. Par exemple :*
$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ *de base* $\{1, i\}$*, car* $\forall z \in \mathbb{C} : z = x \cdot 1 + y \cdot i,\ x, y \in \mathbb{R}$*, mais* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ *est de base* $\{1\}$*, puisque* $z = z \cdot 1, z \in \mathbb{C}$.
De même pour $\mathbb{C}^2$ *on a :* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2$*, mais* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) = 4$.

Théorème 8.42. ***(Théorème de la base incomplète)***
Soient E un $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie n, une famille libre a au plus n éléments. Si elle a au moins de n éléments, on peut la compléter de façon à obtenir un base. Si elle a exactement n éléments, c'est une base de E.*

Proposition 8.43. *Soient E un* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie,* $\dim(E) = n$.

1. *Toute famille libre de E est finie et a au plus n éléments.*
2. *Toute famille de E ayant au moins* $n + 1$ *éléments est liée.*
3. *Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.*

Proposition 8.44. *Soient E un* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie,* $\dim(E) = n$, $\mathcal{A}$ *est une famille finie d'éléments de E. Deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :*

1. $\mathcal{A}$ *a n éléments.*
2. $\mathcal{A}$ *est libre.*
3. $\mathcal{A}$ *est génératrice de E.*

Démonstration.

• Montrons que (1. et 2.) $\Longrightarrow$ 3. Supposons $Card(\mathcal{A}) = n$ et $\mathcal{A}$ libre. E admet au moins une base $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$. D'après le théorème de l'échange, comme $\mathcal{B}$ est génératrice et A est libre, on peut remplacer d'au moins une façon n vecteurs de $\mathcal{B}$ par ceux de $\mathcal{A}$ pour obtenir une famille génératrice. Mais comme $\mathcal{B}$ a n éléments, la famille génératrice obtenue est $\mathcal{A}$.

- Montrons que (1. et 3.) $\Longrightarrow$ 2. Supposons $Card(\mathcal{A}) = n$ et $\mathcal{A}$ génératrice. Raisonnons par l'absurde : supposons $\mathcal{A}$ liée. Il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n - \{(0, ..., 0)\}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$. Quitte à permuter $x_1, ..., x_n$ (et $\lambda_1, ..., \lambda_n$), on peut se ramener à $\lambda_n \neq 0$ d'où $x_n = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_n^{-1}\lambda_i x_i \in Vect(x_1, ..., x_{n-1})$. D'après l'affirmation 2. de la Proposition 4.5.2, $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ est génératrice de E, ce qui contredit le point 3. de la Proposition 4.5.3. Ceci prouve que $\mathcal{A}$ est libre.
- Montrons que (2. et 3.) $\Longrightarrow$ 1. Cela résulte simplement du Théorème 4.5.2.

$\blacksquare$

Théorème 8.45. *Soit $\mathcal{B}$ une famille d'émléments de E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{B}$ est une base de E.*
2. *$\mathcal{B}$ est libre et de cardinal n.*
3. *$\mathcal{B}$ est génératrice de E et de cardinal n.*
4. *$\mathcal{B}$ est libre et génératrice de E.*

Exemple 8.46. *Soit $\mathcal{B} = \{u = (1, 2), v = (2, -1)\}$, pour prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, il suffit de prouver que $\mathcal{B}$ est une famille libre de cardinal* 2.

- *$\mathcal{B}$ est libre car*

$$\alpha(1, 2) + \beta(2, -1) = (0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0,$$

- *$card(\mathbb{B}) = 2$.*

D'où $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Remarque. *(dimension$\neq$ cardinal)*
Attention, dans un e.v de dimension finie n, toutes les bases ont le même cardinal, mais il ne faut pas parler de cardinal d'un e.v, ni de dimension d'une base.

S.e.v d'un e.v de dimension finie

Proposition 8.47. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. Tout s.e.v F de E est de dimension finie, et* $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Démonstration. Le résultat est évident lorsque $F = \{0_E\}$.
Supposons $F = \{0_E\}$. Il existe $x_1 \in F$ tel que $x_1 \neq 0$. Notons $\mathcal{L}_1 = \{x_1\}$ qui est libre. Si $\mathcal{L}_1$ engendre F, alors F est de dimension finie et $\dim(F) = 1$. Sinon, il exite $x_2 \in F$ tel que $x_2 \notin Vect(\mathcal{L}_1)$. D'après 2. dans (4.5.2), la famille $\mathcal{L}_2 = \{x_1, x_2\}$ est libre et on réitère le raisonnement. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$, supposons définis $x_1, ..., x_p$ dans F tels que $\mathcal{L}_p = \{x_1, ..., x_p\}$ soit libre. Si $\mathcal{L}_p$ engendre F alors F est de dimension finie et $\dim(F) = p$. Sinon il existe $x_{p+1} \in F$ tel que $x_{p+1} \notin Vect(\mathcal{L}_p)$ et la famille $\mathcal{L}_{p+1} = \{x_1, ..., x_{p+1}\}$ est libre dans F. En notant $n = \dim(E)$, comme toute famille de E ayant au moins $n+1$ éléments est liée, il existe $p \in \{1, ..., n\}$ tel que $\mathcal{L}_p$ engendre F. Ainsi F est de dimension finie et $\dim(F) \leq n$. ■

Proposition 8.48. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie* $\dim(E) = n$, *F un s.e.v de E,* $\dim(F) = p$.

