REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université de Mohammed Seddik BEN YAHIA - Jijel
Faculté des Sciences & Technologie
Département d'Electronique

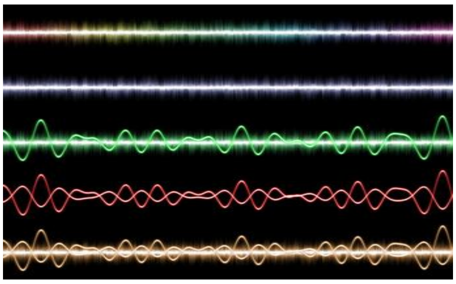
Support de cours

Destiné aux étudiants de 2ème année Licence

Filières : Electronique et Télécommunication

Théorie du Signal

Cours & exercices



Réalisé par :

Dr. Hassina MERDJANA

Manuscrit élaboré selon le programme officiellement agréé et confirmé par le CNPDST

Année Universitaire 2017 / 2018

Programme

Semestre: S4

Unité d'enseignement: UEF 2.2.2

Matière: Théorie du signal

Crédits: 02

Coefficient: 02

Volume horaire hebdomadaire : 1h30 de cours, 1h30 de TD

Volume horaire Semestriel : 45h00 de cours (15 semaines)

Mode d'évaluation : Contrôle continu 40% ; Examen final 60%

Objectifs de l'enseignement

Acquérir les notions de base pour le traitement du signal et les processus aléatoires.

Connaissances préalables recommandées

Cours de mathématiques de base.

Contenu de la matière

Chapitre 1. Généralités sur les signaux (3 semaines)

Signaux analogiques / discrets, Signaux particuliers, Signaux déterministes et signaux aléatoires, Notions de puissance et énergie.

Chapitre 2. Analyse de Fourier **(2 semaine)**

Introduction, Séries de Fourier, Transformée de Fourier, Théorème de Parseval.

Chapitre 3. Transformée de Laplace **(3 semaines)**

Propriétés de la transformée de Laplace, Analyse temporelle et fréquentielle.

Chapitre 4. Produit de Convolution **(2 semaines)**

Formulation du produit de convolution, Propriétés du produit de convolution, produit de convolution et impulsion de Dirac, Déconvolution.

Chapitre 5. Corrélation des signaux **(2 semaines)**

Intercorrélation entre les signaux, Autocorrélation, Propriétés de la fonction de corrélation, Cas des signaux périodiques.

Chapitre 6. Echantillonnage et Signaux discrets **(3 semaines)**

Signaux discrets, Echantillonnage réel, Echantillonnage idéalisé, Théorème d’échantillonnage, Transformée en Z.

Mode d’évaluation

Contrôle continu : 40% ; Examen final : 60%.

Avant-propos

Ce cours de théorie du signal est destiné aux étudiants de deuxième année Electronique et Télécommunication. Il correspond au programme officiel du module « Théorie du signal » enseigné en $2^{ème}$ année Sciences et technologie, Filières Electronique et Télécommunication.

La *théorie du signal* a pour objectif fondamental la « description mathématique » des signaux. Cette représentation commode du signal permet de mettre en évidence ses principales caractéristiques (distribution fréquentielle, énergie, etc.) et d'analyser les modifications subies lors de la transmission ou du traitement de ces signaux.

Ce manuel rédigé avec un souci permanent de simplicité est structuré en six chapitres. Les cinq premiers sont consacrés aux bases de la théorie des signaux analogiques. La transformation des signaux analogiques en signaux numériques est étudiée au chapitre 6 qui présente en particulier le théorème d'échantillonnage.

A la fin de chaque chapitre, quelques exercices sont proposés.

Dr Hassina MERDJANA

Table des matières

4. Produit de Convolution

5. Corrélation des signaux

6. Echantillonnage et Signaux discrets

Chapitre 1

Généralités sur les signaux

1. Introduction

Le traitement du signal peut être défini comme l'ensemble des connaissances scientifiques et technologiques qui permettent la réalisation d'une chaine d'acquisition et le traitement de l'information. C'est une discipline ou se rencontrent des savoir-faire mathématiques, électroniques, informatiques et des problèmes physiques d'origine très diverses (mécanique, génie électrique, optique acoustique, etc…).

Les signaux et les systèmes peuvent être représentés dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel et chaque représentation a son importance dans la théorie et le traitement du signal. Cette dualité entre les deux domaines de description est la base du traitement du signal.

Cependant, certains signaux (signaux déterministes) sont insuffisants pour décrire l'ensemble des phénomènes rencontrés en traitement du signal. Certains phénomènes tels que le bruit thermique dans les composants électroniques, le bruit électromagnétique d'origine cosmique et environnement industriel sont de nature complexe et dépendent d'une certaine manière des lois de hasard.

On est donc amené pour les traiter, à les considérer comme des processus aléatoires. Chaque processus aléatoire est décrit par un signal aléatoire dont il constitue une manifestation type. De tels signaux ne possèdent pas une représentation analytique, ils peuvent toutefois être caractérisés par des propriétés statistiques et fréquentielles.

2. Définition

Un signal est défini comme une quantité physique quelconque porteuse d'information, qui varie avec le temps t, l'espace x ou une autre variable ou plusieurs variables indépendantes.

Exemple :

$$\left.\begin{array}{r} s_1(t) = 5t \\ s_2(t) = 20t^2 \end{array}\right\} \quad \text{Signaux à une variable}$$

$$s(x; y) = 4x + 9xy + 5y^2 \quad \text{Signal à deux variables}$$

3. Caractéristiques des signaux

A cette notion de signal, est associé plusieurs modes de caractérisation

1- Un signal à temps continu s(t) correspond à une grandeur dont la valeur existe à chaque instant t. Un tel signal est dit également analogique (analog signal). C'est un signal à amplitude et temps continus.
2- Un signal à temps discret (Discrete Time Signal) correspond à une grandeur dont la valeur n'est disponible qu'à certains instants t_n. C'est un signal à amplitude continu et temps discret.
3- Un signal numérique est un signal à amplitude et temps discret.
4- Un signal est dit causal s'il est nul pour tous les instants négatifs

$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0.$$

5- Un signal est dit pair s'il satisfait la relation $s(t) = s(-t), \ \forall\, t.$
6- Un signal est dit impair s'il satisfait la relation $s(-t) = -s(t), \ \forall\, t.$

4. Classification des signaux

La figure suivante résume la classification des signaux

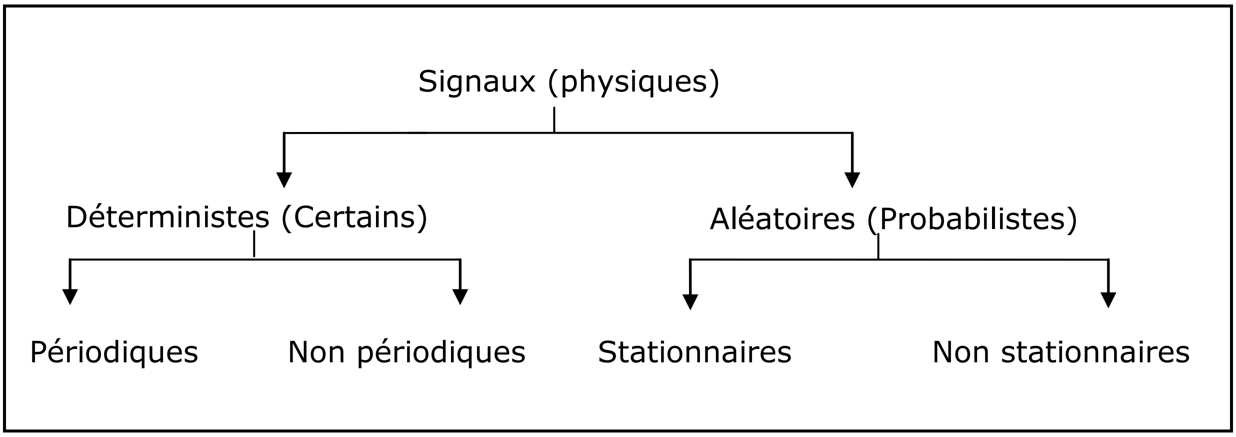


Figure 1.1 : Classification des signaux

- **Signal déterministe** : un signal est dit déterministe si son évolution en fonction du temps peut être prédite par un modèle mathématique pour n'importe quel instant t. Il peut être de nature périodique ou apériodique.

  Signal périodique : un signal est dit périodique s'il satisfait la relation

  $s(t) = s(t + nT) \quad n \in N$ et T : période du signal

  Exemple : les signaux sinusoïdaux : $s(t) = A cos(2\pi f t + \varphi)$.

  Signal apériodique : un signal est dit apériodique s'il ne satisfait pas la relation précédente.

  Exemple : $s(t) = A\, e^{-\alpha t}$

- **Signal aléatoire** : un signal est aléatoire si son évolution en fonction du temps est imprévisible. Un tel signal est gouverné par des lois statistiques.

  Exemple : Le signal électrocardiogramme ECG.

  Le signal électroencéphalogramme EEG.

  Le signal parole et le signal image.

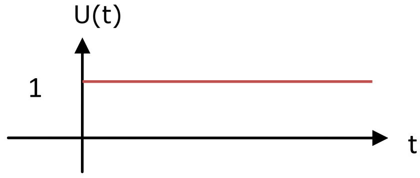
  Signal stationnaire : c'est un signal dont les propriétés statistiques sont indépendantes du temps.

  Signal non stationnaire : il s'agit d'un signal dont les caractéristiques statistiques varient en fonction du temps.