1. *F admet au moins un supplémentaire dans E.*
2. *Tout supplémentaire de F dans E est dimension $n - p$.*

Remarque. *Si*

$$\begin{cases} E \text{ est un } \mathbb{K}\text{-e.v de dimension finie} \\ F,\ G \text{ sont deux s.e.v de } E \text{ supplémentaires dans } E \\ B(\text{resp. } C) \text{ est une base de } F(\text{resp. } G), \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow B \cup C$ *est une base de E.*

Corollaire 8.49. *Soient Eun $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, F et G deux s.e.v de E en somme directe. Alors, on a :*

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Corollaire 8.50. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, F et G deux s.e.v de E.*

$$\text{Si } \begin{cases} F \subset G \\ \dim(F) = \dim(G) \end{cases}, \text{ alors } F = G.$$

Démonstration. F admet au moins un supplémentaire H dans G, et $\dim(H) = \dim(G) - \dim(F) = 0$, d'où $H = \{0_E\}$, $G = F + H = F$. ■

Exemple 8.51. *Soient E et F les s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs* $\{(2, 3, -1), (1, -1, 2)\}$ *et* $\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}$. *Montrer que E et F sont égaux.*

Correction : Pour que deux ensembles X et Y soient égaux, il faut et il suffit que $X \subset Y$ et $Y \subset X$. Dans le cas des e.v de dimension finie, la situation est un peu plus simple : pour que $E = F$ il faut et il suffit que $F \subset E$ et $\dim(E) = \dim(F)$. Appliquons ce critère : E est engendré par deux vecteurs donc $\dim(E) \leq 2$. Les deux vecteurs $(2,3,-1)$ et $(1,-1,-2)$ sont linéairement indépendants donc $\dim(E) \geq 2$ c'est-à-dire : $\dim(E) = 2$. Un raisonnement identique montre que $\dim(F) = 2$. Enfin, les égalités $(3,7,0) = 2(2,3,-1) - (1,-1,-2)$ et $(5,0,-7) = (2,3,-1) + 3(1,-1,-2)$ montrent que $F \subset E$ c'est-à-dire : $E = F$.

Théorème 8.52. ***(Formule de Grassmann ou formule de la dimension)***
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. On a a pour tous s.e.v F, G de E :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration. D'après la Proposition 8.48, $F \cap G$ admet au moins un supplémentaire $F^{'}$ dans F.

1. Montrons que F' et G sont en somme directe et que $F^{'} \oplus G = F + G$.
   - $F^{'} \subset F$ d'où $F^{'} \cap = (F^{'} \cap F) \cap G = F^{'} \cap (F \cap G) = \{0_E\}$.
   - $F + G = (F^{'} + (F \cap G)) + G = F^{'} + ((F \cap G) + G) = F^{'} + G$.
2. D'après le Corollaire 8.49
   $$\begin{cases} \dim(F + G) = \dim(F^{'} \oplus G) = \dim(F^{'}) + \dim G \\ \dim(F) = \dim(F^{'} \oplus (F \cap G)) = \dim(F^{4}) + \dim(F \cap G) \end{cases},$$
   d'où la relation voulue.

■

Exemple 8.53. *Autour du théorème des quatre dimensions.*
Soient E un e.v de dimension finie, F et G deux s.e.v de E. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

1. $F \cap G = \{0_E\}$;
2. $F + G = E$;
3. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Solution : Tout repose sur la formule des quatre dimensions $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ et sur la propriété : si H est un s.e.v de E tel que $\dim(H) = \dim(E)$, alors $H = E$.

- Si 1. et 2. sont vraies, alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$ tandis que $E = F + G$ implique $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
  3. est donc vérifié.

– Si 1. et 3. sont vraies, alors $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) = \dim(E)-0 = \dim(E)$. Ainsi, $F+G$ est un s.e.v de E de même dimension que E : $F+G = E$.
– Si 2. et 3. sont vraies, alors $\dim(E) = \dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) = \dim(E)-\dim(F\cap G)$. On en déduit que $\dim(F\cap G) = 0_E$ et donc que $F\cap G = \{0_E\}$.