5. Signaux particuliers

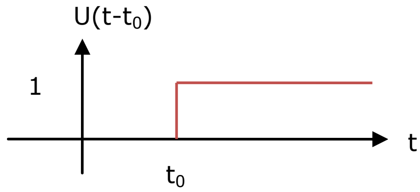
❖ Echelon unité (saut unité) ou fonction de Heaviside U(t)

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$



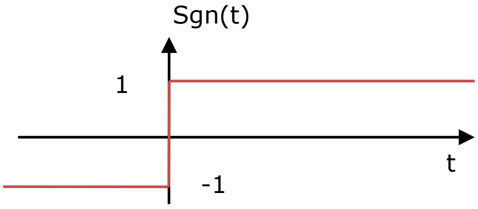
Version décalée de l'échelon

$$U(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > t_0 \\ 0 & \text{pour } t < t_0 \end{cases}$$



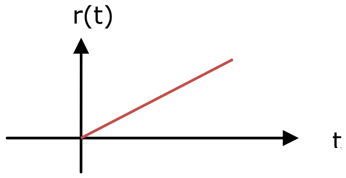
❖ Fonction signe Sgn(t)

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



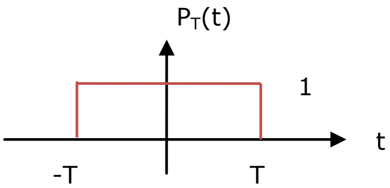
❖ Fonction rampe r(t)

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



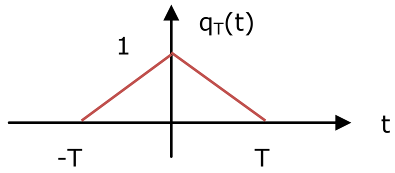
❖ Impulsion rectangulaire rect $(\frac{t}{\Delta})$ ou fonction porte $P_T(t)$

$$P_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -T < t < T \\ & 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$



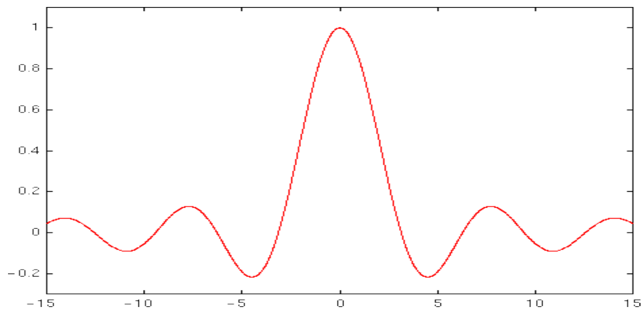
❖ Impulsion ou fonction triangulaire $\mathrm{tri}(\frac{t}{\Delta})$ ou $q_T(t)$

$$q_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases}$$



❖ Fonction sinus cardinal Sincx

La fonction sinus cardinal est définie par : $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\mathrm{sinx}}{x}$

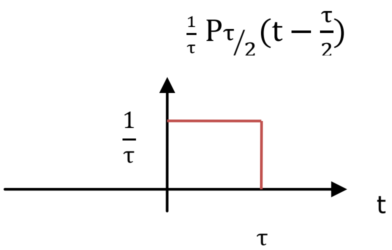


$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{sinx}}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sinx}}{x} = 1$

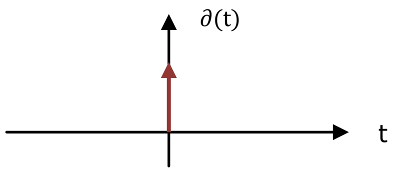
❖ Impulsion de Dirac $\partial(t)$

$$\partial(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} P_{\tau/2}(t - \frac{\tau}{2})$$

L'impulsion de Dirac peut être obtenue à partir d'une impulsion rectangulaire de durée τ et d'amplitude $\frac{1}{\tau}$ auquel on fait tendre τ vers zéro. Il s'agit d'une fonction qui est nulle partout sauf à l'origine ou elle est égale à l'infini.

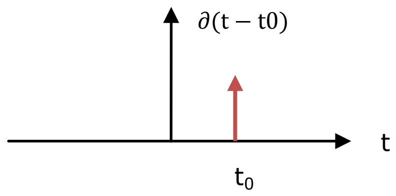


$\underset{T\to 0}{\Longrightarrow}$



L'aire de l'impulsion rectangulaire est égale à l'unité, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \partial(t)\, dt = 1$.

Sa version décalée est



Propriétés de l'impulsion de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial(t)\, dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \partial(t)\, dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \partial\,(t - t_0)\, dt = f(t_0)$$

$$\partial(a.t) = \frac{1}{|\,a\,|}\,\partial(t)$$

$\partial(t) = \frac{du(t)}{dt}$ (C'est la dérivée de l'échelon unité)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial'(t)\, f(t)\, d(t) = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial^{(n)}(t)\, f(t)\, dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

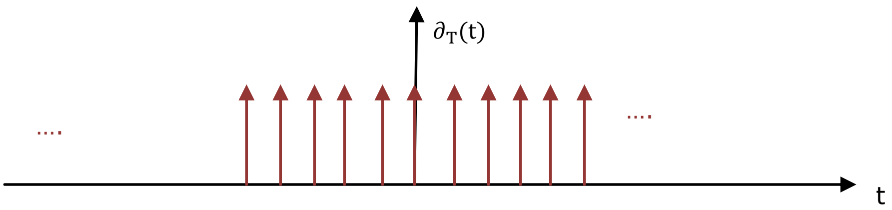
$$f(t).\partial^{(n)}(t) \overset{eq}{\rightarrow} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}\, f^{(k)}(0)\ \partial^{(n-k)}(t)$$

$$f(t).\partial^{(n)}(t-t_0) \overset{eq}{\rightarrow} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, f^{(k)}(t_0)\ \partial^{(n-k)}(t-t_0)$$

Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac noté $\partial_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \partial(t - nT)$ est une fonction périodique de période T. Il est défini comme une suite d'impulsions de Dirac espacés de T sur l'axe des temps.

$$\partial_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \partial(t - nT) = \cdots \partial(t + 2T) + \partial(t + T) + \partial(t) + \partial(t - T) + \partial(t - 2T) + \ \ldots.$$



Le tableau suivant contient les transformées de Fourier les plus utilisées

x(t)	X(ω)	x(t)	X(ω)
$\partial(t)$	1	$e^{-a\|t\|}, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\partial(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$e^{-a\|\omega\|}$
1	$2\pi\,\partial(\omega)$	$e^{-at^2}\ ,\ \ a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{j\omega t_0}$	$2\pi\,\partial(\omega - \omega_0)$	$P_a(t)$	$2a \sin\frac{\omega a}{\omega a}$
U(t)	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	$\sin\frac{at}{\pi t}$	$P_a(\omega)$
U(-t)	$-\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	sgnt	$\frac{2}{j\omega}$

$e^{-at}U(t), a > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	$Q_T(t)$	$T\, sinc^2(\frac{\omega T}{2}$
$t\, e^{-at}U(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \partial(t - kT)$	$\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \partial(\omega - k\omega_0)$

Tableau 1.1 : Transformées de Fourier les plus communes

6. Energie et puissance d'un signal

Le signal dans les circuits électriques est généralement une tension ou un courant. L'énergie dissipée pendant une durée donnée dans une résistance présentant à ses bornes une tension v(t) est : $E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{V^2(t)}{R}\, dt$

En courant : $E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} Ri^2(t)dt$

L'énergie est, dans chaque cas, proportionnelle à l'intégrale du carré du signal.

Si on considère une énergie normalisée, R est égale à l'unité et on obtient

$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt$. Si le signal est complexe, cette énergie devient

$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, f^*(t)\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\, dt$. (énergie définie pour une durée finie)

En considérant un intervalle s'étendant sur tout l'axe réel, on obtient

- L'énergie totale d'un signal f(t)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\, f(t)\, |^2\, dt$$

Exemple

Soit $f(t) = A\, e^{-a|t|} \quad a > 0$

$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{A}^2}{2} < \infty \;\rightarrow\;$ Signal à énergie finie

- La puissance moyenne d'un signal est définie par

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\, dt$$

Exemple

soit f(t) = A

P = $A^2 < \infty \;\rightarrow\;$ Signal à puissance moyenne finie

Remarque

Du point de vue énergétique, les signaux peuvent être classés en deux principales catégories

- Les signaux à énergie finie qui satisfont à la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{f(t)}|^2 < \infty$$

- Les signaux à puissance moyenne finie qui satisfont à

$$0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\, dt < \infty$$

7. Exercices

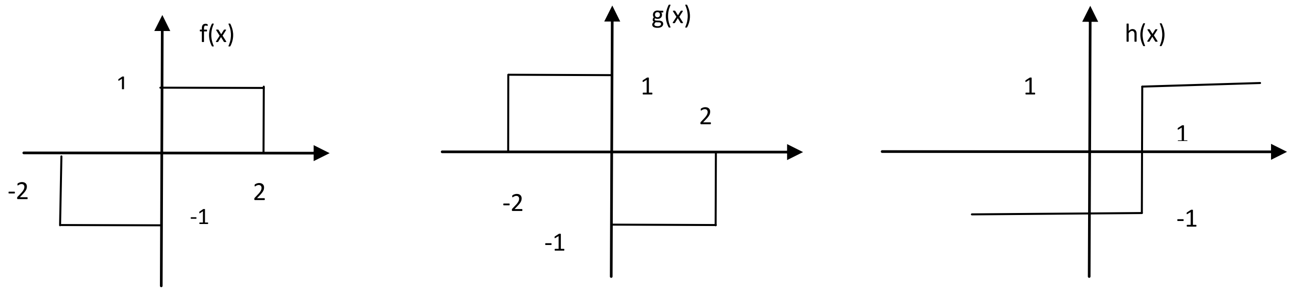
Exercice 1 :

Tracer les signaux suivants

- $2P_1(t)$; $2P_1(-t)$; $2P_1(t-1)$; $2P_1(t-1)$; $2P_1(t+1)$; $-2P_1(t-1)$.
- $AU(t)$; $-AU(t)$; $AU(-t)$; $-AU(t-2)$; $AU(-t-2)$; $tU(t)$.
- $q_1(t)$; $2q_1(t+1)$; $2q_1(t-1)$.
- $tP_1(t-1) + 2P_1(t-3)$; $\frac{t}{|t|}$
- $A\delta(t)$; $A\delta(t-2)$; $A\delta(t-2) + B\delta(t+2)$

Exercice 2 :

Trouver l'expression des signaux suivants



Exercice 3 :

Calculer l'énergie des signaux suivants

$U(t)$; $t.U(t)$; $A.P_T(t)$; $A.U(t).e^{-at}$ $a>0$

Exercice 4 :

Calculer la puissance moyenne des signaux suivants

$U(t)$; $tU(t)$; $A\sin\omega t$; $A\sin\omega t\ u(t)$.