8.3.2 Produit cartésien d'e.v de dimensions finies

Proposition 8.54. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. Alors $E\times F$ est de dimension finie et on a :*

$$\dim(E\times F) = \dim(E)+\dim(F).$$

Démonstration. D'après le Théorème 8.41, E et F admettent des bases finies $(e_1,...,e_n)$ et $(f_1,...,f_p)$ respectivement où $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$.
Montrons que $B = ((e_1,0),...,(e_n,0),(0,f_1),...,(0,f_p))$ est une base de $E\times F$.

1. Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n,\mu_1,...,\mu_p)\in\mathbb{K}^{n+p}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(e_i,0)+\sum\limits_{j=1}^{p}\mu_j(0,f_j) = 0_{E\times F}$. On a alors $\left(\sum\lambda_ie_i,\sum\limits_{j=1}^{p}\mu_jf_j\right) = (0_E,0_F)$ d'où $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ie_i = 0_E$ et $\sum\limits_{j=1}^{p}\mu_jf_j = 0_F$, et donc, $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \mu_1 = ... = \mu_p = 0$, puisque $(e_1,...,e_n)$ et $(f_1,...,f_p)$ sont libres. Ceci montre que B est libre.

2. Soit $(x,y)\in E\times F$. Puisque $(e_1,...,e_n)$ et $(f_1,...,f_p)$ engendrent respectivement les s.e.v de E et F, il existe $(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ et $(\mu_1,...,\mu_p)\in\mathbb{K}^p$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$ et $\sum\limits_{j=1}^{p}\mu_jf_j$. On a alors $(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ie_i,\sum\limits_{j=1}^{p}\mu_jf_j.\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(e_i,0)+\sum\limits_{j=1}^{p}\mu_j(0,f_j)$. Ceci montre que B engendre E. Ainsi, B est une base de $E\times F$ donc $E\times F$ est de dimension finie et $\dim(E\times F) = card(B) = n+p = \dim(E)+\dim(F)$.

■

Corollaire 8.55. *Soient $n\in\mathbb{N}^\star$, $E_1,...,E_n$ des $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. Alors $\prod\limits_{i=1}^{n}E_i$ est de dimension finie et on a :*

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{n}E_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(E_i).$$

Démonstration. Récurrence immédiate à partir de la proposition précédente. ■

En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $\dim(\mathbb{K}^n) = n$. La famille $\{e_1,...,e_n\}$ d'éléments de $\mathbb{K}^n$ définie par $e_i = (0,...,0,1,0,...,0)$ où le **1** est à la

$i-ime$ place, $1 \leq i \leq n$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base **canonique** de $\mathbb{K}^n$.

8.3.3 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 8.56. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $\mathcal{A}$ une famille finie d'éléments de E. On appelle rang de A, et on note $rg(A)$, la dimension de s.e.v de E engendré par $\mathcal{A}$*

$$rg(\mathcal{A}) = \dim(Vect(\mathcal{A})).$$

Proposition 8.57. *Pour toutes familles finies $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ d'éléments de E :*

1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \Longrightarrow rg(\mathcal{A}) \leq rg(\mathcal{A}')$,
2. $\max(rg(\mathcal{A}), rg(\mathcal{A}')) \leq rg(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') \leq rg(\mathcal{A}) + rg(\mathcal{A}')$.

Démonstration.

1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \Longrightarrow Vect(\mathcal{A}) \subset Vect(\mathcal{A}') \Longrightarrow \dim(Vect(\mathcal{A})) \leq \dim(Vect(\mathcal{A}'))$.
2. – $\begin{cases} \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \\ \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} rg(\mathcal{A}) \leq rg(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') \\ rg(\mathcal{A}') \leq rg(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') \end{cases}$
   $\Longrightarrow \max(rg(\mathcal{A}), rg(\mathcal{A}')) \leq rg(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}')$.
   – $rg(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') = \dim(Vect(\mathcal{A} \cup A')) = \dim(Vect(\mathcal{A}) + Vect(\mathcal{A}')) \leq \dim(Vect(\mathcal{A})) + \dim(Vect(\mathcal{A}')) = rg(\mathcal{A}) + rg(\mathcal{A}')$, en utilisant 4. de la Proposition 8.29.

■

Proposition 8.58. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $\mathcal{A}$ une famille finie d'éléments de E.*

1. *Le rang de $\mathcal{A}$ est le plus grand cardinal des sous-familles libres de $\mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ est libre si et seulement si $Card(\mathcal{A}) = rg(\mathcal{A})$.*

Démonstration.

1. – Puisque $\mathcal{A}$ est finie, $Vect(\mathcal{A})$ est de dimension finie. D'après la Remarque 8.3.1, il existe une sous- famille $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ qui soit une base de $Vect(\mathcal{A})$ telle que $Card(\mathcal{B}) = rg(\mathcal{A})$.
   – Soit $\mathcal{L}$ une sous-famille libre de $\mathcal{A}$. D'après 1. de la Proposition 8.43, $Card(\mathcal{L}) \leq \dim(Vect(\mathcal{A})) = rg(\mathcal{A})$.
2. – Si $\mathcal{A}$ est libre, d'après 1., $rg(\mathcal{A}) = card(\mathcal{A})$.
   – Réciproquement, si $Card(\mathcal{A}) = rg(\mathcal{A})$, comme $\mathcal{A}$ engendre $Vect(\mathcal{A})$, d'après la Proposition 8.44, $\mathcal{A}$ est une base de $Vect(\mathcal{A})$ et est donc libre.

■

Exemple 8.59. *Soient* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = (v_i)_{1 \leq i \leq 4}$ *où :*

$$v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (-1, 1, -1), v_3 = (0, 1, 1), v_4 = (1, 0, 2).$$

Comme (v_1, v_3) *est libre et que* $v_2 = -v_1$ *et* $v_4 = v_1 + v_3$ *, on trouve* $rg(\mathcal{A}) = 2$.

8.4 Exercices

Exercice 8.1. *Les espaces suivants sont-ils des sous-espace de E ?*

$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : \ x + y + z \leq 1\}, \ E = \mathbb{R}^3.$

$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : \ x + y - 3z = 0\}, \ E = \mathbb{R}^3.$

$F_3 = \{(x, 0, z), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \ E = \mathbb{R}^3.$

$f_4 = \{f \in E : f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}, E = \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$

$F_5 = \{f \in E : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}, E = \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$

$F_6 = \{f \in E : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}, E = \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$

$F_5 = \{(x, y - 2x, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, E = \mathbb{R}^3.$

Exercice 8.2. *Donner la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :*

$$F_1 = \left\{(x, 0, z), (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \ , \ E_2 = \left\{(a, b - 2a, 0), (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

$$E_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - 3z = 0\right\} \ , \ \left\{E_4 = (x - y, y - z, z - x), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

Exercice 8.3. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux ensembles définies de* $\mathbb{R}^3$ *par :*

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\right\} \ , \ E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\right\}.$$

1. *Montrer que* E_1 *et* E_2 *sont deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Donner une basse de* E_1 *et* E_2.
3. *Trouver le sous-espace vectoriel* $E_1 \cap E_2$.
4. *Est-ce que* $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$ *? (Justifier).*

Exercice 8.4. *Même questions de l'exercice précédent avec*

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x + y + z = 0\right\} \ , \ \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y = z\right\}$$

Exercice 8.5. *Soit* $\mathbb{R}_2[X]$ *l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à* 2.

$$\mathbb{R}_2[X] = \{p \in \mathbb{R}[X] : \deg(p) \leq 2\} = \left\{p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[X]\right\}, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

telle que $B = \{1, X, X^2\}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$.

– *Montrer que* $B' = \{X - 1, X^2 - 1, X^2 + 1\}$ *est une autre base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 8.6. *Soit les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *définies par*

$$u_1 = (0,0,1),\ u_2 = (1,0,1),\ u_3 = (1,1,0)$$

1. *Montrer que* $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est une famille libre, en déduisant une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Écrire les vecteurs* $v = (3,0,1)$ *et* $w = (2,1,1)$ *dans la base* B.

Exercice 8.7. *On considère les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *définies par :*

$$u_1 = (2,0,1),\ u_2 = (0,2,1),\ u_3 = (2,2,2).$$

1. *Montrer que les vecteurs* u_1, u_2 *et* u_3 *sont deux à deux linéairement indépendants ?*
2. *La famille* $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est-il libre ?*
3. *Trouver trois bases du sous-espace vectoriel* E *engendré par la famille* $\mathcal{B}$.

Chapitre 9

Applications linéaires

9.1 Définition, propriétés et exemples

Rappelons qu'une application $f : E \longrightarrow F$ d'un ensemble E vers un ensemble F associe à tout élément $x \in E$ un élément et un seul $y \in F$.

Définition 9.1. *Soient E, F deux e.v sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire (ou $\mathbb{K}$-linéaire ou, est un morphisme de $\mathbb{K}$-e.v) si :*

1. *pour tous $x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$;*
2. *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$, $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.*

Proposition 9.2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v, $f : E \longrightarrow F$ une application ; f est linéaire si et seulement si :*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Démonstration.

1. Si f est linéaire alors, pour tout $(\alpha, \beta, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E \times E$:

$$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

2. Réciproquement, si la condition précédente est satisfaite, alors :
   - en prenant $\alpha = \beta = 1$, on obtient $f(x+y) = f(x) + f(y)$, et donc $f(0) = 0$,
   - en prenant $\beta = 0$ ou $y = 0$, on obtient $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ et donc f est linéaire.

■

Exemple 9.3.