Chapitre 2

Analyse de Fourier

1. Introduction

Il existe deux domaines de description du signal selon la nature de la variable indépendante.

Le domaine temporel de la forme s(t) dans lequel la variable indépendante est le temps. Il s'agit du domaine de discipline usuel des signaux. Dans ce domaine, de représentation, le signal peut être caractérisé par sa durée, sa période fondamentale ou son amplitude.

Le domaine de fréquence de la forme S(f) dans lequel la variable indépendante est la fréquence f dont la dimension est l'inverse du temps $f = \frac{1}{T}$. Dans ce domaine de représentation, le signal peut être caractérisé par sa bande passante, sa fréquence fondamentale ou sa phase.

Ces deux domaines de description du signal sont reliés entre eux par la transformée de Fourier notée TF. Cette transformée joue un rôle fondamental en théorie du signal.

2. Rappel sur la série de Fourier

La série de Fourier est une représentation des signaux périodiques.

- **Forme trigonométrique**

Si f(t) est périodique, elle peut se mettre sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\,\omega_0 t$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n2\pi f_0 t + b_n \sin n\,2\pi f_0 t$$

$a_0 = \int_{(T)} f(t)dt$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\ \cos 2\pi n f_0 t\ dt$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t) \sin 2\pi n f_0 t\, dt$

La représentation des a_n et b_n en fonction de f_0 s'appelle spectre de f(t) ; c'est un spectre discret (un ensemble de raies).

Remarque

- Si f(t) est paire : $b_n = 0$;
- Si f(t) est impaire : $a_0 = a_n = 0$;

- **Forme complexe**

Sachant que : $e^{-jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t$

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn\omega_0 t}$ avec $C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$ = coefficient de Fourier.

En posant $C_n = C(nf_0)$, on obtient le spectre de fréquence qui est une grandeur en général complexe. Ce spectre peut se décomposer en

- Un spectre d'amplitude $|\, C(nf_0)\, |$

- Un spectre de phase $\varphi(nf_0)$

Ce spectre $C(nf_0) = |C(nf_0)|\ e^{j\varphi(nf_0)}$ est composé de raies ; il s'agit d'un spectre discret.

Exemple :

soit le signal s(t) de période T, défini sur [0, T/2] par

$$s(t) = \begin{cases} A & t \in [0\ \ {}^{T}/_{4}] \\ -A & t \in [{}^{T}/_{4}\ \ {}^{T}/_{2}] \end{cases}$$

s(t) est paire, $b_n = 0$.

$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos n\omega_0 t$

3. Transformée de Fourier

Soit f(t) un signal déterministe, sa transformée de Fourier est

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \text{ou} \quad F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

La transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \quad \text{ou} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$$

Exemples :

TF de $P_T(t) = ?\qquad \partial(t) = ?$

$F(\omega) = \int_{-T}^{+T} 1.e^{-j\omega t}\, dt = 2T\, \mathrm{sinc}\omega T$

$$\boxed{P_T(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} 2T\mathrm{sinc}\omega T}$$

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial(t) e^{-j\omega t}\, dt = 1$

$$\boxed{\partial(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} 1}$$

3.1 Propriétés de la transformée de Fourier

On suppose que f(t) est complexe de la forme $f(t) = f_1(t) + jf_2(t)$

Donc $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |A(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$

$|A(\omega)|$: Spectre d'amplitude de f(t). $|A(\omega)| = \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2}$

$\phi(\omega)$: Spectre de phase de f(t) = arg $F(\omega) = \mathrm{arctg}(\frac{X(\omega)}{R(\omega)})$

$A^2(\omega)$: Spectre d'énergie de f(t).

- Linéarité

$$f_1(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F_1(\omega) \quad \text{et} \quad f_2(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F_2(\omega)$$

$$a_1 f_1(t) + a_1 f_1(t) + \cdots a_n f_n(\omega) + \overset{TF}{\leftrightarrow} a_1 F_1(\omega) + a_1 F_1(\omega) + \cdots + a_n F_n(\omega)$$

- Symétrie

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega)\ ; \quad \text{alors} \quad F(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} 2\pi f(-\omega)$$

- Translation temporelle

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega)\ ; \quad \text{alors} \quad f(t \mp t_0) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega)e^{\mp j\omega t_0}$$

- Translation fréquentielle

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega)\ ; \quad \text{alors} \quad f(t)e^{j\omega_0 t} \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega - \omega_0)$$

- Changement d'échelle

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega); \quad \text{alors} \quad f(\omega a.t) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$$

- Dérivation temporelle

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega); \quad \text{alors} \quad \frac{d^n f(t)}{dt} \overset{TF}{\leftrightarrow} (j\omega)^n F(\omega)$$

- Dérivation fréquentielle

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega); \quad \text{alors} \quad (-jt)^n f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{d^n F(\omega}{d\omega}$$

- Théorème de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

L'énergie dans le domaine temporel est égale à l'énergie dans le domaine fréquentiel.

4. Transformée de Fourier d'un signal périodique

Un signal périodique peut être considéré comme la répétition cyclique d'un signal élémentaire d'une période. Il peut donc être développé en série de Fourier complexe.

La série de Fourier complexe est de la forme : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \; e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \; e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

Cherchons sa TF

$F(\omega) = TF\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \; e^{-j\omega t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \; e^{jn\omega_0 t}\right] \; e^{-j\omega t} \, dt$

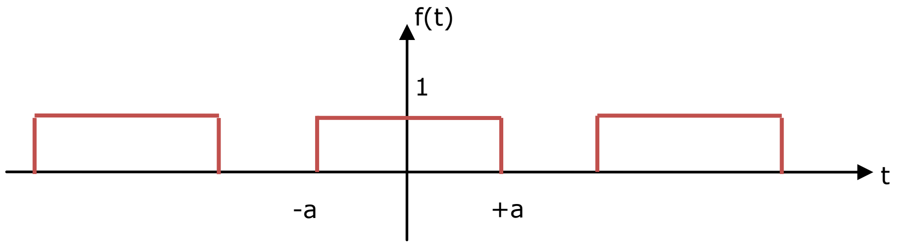
$= 2\pi \; \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \, \partial(\omega - \; n\omega_0)$

C_n est calculé sur une période : $\quad C_n = \frac{1}{T} \; F_0(n\omega_0)$

$$\boxed{F(\omega) = \; \omega_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} F_0(n\omega_0) \; \delta(\omega - n\omega_0)}$$

Exemple

Soit le signal périodique suivant : c'est un train d'impulsions rectangulaires.



$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} F_0(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$f_0(t) = P_a(t) \quad \Longrightarrow \quad F_0(\omega) = 2a \operatorname{sinc} \omega a$$

$$C_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) = \frac{2a}{T} \operatorname{sinc}(n\omega_0 a)$$

$$F(\omega) = \frac{4a\pi}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} sinc(n\omega_0 a)\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

On obtient un signal enveloppe et un signal enveloppé. Le spectre du train d'impulsions rectangulaires enveloppe le peigne de Dirac. Le signal enveloppé a la plus petite période c'est-à-dire la plus grande fréquence.

5. Exercices

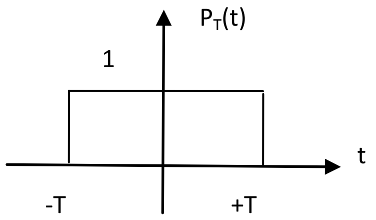
Exercice 1 :

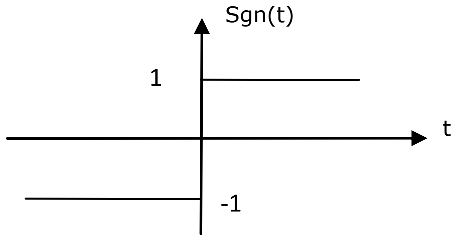
Tracer et développer en série de Fourier la fonction périodique f(x) de période 2π définie par

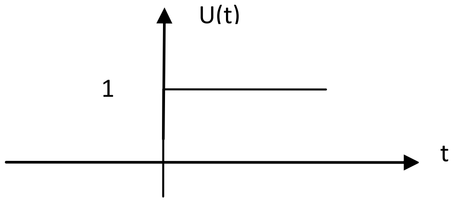
$$f(x) = x \quad \text{pour} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

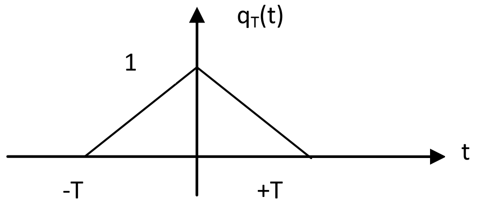
Exercice 2 :

Calculer la TF des fonctions suivantes









Exercice 3 :

Calculer la TF des fonctions suivantes

$$f(t) = (2 + 2t + 3t^2)\, \delta''(t) \leftrightarrow \text{TF ?}$$

$$g(t) = \delta''(t - 2) / t \leftrightarrow \text{TF ?}$$

Exercice 4 :

Calculer la TF d'un train d'impulsions de Dirac $\partial_T(\mathrm{t}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \partial(\mathrm{t} - \mathrm{nt})$

Chapitre 3

Transformée de Laplace

1. Introduction

La transformée de Laplace (TL) est un outil mathématique qui se prête à résoudre les équations différentielles dès que le système étudié devient complexe c'est-à-dire lorsqu'il s'agit d'équations différentielles d'ordre assez élevé. Cette méthode de calcul est souvent appelé calcul opérationnel.