1. $Id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x, y)$ *est linéaire car*
   $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Id_{\mathbb{R}^2}(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) &= \alpha(x,y)+\beta(x',y') \\ &= \alpha Id_{\mathbb{R}^2}(x,y)+\beta Id_{\mathbb{R}^2}(x',y'). \end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x+y+z, x-y, x+z)$ *est linéaire, car*
   $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')) &= f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z') = f(x'', y'', z'') \\ &= (x''+y''+z'', x''-y'', x''+z'') \\ &=(\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y'+\alpha z+\beta z', \alpha x+\beta x' \\ &\quad -\alpha y-\beta y', \alpha x+\beta x'+\alpha z+\beta z') \\ &= \alpha(x+y+z, x-y, x+z)+\beta(x+y+z, x-y, x+z) \\ &= \alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z'). \end{aligned}$$

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$ *n'est pas linéaire, car*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha x+\beta y) = (\alpha x+\beta y)^2 \neq \alpha x^2+\beta y^2 = \alpha f(x)+\beta f(y).$$

Propriétés 9.4. *Si* $f : E \longrightarrow F$ *est linéaire, alors*

(i) $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$;

(ii) $f(0) = 0$;

(iii) $\forall x_1 ..., x_n \in E, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}, f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Corollaire 9.5. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie,* F *un* $\mathbb{K}$*-e.v,* $B = (e_1, ..., e_n)$ *une base de* E*,* $f \in \mathcal{L}(E, F), x \in E, (x_1, ..., x_n)$ *les composantes de* x *dans la base* B *(c'est-à-dire :* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$*) . On a alors :*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

Notations et terminologie

- On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- Une application linéaire d'un e.v dans lui-même est appelé endomorphisme, on note $\mathcal{L}(E)$ (ou $\mathcal{K}_E$) l'ensemble des endomorphismes de E. Et on a donc $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective d'espaces vectoriels est un isomorphisme . On dit aussi que, E et F sont isomorphes.

- Un endomorphisme bijectif s'appelle automorphisme, on note $\mathcal{GL}(E)$ (ou $\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$) l'ensemble des automorphismes de E.
- Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Remarque. *L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ de toutes les applications linéaires du $\mathbb{K}$-e.v E vers le $\mathbb{K}$-e.v F peut-être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ par*

- *addition : $f + g : E \longrightarrow F$ telle que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in E$;*
- *multiplication externe : $\alpha \cdot f : E \longrightarrow F$ telle que $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.*

Définition 9.6. *Une application linéaire d'un e.v E dans son corps de base $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}$ considéré comme e.v sur lui-même) est appelée **forme linéaire**. L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est noté E^* et appelé e.v **dual** de l'espace vectoriel E.*

Remarque. *Rappelons que si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont deux applications, on peut les composer pour en faire une application, notée $g \circ f$ de E dans G définie ainsi :*

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{array}$$

Lemme 9.7. *La composée $g \circ f$ de deux applications linéaires $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ est une application linéaire de E vers G.*

Remarque. *Soit toujours E un espace vectoriel. On note $Id_E : E \longrightarrow E$ l'application identité de E qui à tout vecteur $x \in E$ associe x lui-même. C'est évidemment une application linéaire.*

9.1.1 Noyau - Image. Surjectivité, injectivité

Faisons d'abord quelques rappels.

- une application f d'un ensemble E vers un ensemble F est **injective** si $\forall x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.
- une application f d'un ensemble E vers un ensemble F est **surjective** si tout élément de F peut s'écrire comme image d'un élément de E (ce qu'on traduit généralement par : pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$).
- une application $f : E \longrightarrow F$ est **bijective** si elle est, à la fois, injective et surjective.

Définition 9.8. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-e.v.*

– *On appelle image de f, et on note $Im(f)$, le s.e.v de F défini par :*

$$Im(f) = f(E) = \{y \in F;\ \exists x \in E \text{ avec } f(x) = y\} = \{f(x) \setminus x \in E\}.$$

– *Pour tout s.e.v H de F, on définit l'image réciproque de H par f comme*

$$f^{-1}(H) = \{x \in E; f(x) \in H\},$$

et $f^{-1}(H)$ est un s.e.v de E.

– *Cas particulier : lorsque $H = \{0\}$, l'image réciproque est le s.e.v de E, noté*

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E; f(x) = 0\}.$$

qui est un s.e.v de E appelé noyau de f (la notation vient de l'anglais "kernel").

Proposition 9.9.

(i) *Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0\}$.

(ii) *Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.*

Démonstration.

(i) Supposons f injective et $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0 = f(0)$, d'où, comme f est injective $x = 0$.

Inversement, si $\ker(f) = \{0\}$, supposons que $f(x) = f(x')$, d'où $0 = f(x) - f(x') = f(x - x')$, c'est-à-dire : $x - x' \in \ker(f) = \{0\}$, donc $x - x' = 0$ ou encore $x = x'$.

(ii) f surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) \Longleftrightarrow f(E) = F \Longleftrightarrow Im(f) = F.$.

■

Notons que pour calculer le noyau d'une application linéaire, on doit résoudre l'équation $f(x) = 0$ qui se traduit, lorsque l'on fixe des bases de E et de F par la résolution d'un système d'équations linéaires.

Exemple 9.10. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x + z, y + z, x + z)$, f est-elle injective, surjective, bijective ?*
On commence par calculer le noyau de f :
On cherche donc l'ensemble des $X = (x, y, z)$ tels que $f(X) = 0$, ce qui se traduit par le système

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = z(-1, -1, 1), z \in \mathbb{R}.$$

Le noyau est donc engendré par le vecteur $(-1,-1,1) \neq (0,0,0)$. *Donc* f *n'est pas injective. Pour déterminer l'image (soit par des équations, soit par une base), on utilise les vecteurs* $f(e_1) = (1,0,1)$, $f(e_2) = (0,1,0)$, $f(e_3) = (1,1,1)$ *qui forment un famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$ *et on cherche le rang de cette famille de la façon habituelle. On en déduit aussi que* f *n'est pas surjective (car* $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$*). Donc, on conclut que* f *n'est pas bijective.*

Remarque. *Soit* $f : E \longrightarrow E$ *une application linéaire d'un e.v* E *dans lui-même (on parle d'endomorphisme) et* G *un s.e.v de* E. *En général, pour* $x \in G$, *il n'y a aucune raison pour que* $f(x) \in G$. *Mais, si, pour tout* $x \in G$, $f(x)$ *appartient à* G, *on dit que* G *est stable par* f. *Quand ceci est vrai, la restriction de* f *à* G *devient une application de* G *dans lui-même. On peut se servir de cette remarque pour ramener l'étude de l'espace sur lequel* f *agit à l'étude de* $f_G : G \longrightarrow G$ *avec* $\dim G < \dim E$.

Proposition 9.11. *Si* $f : E \longrightarrow F$ *est une application linéaire bijective, il existe une application linéaire* $g : F \longrightarrow E$ *telle que* $g \circ f = Id_E$ *et* $f \circ g = Id_F$.

Définition 9.12. *L'application* g *de la proposition ci-dessus est appelée application réciproque de* f *et notée* f^{-1}.

Remarque. *Si* $f : E \longrightarrow F$ *est une application (linéaire) quelconque, on aura soin de ne pas confondre la notation ci-dessus avec la notation* $f^{-1}(H)$ *où* H *est un s.e.v de* F. *Dans le cas où* f *n'est pas bijective, il n'existe pas d'application réciproque à* f, *mais la notation* $f^{-1}(H)$ *a bien un sens.*

9.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 9.13. $\mathcal{L}(E,F)$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v pour les lois usuelles.*

Démonstration. On va montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un s.e.v de F^E.

1. $\mathcal{L}(E,F) \neq \emptyset$ puisque l'application nulle $0 : E \longrightarrow F$ est à l'évidence linéaire.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. On a pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(\lambda_1 x + \lambda_2 y) &= \alpha f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) + \beta g(\lambda_1 x + \lambda_2 y)\\ &= \alpha((\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)) + \beta(\lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(y))\\ &= \lambda_1(\alpha f(x) + \beta g(x)) + \lambda_2(\alpha f(y) + \beta g(y))\\ &= \lambda_1(\alpha f + \beta g)(x) + \lambda_2(\alpha f + \beta g)(y).\end{aligned}$$

   Ceci montre que $\alpha f + \beta g$ est linéaire donc $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E,F)$.

■

Proposition 9.14. *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v. On a :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g \in \mathcal{L}(F,G), g \circ f \in \mathcal{L}(E,G).$$

Démonstration. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2, (g \circ f)(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = g(f(\lambda_1 x + \lambda_2 y)) = g(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)) = \lambda_1 g(f(x)) + \lambda_2 g(f(y)) = \lambda_1 (g \circ f)(x) + \lambda_2 (g \circ f)(y)$. ■

Proposition 9.15. *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v. On a :*

1. $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F), \forall g \in \mathcal{L}(F,G), g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$ *(pseudo-distributivité à gauche).*
2. $\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G), (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$ *(pseudo-distributivité à droite).*
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g \in \mathcal{L}(F,G), (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f) = \alpha(g \circ f)$.

Démonstration.

1. $\forall x \in E, (g \circ (f_1 + f_2))(x) = g((f_1 + f_2)(x)) = g(f_1(x)) + g(f_2(x)) = (g \circ f_1)(x) + (g \circ f_2)(x) = (g \circ f_1 + g \circ f_2)(x)$.
2. $\forall x \in E, ((g_1 + g_2) \circ f)(x) = (g_1 + g_2)(f(x)) = g_1(f(x)) + g_2(f(x)) = (g_1 \circ f)(x) + (g_2 \circ f)(x) = (g_1 \circ f + g_2 \circ f)(x)$.
3. $\forall x \in E, \begin{cases} ((\alpha g) \circ f)(x) = (\alpha g)(f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha(g \circ f)(x) = (\alpha(g \circ f))(x) \\ (g \circ (\alpha f))(x) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)). \end{cases}$