2. Définition

Soit f(t) une fonction du temps.

Soit p une variable complexe : $p = \alpha + j\omega$

On appelle TL, la fonction de la variable complexe notée F(p) telle que

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

F(p) est appelée l'image de f(t). L'existence de F(p) suppose que l'intégrale converge. De manière réciproque, il existe une transformation inverse qui permet de retrouver f(t) à partir de F(p)

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\omega}^{\alpha + j\omega} F(p)\, e^{p}\, dp$$

f(t) est dite transformée inverse ou originale de F(p).

Exemples

Soit à déterminer la TL des fonctions suivantes

$f_1(t) = \partial(t)$; $f_2(t) = U(t)$; $f_3(t) = e^{-at}$

$$L\{\partial(t)\} = \int_0^\infty \partial(t)e^{-pt}\,dt = e^{-pt}|t = 0 = 1$$

$$L\{U(t)\} = \int_0^\infty 1.e^{-pt}\,dt = \frac{-1}{p}e^{-pt}\Big| = \frac{1}{p}$$

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-pt}\,dt = \frac{-1}{p+a}e^{-(a+p)t}\Big| = \frac{1}{p+a}$$

Le tableau suivant donne la liste des TL des fonctions les plus utilisées

f(t)	**F(p)**	**f(t)**	**F(p)**
$\partial(t)$	1	$t^2\,e^{-at}$	$\frac{2}{(p+a)^3}$
U(t)	$\frac{1}{p}$	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$		

Figure2.1 : Transformée de Laplace des fonctions usuelles

3. Propriétés de la TL

- Unicité

à $f(t) \overset{TL}{\rightarrow} F(p)$ unique

à $F(p) \xrightarrow{TL^{-1}} f(t)$ unique

- Linéarité

$$L\{a\,f_1(t) + b\,f_2(t)\} = a\,L\{f_1(t)\} + b\,L\{f_2(t)\} = a\,F_1(p) + b\,F_2(p)$$

Exemples

$$L\{3\,e^{-t} - e^{-2t}\} = 3\,L\{e^{-t}\} - L\{e^{-2t}\} = \frac{3}{P+1} - \frac{1}{P+2}$$

$$L\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} = 4\,L\{t^2\} - 3\,L\{\cos 2t\} + 5\,L\{e^{-t}\} = 4.\frac{2}{P^3} - 3.\frac{P}{P^2+4} + 5.\frac{1}{P+1}$$

- Changement d'échelle

$$f(a.t) \overset{TL}{\rightarrow} \frac{1}{|a|}\,F(\frac{P}{a})$$

Exemples

$$L\,\{\sin 5t\} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{(\frac{P}{5})^2+1} = \frac{25}{P^2+25}$$

$$L\{e^{-3t}\} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\frac{P}{3}+1} = \frac{1}{P+3}$$

- Translation

$$f(t-a) \overset{TL}{\rightarrow} F(p)e^{-ap}$$

$$f(t)e^{bt} \overset{TL}{\rightarrow} F(p-b)$$

Exemple

$$f(t) = sint\,e^{2t} \overset{TL}{\rightarrow} \frac{1}{(P-2)^2+1}$$

- Dérivation temporelle

pour $n = 1$ $\quad L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = PF(P) - f(0)$

pour $n = 2$ $\quad L\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = P^2F(P) - Pf(0) - f'(0)$

pour n $\quad L\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} = P^nF(P) - \sum_{k=1}^{n} P^{n-k}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(0)$

Les $f^{(n)}(0)$ représentent les conditions initiales.

Exemple

Déterminer la TL de la dérivée de la fonction $f(t) = e^{-at}$

$$L\{f'(t)\} = PF(P) - f(0) = \frac{P}{P+a} - 1 = \frac{-a}{P+a}$$

- Dérivation fréquentielle

$$(-1)^n \, t^n \, f(t) \xrightarrow{TL} \frac{d^n F(p)}{dP^n}$$

- Intégration

$$L\{\int_0^t f(t)dt\} = \frac{F(P)}{P}$$

Remarque

Si les conditions initiales sont nulles

- Dériver dans le domaine temporel, revient à multiplier par P dans le domaine de Laplace.
- Intégrer dans le domaine temporel, revient à diviser par P dans le domaine de Laplace.

- Théorème de la valeur initiale

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{P\to\infty} PF(P)$$

Exemple

$$f(t) = e^{-3t} \xrightarrow{TL} \frac{1}{P+3}$$

$$f(0) = \lim_{t\to 0} e^{-3t} = \lim_{P\to\infty} \frac{P}{P+3} = 1$$

- Théorème de la valeur finale

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{P\to 0} PF(P)$$

Exemple

$$f(t) = (1 - e^{-t}) \xrightarrow{TL} F(p) = \frac{1}{P} - \frac{1}{P+1} = \frac{1}{P(P+1)}$$

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty}((1 - e^{-t}) = \lim_{P\to 0} P\frac{1}{P(P+1)} = 1$$

- Convolution

$$L\{ f(t) \otimes g(t)\} = F(p).G(p)$$

4. TL d'une fonction périodique

f(t) est une fonction périodique pour $t \geq 0$.

$$f(t) = \sum_0^\infty f_0(t-nT) = f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2T) + \cdots + f_0(t-nT) \xrightarrow{TL}$$

$$F(P) = F_0(P) + F_0(P)\, e^{-PT} + F_0(P)e^{-2PT} + \cdots F_0(P)e^{-nPT} = F_0(P)[\,1 + e^{-PT} + e^{-2PT} + \cdots e^{-nPT}] = F_0(P) \sum_0^\infty e^{-nPT}$$

$\sum_0^\infty e^{-nPT}$ = suite géométrique de raison $e^{-PT} = \frac{1}{1-e^{-PT}}$

$$F(P) = \frac{F_0(P)}{1 - e^{-PT}} = \frac{\int_0^T f_0(t)e^{-PT}\, dt}{1 - e^{-PT}}$$

Exemple

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{1}{(1+P^2)(1-e^{-P\pi})}$$

5. Calcul de la transformée inverse

On se place dans le cas ou F(p) est une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur : $F(P) = \frac{N(P)}{D(P)} \qquad d^\circ(N(P)) < d^\circ(D(P))$.

On cherche les zéros (racines du numérateur) et les pôles (racines du dénominateur) de façon à écrire F(P) sous la forme :

$$F(P) = \frac{(P-Z_1)(P-Z_2)\ldots(P-Z_m)}{(P-P_1)(P-P_2)\ldots(P-P_n)} \qquad \begin{cases} Z_m = \text{les zéros du numérateur} \\ P_n = \text{les pôles du dénominateur} \end{cases}$$

- **Cas ou les pôles sont simples**

$$F(\mathrm{P}) = \frac{N(P)}{(\mathrm{P}-\mathrm{P}_1)(\mathrm{P}-\mathrm{P}_2)\ldots(\mathrm{P}-\mathrm{P}_\mathrm{n})}$$

On peut alors écrire F(P) sous la forme

$$F(\mathrm{P}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{A_k}}{(\mathrm{P}-\mathrm{P_K})} = \frac{\mathrm{A}_1}{(\mathrm{P}-\mathrm{P}_1)} + \frac{\mathrm{A}_2}{(\mathrm{P}-\mathrm{P}_2)} + \cdots + \frac{\mathrm{A_n}}{(\mathrm{P}-\mathrm{P_n})}$$

Les coefficients A_k sont appelés résidus des pôles P_k

$$A_1 = (\mathrm{P}-\mathrm{P_k})\mathrm{F}(\mathrm{P})|\mathrm{P}_{=\ Pk}$$

Exemple

$$\mathrm{F}(\mathrm{P}) = \frac{\mathrm{P}+1}{\mathrm{P}^2+5\mathrm{P}+6} = \frac{\mathrm{P}+1}{(\mathrm{P}+2)(\mathrm{P}+3)} = \frac{\mathrm{A}_1}{(\mathrm{P}+2)} + \frac{\mathrm{A}_2}{(\mathrm{P}+3)}$$

$$A_1 = (P+2)F(P)|P_{=-2} = \frac{P+1}{P+3} = -1 = A_1$$

$$A_2 = (P+3)F(P)|P_{=-3} = \frac{P+1}{P+2} = 2 = A_2$$

$$\mathrm{F}(\mathrm{P}) = \frac{-1}{(\mathrm{P}+2)} + \frac{2}{(\mathrm{P}+3)} \xrightarrow{\mathrm{TL}^{-1}} \mathrm{f}(\mathrm{t}) = -\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + 2\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}$$

- **Cas ou les pôles sont multiples**

D(P) de F(P) possède des pôles simples et des pôles multiples Pi d’ordre s

$$\mathrm{F}(\mathrm{P}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{A_k}}{(\mathrm{P}-\mathrm{P_K})} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{s}} \frac{\mathrm{C_k}}{(\mathrm{P}-\mathrm{P_i})^{\mathrm{k}}}$$

$$\mathrm{C_k} = \frac{1}{(\mathrm{s}-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{s}-\mathrm{k}}}{\mathrm{dP}^{\mathrm{s}-\mathrm{k}}}\left[(\mathrm{P}-\mathrm{P_i})^{\mathrm{s}}\ \mathrm{F}(\mathrm{P})\right\}\mathrm{P}_{=\,\mathrm{P_i}}\right.$$