■

Proposition 9.16. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si f est un isomorphisme de E sur F alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.*

Démonstration. Supposons que f soit linéaire et bijective et montrons que $f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui est déja bijective, est linéaire. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, (x', y') \in F^2$. On a : $f^{-1}(\lambda_1 x' + \lambda_2 y') = f^{-1}(\lambda_1 f(f^{-1}(x')) + \lambda_2 f(f^{-1}(y'))) = f^{-1}(f(\lambda_1 f^{-1}(x') + \lambda_2 f^{-1}(y'))) = \lambda_1 f^{-1}(x') + \lambda_2 f^{-1}(y')$, et donc f^{-1} est linéaire. ■

Définition 9.17. *Deux $\mathbb{K}$-e.v E et F sont dits isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v de E sur F.*

Lemme 9.18. *Soit f une application linéaire de E dans F, alors on a :*

1. *f est injective $\Longleftrightarrow$ pour toute partie libre A de E, $f(A)$ est libre dans F.*

2. *f est surjective $\Longleftrightarrow$ pour toute partie génératrice A de E, $f(A)$ est une partie génératrice de F.*

Proposition 9.19.

1. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. Pour que E et F soient isomorphes, il faut et il suffit que* $\dim(E) = \dim(F)$.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Tout $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration.

1. Supposons que E et F soient isomorphes, il existe donc un isomorphisme f de E sur F. L'e.v E admet au moins une base $\mathcal{B}$ et donc $f(\mathcal{B})$ est une base de F d'où $\dim(F) = Card(f(\mathcal{B})) = Card(\mathcal{B}) = \dim(E)$.
   Réciproquement, supposons $\dim(E) = \dim(F)$ alors E (resp. F) admet une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ (resp. $C = (e'_1, ..., e'_n)$), où $n = \dim(E) = \dim(F) \in \mathbb{N}$. Considérons $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, E)$ définies par : $\forall i \in \{1, ..., n\}, (f(e_i) = e'_i$ et $g(e'_i) = e_i)$. Il est clair que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ donc f et g sont bijectives, réciproques l'une de l'autre. Ainsi, f est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v de E sur F.

2. Résulte de 1., puisque $\dim(E) = \dim(\mathbb{K}^n) = n$.

■

Remarque. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ *est un anneau.*

9.2.1 Théorème du rang

Définition 9.20. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de f, on note $rg(f)$ la dimension de l'image de f, i.e., $rg(f) = \dim f(E)$.*

Une conséquence immédiate de cette définition est que f est surjective si et seulement si $rg(f) = \dim F = \dim Im(f)$.

Théorème 9.21. *(**Théorème du rang**) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire (E étant nécessairement de dimension finie), alors*

$$\dim \ker(f) + rg(f) = \dim E.$$

Démonstration. Prenons une base $(v_1, ..., v_n)$ de $\ker(f)$ et prolongeons-la en une base $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n)$ de E.
Alors la famille $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ engendre l'image $f(E)$ (facile à vérifier). Je prétends que le système $f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ est libre. En effet : $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(v_i) = 0$ implique, par linéarité, que $f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i\right) = 0$, d'où $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \in \ker(f)$. Or, nous avons une base de $\ker(f)$ qui est $(v_1, ..., v_k)$; on peut donc écrire $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$. En faisant tout passer dans le premier membre, on obtient $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = 0$ ce qui implique, du fait que les v_i forment une base de E que tous les μ_i (et aussi les λ_i) sont nuls. Le système $\{f(v_{k+1}, ..., f(v_n)\}$ est donc libre et générateur, il forme donc une base ; d'où $\dim f(E) = n - k = \dim E - \ rg(f)$. ∎

Corollaire 9.22. *Soit f une application linéaire de E dans F telle que* $\dim E = \dim F$, *alors f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective $\Longleftrightarrow$ f bijective.*

Les preuves sont des conséquences immédiates du Théorème. En effet, f injective $\Longrightarrow \dim \ker(f) = 0 \Longrightarrow \dim Im(f) = \dim E = \dim F \Longrightarrow Im(f) = F \Longrightarrow f$ surjective $\Longrightarrow \dim \ker(f) = \dim E - \dim Im(f) = \dim E - \dim F = 0$.

Conséquences :

* Deux e.v (de dimension finies) isomorphes ont même dimension.
* Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire injective, alors $\dim E \leq \dim F$.
* Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire surjective, alors $\dim E \geq \dim F$.