Exemple

$$\mathrm{F}(\mathrm{P}) = \frac{1}{\mathrm{P}(\mathrm{P}+2)^2} = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{P}} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{2} \frac{\mathrm{C_k}}{(\mathrm{P}+2)^2} = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{P}} + \frac{C_1}{\mathrm{P}+2} + \frac{\mathrm{C}_2}{(P+2)^2}$$

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{P}\,\mathrm{F}(\mathrm{P})|\mathrm{p}_{=0} = \frac{(\mathrm{P}+1)}{(\mathrm{P}+2)^2} = \frac{1}{4}$$

$C_1 = \frac{d}{dp}[(P+2)^2 F(p)]_{P=-2} = \frac{-1}{P^2}]_{P=-2} = \frac{-1}{4}$

$C_2 = (P+2)^2 F(P)]_{P=-2} = \frac{1}{2}$

$$F(P) = \frac{1}{4}\frac{1}{P} - \frac{1}{4}\frac{1}{P+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(P+2)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}$$

- **Cas ou les pôles sont complexes**

Si le dénominateur de F(P) admet des racines complexes, la méthode consiste à écrire D(P) sous la forme $(P+a)^2+\omega^2$. La décomposition de F(P) sera :

$$F(P) = \frac{\alpha P + \beta}{(P+a)^2 + \omega^2}$$

Exemples

$$-X(P) = \frac{1}{P(P^2+9)} = \frac{A}{P} + \frac{BP+C}{P^2+9} = \frac{1}{9}\frac{1}{P} - \frac{1}{9}\frac{P}{P^2+9} \xrightarrow{TL^{-1}} x(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t$$

$$-Y(P) = \frac{1}{(P^2+9)(P^2+4)} = \frac{AP+B}{P^2+4} + \frac{CP+D}{P^2+9} = \frac{-1}{5}\frac{3}{P^2+9} + \frac{3}{5x2}\frac{2}{P^2+4} \xrightarrow{TL^{-1}}$$

$$x(t) = \frac{-1}{5}\sin 3t + \frac{3}{10}\sin 2t$$

6. Application de la TL à la résolution d'équations différentielles à coefficients constants

Pour résoudre les équations différentielles par TL, on procède de la façon suivante

- Ecriture de la TL des deux membres de l'équation en utilisant le tableau des transformées ainsi que les propriétés de la TL.
- Décomposition de la fonction obtenue.
- Déduction de la fonction du temps.

Exemples

1) $\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = e^{-2t}$ et $x(0) = 0.$

$L[\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)] = L[e^{-2t}] \Longrightarrow PX(P) - x(0) + 3X(P) = \frac{1}{P+2}$

$$X(P) = \frac{1}{(P+2)(P+3)} = \frac{A_1}{P+2} + \frac{A_2}{P+3} = \frac{1}{P+2} - \frac{1}{P+3}$$

$x(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$

2) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 4e^{2t}$ avec $x(0) = -3$ et $x'(0) = 5.$

$L[\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)] = L[4e^{2t}]$

$$P^2X(P) - Px(0) - x'(0) - 3[PX(P) - x(0)] + 2X(P) = \frac{4}{P-2}$$

$$X(P) = \frac{-3P^2 + 20P - 24}{(P-2)^2(P-1)} = \frac{A}{P-1} + \frac{C_1}{P-2} + \frac{C_2}{(P-2)^2}$$

$$= \frac{-7}{P-1} + \frac{4}{P-2} + \frac{4}{(P-2)^2} \quad \rightarrow \quad x(t) = -7e^{t} + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

7. Exercices

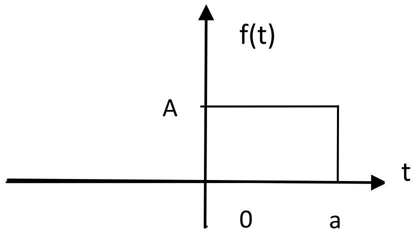
Exercice 1 :

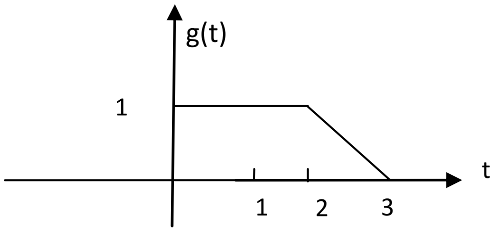
Calculer la TL des fonctions suivantes

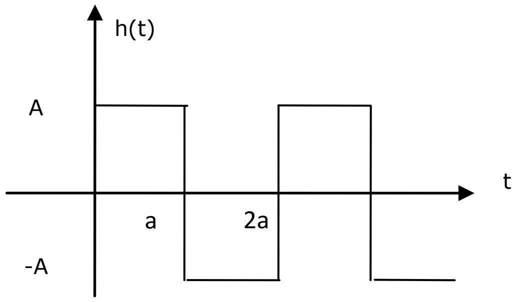
$12U(t)$; $5U(t-12)$; $4t^2$; $5e^{-5t}$; $8t^7e^{-5t}$; t^3+3t^2+4t+3 ; $2e^{-5t}\sin 5t$; $e^t \cos t$; $\cos t \sin t$; $\cos^2 t$; $\cos^3 t$; $d/dt\{t^2 e^{-2t}\}$; $d/dt\{e^{-2t}\sin 2t\}$

Exercice 2 :

Calculer la TL des fonctions graphiques suivantes







Exercice 3 :

Calculer la transformée de Laplace inverse TL^{-1} des fonctions suivantes

$$\frac{4}{P+3}\ ;\quad \frac{4}{(P+3)^2}\ ;\quad \frac{4}{(P+3)^4}\ ;\quad \frac{3P+2}{P^2+25}\ ;\quad \frac{1}{P(P^2+9)}\ ;\quad \frac{3}{(P^2+9)(P^2+4)}$$

$$\frac{P^2-2P-3}{P^3-2P^2-2P-3}\ ;\qquad \frac{1}{P^2+2P+5}$$

Exercice 4 :

Trouver la solution des équations suivantes pour les conditions initiales données

1- $x''(t) + x'(t) + 2x(t) = 0$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 2$.

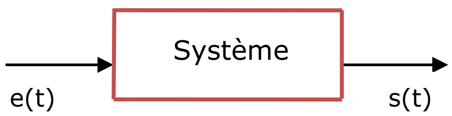
2- $x'''(t) - x''(t) = 0$ avec $x(0) = 2$; $x'(0) = 0$ et $x''(0) = 1$.

Chapitre 4

Produit de Convolution

1. Rappel sur les systèmes

Un système est défini comme un ensemble de dispositifs orientés qui établit un lien de cause entre des signaux d’entrée (appelés excitation) et des signaux de sortie (appelés réponse)



- Un système est linéaire s’il vérifie le principe de superposition : la réponse d’une somme d’excitations est égale à la somme des excitations correspondantes

  Soient : $s_1(t)$ la réponse d’un système à l’excitation $e_1(t)$

  $S_2(t)$ la réponse d’un système à l’excitation $e_2(t)$

  $a_1 e(t) + a_2 e_2(t) \longrightarrow a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$ avec a_1 et a_2 = constantes

- Un système est dit stationnaire ou à temps invariant si sa réponse à une excitation décalée e(t - t_0) est la version décalée de la réponse correspondante s(t - t_0) : $e(t) \longrightarrow s(t)$

$$e(t - t_0) \longrightarrow s(t - t_0)$$

- Un système est causal si la sortie ne dépend que des valeurs présentes et précédentes de l'entrée : s(t) = f(e(t), e(t-1), e(t-2)…..)

Remarque

La linéarité et l'invariance dans le temps jouent un rôle fondamental en théorie et traitement du signal et l'analyse des systèmes parce que beaucoup de phénomènes physiques peuvent être modélisés par des systèmes LTI.

2. Convolution ou produit de convolution

La convolution est une opération mathématique très importante en traitement du signal et plus particulièrement dans l'étude des systèmes. Elle montre l'effet que produit le système sur le signal appliqué à son entrée. La convolution permet de déterminer la réponse d'un système linéaire de réponse impulsionnelle h(t) soumis à un signal d'entrée e(t) : $s(t) = h(t) \otimes e(t)$

2.1 Définition

Soient $f_1(t)$ et $f_2(t)$ deux fonctions complexes

$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau =$ convolution de $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

2.2 Interprétation géométrique de la convolution

$f_3(t)$ est le produit de convolution de deux signaux $f_1(t)$ et $f_2(t)$:

$f_3(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$.

- Le signal $f_1(\tau)$ est identique à $f_1(t)$ dans lequel t est remplacé par τ.
- Le signal $f_2(t-\tau)$ est en fonction de τ et doit être obtenu en deux étapes :
    - Le signal $f_2(-\tau)$ est la version retournée dans le temps de $f_2(t)$ dans lequel t est remplacé par τ.

- Le signal $f_2(-\tau)$ est translaté à gauche d'une valeur t et devient $f_2(t-\tau)$.

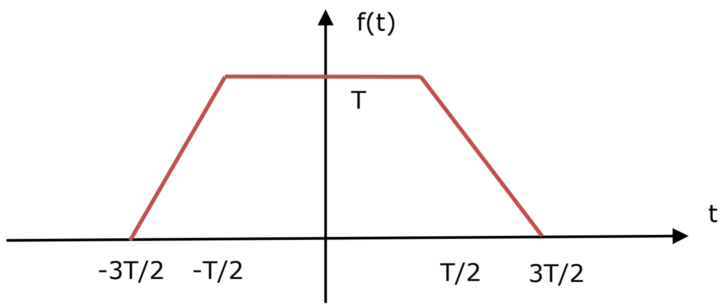
- Finalement, les signaux $f_1(\tau)$ et $f_2(t-\tau)$ sont multipliés et l'aire du produit est égale à $f_1(t) \otimes f_2(t)$ pour une valeur de t donnée. La convolution $f_3(t) = f_1(t) \otimes f_2(t)$ est en fonction du temps, elle doit être évaluée pour $-\infty < t < +\infty$.

Exemple

Soit à calculer le produit de convolution : $P_{\frac{T}{2}}(t) \otimes P_T(t)$

Après calcul, on obtient :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } t < \frac{-3T}{2} \\ t + \frac{3T}{2} \text{ si } \frac{-3T}{2} < t < \frac{-T}{2} \\ T \text{ si } \frac{-T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ -t + \frac{3T}{2} \text{ si } \frac{T}{2} < t < \frac{3T}{2} \\ 0 \text{ si } t > \frac{3T}{2} \end{cases}$$



3. Propriétés de la convolution

- **Commutativité**

$f_1(t) \otimes f_2(t) = f_2(t) \otimes f_1(t)$ l'ordre des signaux est sans importance

- **Associativité**

$$f_1(t) \otimes [f_2(t) \otimes f_3(t)] = [f_1(t) \otimes f_2(t)] \otimes f_3(t)$$

- **Distributivité par rapport à l'addition**

$$f_1(t) \otimes [f_2(t) + f_3(t)] = [f_1(t) \otimes f_2(t)] + [f_1(t) \otimes f_3(t)]$$

- **Théorème de la convolution**

  - domaine temporel

$$f_1(t) \overset{TF}{\rightarrow} F_1(\omega)\ ;\ f_2(t) \overset{TF}{\rightarrow} F_2(\omega) \text{ et } f(t) \overset{TF}{\rightarrow} F(\omega)\ ;$$

$$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) \overset{TF}{\rightarrow} F(\omega) = F_1(\omega) . F_2(\omega)$$

- domaine fréquentiel

$$f_1(t).f_2(t) \overset{TF}{\rightarrow} \frac{1}{2\pi} = F_1(\omega) \otimes F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int F_1(\Omega).F_2(\omega-\Omega)d\Omega$$

4. Convolution de l'impulsion de Dirac

- $f(t) \otimes \delta(t) = f(t)$ $\delta(t)$ est l'élément neutre de la convolution.

- $f(t) \otimes \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$

- $\delta(t-t_1) \otimes \delta(t-t_2) = \delta(t-(t_1+t_2))$

- $\delta(t-t_1) \otimes \delta'(t-t_2) = \delta'(t-(t_1+t_2))$

- $\delta'(t-t_1) \otimes \delta'(t-t_2) = \delta''(t-(t_1+t_2))$

- $\delta^{(n)}(t-t_1) \otimes \delta^{(m)}(t-t_2) = \delta^{(n+m)}(t-(t_1+t_2))$

Exemple

En utilisant la convolution et ses propriétés calculer la TF de $\{t.U(t)\}$.

$f_1(t) = t$ et $f_2(t) = U(t)$

$$f_1(t).f_2(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega)$$

$$F_1(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\partial(\omega) \quad et \quad F_2(\omega) = j2\pi\partial'(\omega)$$

$$t.U(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\left[\left(j2\pi\partial'(\omega) \otimes \frac{1}{j\omega}\right) + (j2\pi\partial'(\omega) \otimes \pi\partial(\omega))\right]$$

$$j2\pi\partial'(\omega) \otimes \pi\partial(\omega) = 2\pi^2 j\,\partial'(\omega)$$

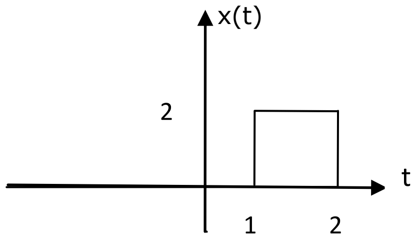
$$j2\pi\partial'(\omega) \otimes \frac{1}{j\omega} = \frac{2\pi}{(j\omega)^2}$$

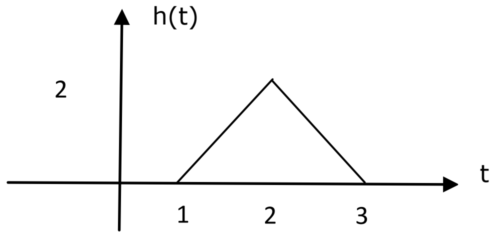
$$t.U(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{(j\omega)^2} + \pi j\partial'(\omega)$$

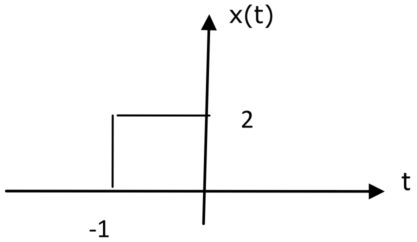
7. Exercices

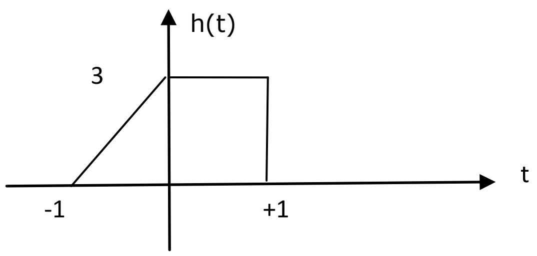
Exercice 1 :

Utiliser la méthode de convolution graphique pour les fonctions suivantes









Exercice 2 :

Calculer et tracer

$$\left[2P_{\frac{1}{2}}(t-\frac{1}{2})\right]\otimes\left[tP_1(t-1)+2P_1(t-3)\right]$$

Exercice 3 :

Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes en utilisant la convolution

$$A\cos\omega_0 t U(t)\,; \qquad A\sin\omega_0 t U(t)\,; \qquad \frac{t}{|t|}\cos t$$

Chapitre 5

Corrélation des signaux

1. Introduction

Pour mesurer le degré de similitude entre deux signaux, on définit une fonction appelée fonction de corrélation

- Si les signaux sont différents, on obtient la fonction d'intercorrélation.
- Si les signaux sont identiques, il s'agit de la fonction d'autocorrélation.

Les fonctions de corrélation et d'intercorrélation permettent de comparer des signaux distincts en fonction du retard entre eux c'est à dire elles permettent d'étudier la ressemblance ou la différence entre les signaux (dans le domaine temporel) ainsi que la répartition de l'énergie E ou de la puissance P en fonction de la fréquence (domaine spectral).

2. Définition

- La fonction d'intercorrélation (FIC) des signaux à énergie finie réelle est définie par : $C_{xy}(\tau) \ = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, y(t+\tau) dt \rightarrow \ \text{FIC}$
- $x^*(t)$ = le conjugué complexe de x(t).
- $y(t+\tau)$ = le signal y(t) décalé de τ.

$C_{xy}(\tau)$ est appelée FIC ou Cross corrélation.

- Si $C_{xy}(\tau) = 0$; on dit que les deux signaux x(t) et y(t) sont non corrélables.
- Si x(t)= y(t) ; alors $C_{xx}(\tau) = C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, x(t+\tau)dt \rightarrow$ FAC (fonction d'autocorrélation.

Pour les signaux à puissance moyenne finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\rightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\, y(t+\tau)dt \rightarrow \text{FIC}$$

Si x(t) = y(t), $C_{xx}(\tau) = \lim_{T\rightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\, x(t+\tau)dt \rightarrow \text{FAC}$

3. Propriétés de la corrélation

1) **Symétrie**

$C_{xy}(\tau) = C_{yx}^*(-\tau)$ et $C_x(\tau) = C_x^*(-\tau)$

Si signaux réels ; alors $C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau)$ et $C_x(\tau) = C_x(-\tau) \rightarrow$ FAC est paire.

Les fonctions FAC et FIC des signaux réels sont aussi réels.

2) Inégalité de Schwartz

$|C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_{xx}(0) \,.\, C_{yy}(0)$ et $|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0)\ \forall\, \tau.$

La valeur de $C_{xx}(0)$ constitue un maximum absolu de la FAC.

3) Signification de $C_{xx}(0)$

- Pour les signaux à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

La valeur à l'origine de la FAC $(\tau = 0)$

$$C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = E$$

$C_{xx}(0)$ représente l'énergie du signal (max à l'origine)

- Pour les signaux à puissance moyenne finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

Si $\tau = 0$, $C_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\, x(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\, dt = P$

$C_{xx}(0)$ représente la puissance du signal.

Donc la FAC est bornée par l'énergie ou la puissance du signal.

4. Densité spectrale d'énergie DSE et de puissance DSP

On appelle DSP (pour les signaux à puissance moyenne finie) ou DES (pour les signaux à énergie finie, la TF des fonctions de corrélation

$\phi_{xy}(f) = TF\left[C_{xy}(\tau)\right]$, densité interspectrale (Interspectre).

$\phi_{xx}(f) = TF\left[C_{xx}(\tau)\right]$, densité spectrale (Autospectre).

- Pour les signaux à énergie finie

$\phi_{xy}(f) = TF\left[C_{xy}(\tau)\right] = X^*(f).Y(f)$

$\phi_{xx}(f) = TF\left[C_{xx}(\tau)\right] = X^*(f).X(f) = |X(f)|^2$ d'où l'identité de Parseval

E= $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(f)\, df$

Elle représente la conservation de l'énergie du domaine temporel au domaine fréquentiel.

- Pour les signaux à puissance moyenne finie

$$\phi_{xy}(f) = TF\left[C_{xy}(\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} X_T^*(f).Y_T(f).$$

Ou $X_T(f)$et $Y_T(f)$ représentent respectivement les signaux x(t) et y(t) définis sur une durée T.

$$\phi_{xx}(f) = TF\left[C_{xx}(\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} X_T^*(f).X_T(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2.$$

5. Cas des signaux périodiques

x(t) et y(t) sont périodiques

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi n f_0 t}$ et $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{j2\pi n f_0 t}$

avec x_n et y_n sont les coefficients de Fourier.