9.3 Exercices

Exercice 9.1. *Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{f_1, f_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.*

1. *Trouver l'expression de l'application f qui vérifie*

$$f(e_1) = 2f_1 - f_2, \ f(e_2) = f_1 + f_2, \ f(e_3) = 2f_1 + f_2.$$

Exercice 9.2. *Soient f et g deux applications définies par :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, x, y + x) \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (-x + y + z, x - y + z) \end{array}$$

1. *Montrer que f et g deux applications linéaire.*
2. *En utilisant le théorème du rang : est-ce que f est surjective ? g est injective ?*
3. *En déduire* $\dim \ker f$, $\dim\ Imf$, $\dim \ker g$ *et* $\dim\ Img$.
4. *Trouver l'image de* $v_1 = (1,8)$, $v_2 = (0,3)$ *par l'application* f.
5. *Les vecteurs* $f(v_1)$ *et* $f(v_2)$ *sont-ils linéairement indépendants ?*
6. *Trouver les expressions de chacune des applications* $f \circ g$ *et* $g \circ f$.

Exercice 9.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.*

1. *Est-ce que si les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$ sont linéairement indépendants de F, alors les vecteurs $f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)$ sont les aussi. ?(Trouver la condition)*
2. *Montrer que si les vecteurs $f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)$ de F sont linéairement indépendants, alors les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$ sont les aussi.*

Exercice 9.4. *On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :*

$$u_1 = (2,3,-1),\ u_2 = (1,2,1),\ v = (5,x,-1).$$

1. *Montrer que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants.*
2. *En déduire une base B pour l'espace vectoriel E engendré par les vecteurs u_1 et u_2.*
3. *Déterminer la valeur de x pour que le vecteur v soit dans le sous-espace vectoriel E (i.e., $x \in E$).*
4. *Trouver le sous-espace vectoriel H complément du sous-espace vectoriel E dans $\mathbb{R}^3$.(i.e.,Trouver le complément de la famille $\mathcal{B}$).*

Exercice 9.5. *Soit $\mathbb{R}^3$ un espace vectoriel muni de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, et soit f une fonction définie par :*

$$f(x,y,z) = (2x - 2y + z, 2x - 3y + 2z, -x + 2y).$$

1. *Montrer que f est une application linéaire.*
2. *Donner le noyau et l'image de cette application.*
3. *Calculer la dimension des* $\ker f$ *et Imf. (Vous pouvez utiliser le théorème du rang).*
4. *f est une injection ? surjection ? bijection ? (Justifier).*
5. *Trouver la matrice A associé à cette application suivant la base B.*
6. *En déduire le rang de A.*

Bibliographie

[1] K. Allab. Éléments d'analyse. Fonctions d'une variable réelle, 1re et 2e année d'université, Tome 1. Écoles scientifiques. Office des Publications Universitaires, 2007.

[2] H. Anton and C. Rorres. Elementary linear Algebra. Applications Version. John Wiley et Sons, Inc. New York, 2000.

[3] B. Boussouis, Cours d'analyse 1, Filière SMA-SMI, Université Mohamed Ben Abdellah, Faculté des sciences Dhar El Mehraz, Département de mathématiques, 2014-2015.

[4] R. Dalang and A. Caabouni. Algèbre linéaire, Aide-mémoire, exercices et applications.

[5] G. Faccanoni, Algèbre linéaire Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire, MP33/M331, 2014. http ://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html.

[6] J.M. Ferrard, Cours de mathématiques. www.klubprepa.net.

[7] A. Giroux, Analyse 1, Notes de cours, Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal, 2004.

[8] A. Hitta, Cours Algèbre et Analyse I, Mathématiques et informatique, Université 8 Mai 1945 - Guelma, 2008-2009.

[9] J. M. Monier, Algèbre I, Cours et 600 exercices corrigés, 1re année MPSI,PCSI, PTSI, 2e édition, Dunod, Paris, 2000.

[10] J. M. Monier, Analyse MPSI, Cours, méthodes et exercices corrigés, 5e édition, Dunod, Paris, 2006.

[11] P. Malbos, Analyse matricielle et algèbre linéaire appliquée, Notes de cours et de travaux dirigés. Université Claude Bernard, Lyon 1. Licence Sciences, Technologies, Santé. Enseignement de mathématiques des parcours Informatique.

[12] M. Mechab, Cours d'algèbre, Maths1, LMD Sciences et Techniques, mustapha.mechab@gmail.com.

[13] L. Pujo-Menjouet, Analyse 1, Licence Sciences, Technologies et Santé, Spécialité Mathématiques, Université Claude Bernard, Lyon I.

[14] L. Smoch, Algèbre - Semestre 2, Licence 1 Sciences et Technologies, Université du Littoral - Côte d'Opale, La Citadelle, 2009.

[15] L. Thomas, Algèbre Linéaire, École polytechnique Fédérale de Lausanne, Bachelor 1ère année 2009 - 2010, Génie Civil et Sciences et Ingénierie de l'Environnement.

[16] W. Raudin, Principes d'analyse mathématique, University of Wisconsin-Madison, Ediscience international, 1995.

[17] [http ://mp.cpgedupuydelome.fr] édité le 24 septembre 2016.