$x_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$; $y_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} y(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{(T)} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi n f_0 t}\right)^* y(t+\tau)dt$$

$$C_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n^* \,.\, y_n e^{j2\pi n f_0 \tau}$$

La FAC des signaux périodiques est périodique et paire

- **Densité spectrale d'énergie DSP**

$$\phi_{xy}(f) = TF\left[C_{xy}(\tau)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n^* \,.\, y_n\, \partial(f - nf_0)$$

$$\phi_{xx}(f) = TF\left[C_{xx}(\tau)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n^* \,.\, x_n\, \partial(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2\, \partial(f - nf_0)$$

6. Relation entre la corrélation et la convolution

On sait que : $x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).y(t-\tau)\, d\tau$ et

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, y(t+\tau)dt$$

$$C_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) \otimes y(\tau)$$

- Si x(t) est réel : $x^*(-\tau) = x(-\tau) \Rightarrow C_{xy}(\tau) = x(-\tau) \otimes y(\tau)$.
- Si x(t) est réel et pair : $x^*(-\tau) = x(\tau) \Rightarrow C_{xy}(\tau) = x(\tau) \otimes y(\tau)$.

Pour la FAC : $C_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) \otimes x(\tau)$

- Si x(t) est réel : $C_x(\tau) = x(-\tau) \otimes x(\tau)$
- Si x(t) est réel et pair : $C_x(\tau) = x(\tau) \otimes x(\tau)$

Remarque

-La corrélation des signaux x(t) et y(t) est équivalente à la convolution de x renversé par y.

-Si x(t) est pair, on conclut dans ce cas qu'il y a identité entre les opérations de convolution et de corrélation.

7. Exercices

Exercice 1 :

Soit un signal x(t) défini comme suit

$$x(t)=\begin{cases}-A\cdots Si\cdot\cdot-\Delta t\prec t\prec 0\\ 0\cdots\cdots Si\cdots t=0\\ +A\cdots Si\cdot\cdot 0\leq t\prec\Delta t\\ 0\cdots\cdot\cdot Si\cdot\cdot|t|\geq\Delta t\end{cases}$$

- Tracer x(t).
- Calculer sa FAC $\varphi_{xx}(\tau)$ pour les valeurs particulières suivantes

$$\tau=0 \qquad \tau=\pm\Delta t \qquad \tau=\pm 2\Delta t$$

Exercice 2 :

Soit le signal $x(t) = A.U(t).e^{-at}$ avec a > 0 et u(t) : signal échelon.

1. Déterminer sa FAC. En déduire l'énergie du signal.
2. Calculer sa DSE.
3. Calculer la fonction de corrélation $C_x(\tau)$ en utilisant la convolution.

Exercice 3 :

Soit $\varphi_{xy}(\tau)$ la fonction d'intercorrélation FIC de deux signaux sinusoïdaux x(t) et y(t) périodiques de période T_0.

- Exprimer $\varphi_{xy}(\tau)$ en fonction des coefficients de Fourier respectifs X_n et Y_n de x(t) et y(t).
- Calculer sa densité spectrale d'énergie $\Phi_{xy}(f)$ et en déduire $\Phi_{xx}(f)$.

Chapitre 6

Echantillonnage et Signaux discrets

1. Echantillonnage des signaux

L'échantillonnage est l'opération qui permet le passage de l'analogique vers le discret. C'est une opération de base dans le domaine du traitement du signal numérique. Elle permet, en effet, de convertir un signal analogique en une séquence d'échantillons uniformément espacés dans le temps.

Il s'agit de remplacer un signal continu dans le temps par un autre défini à certains instants seulement équidistants et suffisamment rapprochés pour qu'il contienne la même information.

En d'autres termes, l'opération d'échantillonnage consiste à remplacer un signal analogique x(t) par une suite de valeurs $x_k = x(t_k)$ périodique de période Te appelée « Période d'échantillonnage » c'est-à-dire qu'à chaque instant t espacé

de Te, on définit une valeur x(t) : $\begin{cases} \text{à } t_1 & \rightarrow x(t_1) \\ \text{à } t_2 & \rightarrow x(t_2) \ldots \\ \text{à } t_k & \rightarrow x(t_k) \end{cases}$

- Un signal est dit échantillonné, s'il n'est transmis qu'à des instants privilégiés appelés « instants d'échantillonnage ».

- L'échantillonnage est effectué à des instants équidistants. L'espace entre ces instants est appelé « Période d'échantillonnage ».

- On appelle échantillonneur, l'organe effectuant le prélèvement des échantillons, il est représenté de la manière suivante

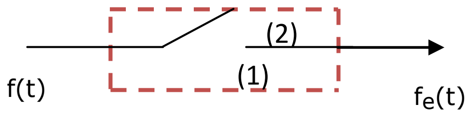
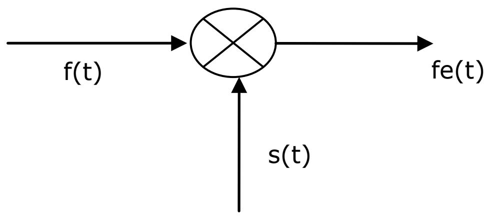


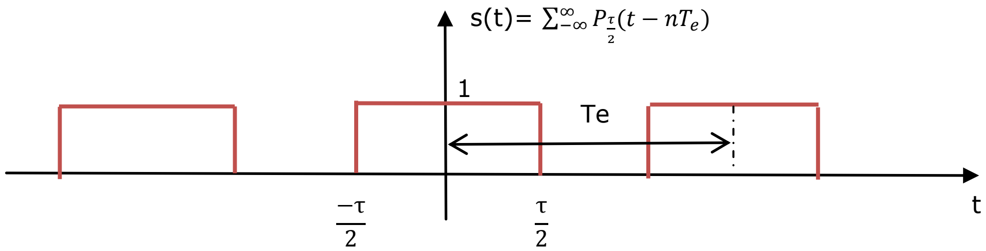
Figure 6.1 : Schéma fonctionnel d'un échantillonneur

Le principe de base d'un échantillonneur est réalisé à l'aide d'un interrupteur qui s'ouvre et se ferme périodiquement à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$. Le signal d'entrée f(t) apparait en sortie lorsque l'interrupteur est fermé (position (1)) pendant une durée τ et disparait quand l'interrupteur est ouvert (position (2)) pendant le reste de la période T_e.

Le signal échantillonné fe(t) est donc une simple multiplication du signal analogique f(t) par une fonction d'échantillonnage s(t)

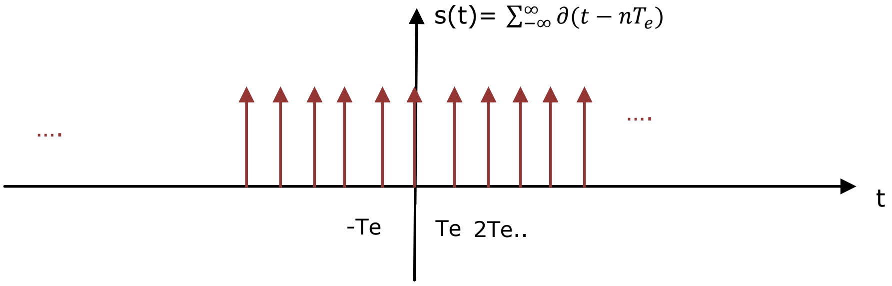


Cette fonction d'échantillonnage s(t) est soit une suite d'impulsions rectangulaires de période Te, de durée τ et d'amplitude unité.



C'est le cas de l'échantillonnage réel (naturel)

Soit une suite d'impulsions de Dirac espacés de Te ; C'est le cas de l'échantillonnage idéal



C'est le cas de l'échantillonnage idéal.

2. Echantillonneur idéal

L'échantillonnage idéal effectue le prélèvement de manière instantanée. Dans ces conditions, l'échantillonnage de f(t) peut être modélisé par :

$\mathrm{f_e(t) = f(t).s(t) = f(t).Pgn_{Te}(t)}$

$\mathrm{s(t) = Pgn_{Te}(t)}$ = peigne de Dirac.

Echantillonner un signal revient à le multiplier par une suite d'impulsions de Dirac de période Te.

2.1 Analyse fréquentielle

Il est important d'analyser le comportement de l'échantillonneur dans le domaine fréquentiel, pour cela, déterminons la TF du signal échantillonné

$$f_e(t) = f(t).Pgn_{Te}(t) \quad \Longrightarrow \quad F_e(f) = F(f) \otimes TF\{Pgn_{Te}(t)\}$$

$$TF\{Pgn_{Te}(t)\} = \frac{1}{Te} \sum_{-\infty}^{\infty} \partial(f - nf_e)$$

La TF d'un peigne de Dirac est aussi un peigne de Dirac mais d'amplitude $\frac{1}{Te}$ et de fréquence $f_e = \frac{1}{Te}$.

Spectre du signal échantillonné : la TF du signal échantillonné

$$F_e(f) = F(f) \otimes \frac{1}{Te} \sum_{-\infty}^{\infty} \partial(f - nf_e) = \frac{1}{Te} F(f) \otimes \sum_{-\infty}^{\infty} \partial(f - nf_e)$$

L'impulsion de Dirac est l'élément neutre de la convolution

$F(f) \otimes \partial(f) = F(f)$

$F(f) \otimes \sum_{-\infty}^{\infty} \partial(f - nf_e) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(f - nf_e)$

Donc : $f_e(t) = f(t).Pgn_{Te}(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F_e(f) = \frac{1}{Te} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(f - nf_e)$

Le spectre de la TF d'un signal échantillonné est périodique de période $\frac{1}{Te}$. Ce spectre est la répétition cyclique (périodique) de F(f), TF du signal f(t) continu. On dit que l'échantillonnage a introduit une périodicité du spectre dans l'espace des fréquences.

3. Théorème d'échantillonnage de Shannon

Lorsqu'on veut échantillonner un signal continu, on ne perd pas l'information si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale au double de la plus grande fréquence contenue dans son spectre :

$\mathrm{Te} < \frac{\mathrm{T_{min}}}{2}$ ou $f_e \geq 2f_m \rightarrow$ condition de Shannon

Si cette condition n'est pas respectée, il va se produire un phénomène de repliement (recouvrement spectral) c'est-à-dire que certaines fréquences vont se chevaucher. Pour remédier à ce problème, on impose un filtrage PB avant l'opération d'échantillonnage (Filtre anti-repliement ou anti-recouvrement) qui va limiter le spectre ensuite on applique la condition de Shannon.

Une condition nécessaire pour l'application du théorème de Shannon est que le signal soit à bande limitée : $|F(f)| < 0$ pour $|f| < f_m$.

Trois cas sont à considérer

Trois cas sont à considérer

- $f_e < 2f_m$ $\Rightarrow$ Les motifs se recouvrent partiellement $\Rightarrow$ il y aura chevauchement et donc perte d'informations.
- $f_e = 2f_m$ $\Rightarrow$ Pas de recouvrement $\Rightarrow$ échantillonnage à la limite.
- $f_e > 2f_m$ $\Rightarrow$ Pas de recouvrement $\Rightarrow$ conservation de l'information.

Remarque

Pour les signaux dont le spectre n’est pas à bande limitée, il est impossible d’éviter l’apparition de l’effet de recouvrement et donc le théorème d’échantillonnage a été déterminé en supposant que le signal est à bande limitée.

4. Reconstitution du signal

Si l’on dispose de fe(t), peut-on retrouver le signal f(t) ?

Pour pouvoir restituer f(t) de fe(t), on doit isoler F(f) puisque Fe(f) est une répétition cyclique de la TF F(f) de f(t). Pour cela, on utilise un filtre PB (filtre d’interpolation ou de reconstruction ou de lissage) de fréquence de coupure $\frac{\mathrm{fc}}{2} > \mathrm{f_{max}}$, de fonction de transfert H(f) [TF de h(t)] qui permet de reconstituer le signal analogique f(t) à partir de ses éch–

Remarque : Généralement, les filtres anti-recouvrement et de lissage sont les mêmes.

L’isolement de F(f) est possible à l’aide d’un filtre PB

$$\mathrm{f}'(\mathrm{t}) = \mathrm{h}(\mathrm{t}) \otimes \mathrm{f_e}(\mathrm{t}) = \mathrm{h}(\mathrm{t}) \otimes \sum f(nTe)\, \partial(t - nTe) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nTe).h(t - nTe)$$

$$h(t) = \frac{fc}{2\pi}\, sinc \frac{fc}{2} t \implies h(t - nTe) = \frac{fc}{2\pi}\, sinc \frac{fc}{2}(t - nTe)$$

$$f'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nTe)\, \frac{fc}{2}\, sinc \frac{fc}{2}\, (t - nTe)$$

Cette équation est une formule d’interpolation qui permet la reconstruction du signal f(t) à partir de la séquence f(nTe) grâce à la fonction $\mathrm{sinc}\frac{\mathrm{fc}}{2}(\mathrm{t} - \mathrm{nTe})$ qui joue le rôle d’une fonction d’interpolation. Chaque échantillon est multiplié par une version retardée de la fonction d'interpolation et toutes les formes d'ondes résultantes sont additionnées pour obtenir f'(t).

Remarque

Le théorème de l'échantillonnage é été déterminé en supposant que le signal est à bande limitée (ceci est rarement le cas en pratique). En conséquence, le processus d'échantillonnage produit du repliement. Pour combattre les effets du repliement, on peut utiliser les deu méthodes suivantes :

1. Avant l'échantillonnage, on applique un filtrage PB au signal pour atténuer les composantes hautes fréquences qui ne sont pas essentielles à l'information contenue dans le signal ; on parle d'un filtre anti-repliement.
2. Le signal filtré est échantillonné à une fréquence $f_e \geq 2f_m$; f_m étant la plus haute fréquence significative contenue dans son spectre.

5. Signaux discrets ou numériques

-Un signal continu est défini sur une variable continue t c'est-à-dire que le signal prend toutes les valeurs possibles d'un intervalle fini ou infini ; on parle dans ce cas d'un signal **continu** ou **analogique.**

-Si la variable t est représentée par des instants c'est-à-dire des valeurs discrètes t_1, t_2, ….t_n et si ces instants sont régulièrement espacés, alors le signal est dit échantillonné ou signal à temps discret.

-Un signal numérique est un signal discret (échantillonné) et quantifié.

5.1 Représentation des signaux numériques

Les signaux numériques sont mathématiquement représentés par des nombres notés x[n] pour $-\infty < n < +\infty$, on parle de séquence x[n].

- Représentation fonctionnelle : $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1, 3 \\ 4 & \text{pour } n = 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
- Représentation tabulaire

n	….-2	-1	0	1	2	3	4……
X[n]	….0	0	0	1	4	1	0….

- Représentation par séquence

x[n] = {…..0, 0, 1, 4, 1, 0, 0,….}

↑ (n=0 origine)

- Séquence nulle pour n<0 (séquence causale)

  x[n]= {0, 1, 4, 1, 0, 0, …}

  ↑

- Séquence de durée finie

  x[n]= {0, -1, -2, 5, 0, 4, -1} séquence 7 points

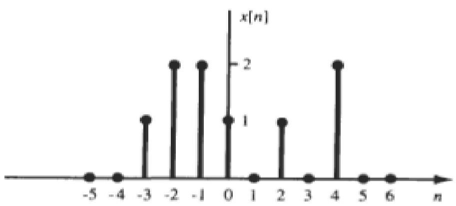
  ↑

- Séquence de durée finie causale

  x[n] = {0, 1, 4, 1} séquence 4 points

  ↑

- Représentation graphique



$$\mathrm{x[n]} = \partial[n+3] + 2\partial[n+2] + 2\partial[n+1] + \partial[n] + \partial[n-2] + 2\partial[n-4]$$

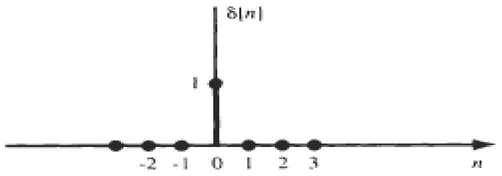
5.2 Quelques signaux particuliers

Parmi l'infinité de séquences, il y en a quelques-unes qui sont fondamentales pour l'analyse des signaux et systèmes. Ce sont

- **L'impulsion unité :** définie par

$$\partial[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{et sa version décalée} \quad \partial[n-k] = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

La représentation graphique de $\partial[n]$ et sa version décalée $\partial[n-k]$ est montrée sur la figure suivante



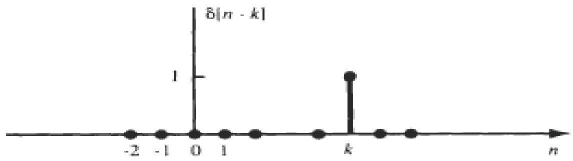


Figure 6.1 : La séquence impulsion unité et sa version décalée

Un aspect important de cette séquence est qu'elle peut servir à définir n'importe quelle autre séquence. En effet, toute séquence peut être considérée comme une somme d'impulsions décalées $\partial[n-k]$ et d'amplitude x[k]. La suite x [n] peut donc etre définie par l'expression suivante : $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\ \partial[n-k]$.

Exemple

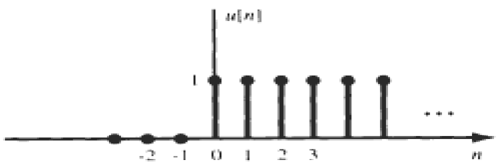
$$x[n] = \sum_{k=-2}^{5} x[k]\ \partial[n-k]$$

$$= -2\ \partial[n+2] - 2\ \partial[n+1] + 0.\partial[n] + 1.\partial[n-1] - 2.\partial[n-2] - 1.\partial[n-3] - 2.\partial[n-4] - 1.\partial[n-5].$$

- **Le saut unité :** défini par

$$U[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad \text{et sa version décalée} \quad U[n-k] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases}$$

Leurs représentations graphiques sont données par :



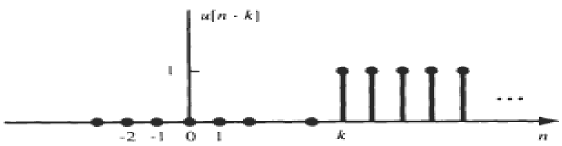


Figure 6.2 : La séquence saut unité et sa version décalée

Le saut unité peut être exprimé à partir de la somme d'une infinité d'impulsions unité décalées.

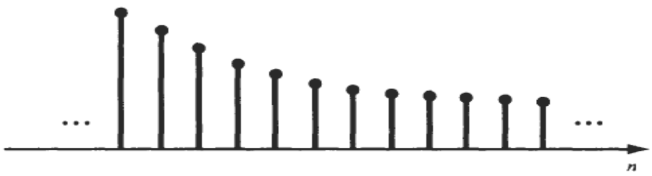
$$U[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \partial[n-k] = \partial[n] + \partial[n-1] + \partial[n-2] + \cdots$$

Inversement, l'impulsion unité peut être décrite par la différence de deux sauts unités : $\boldsymbol{\partial[n] = U[n] - U[n-1]}$.

- **L'exponentielle numérique a^n :** décrite par

$$x[n] = a^n . U[n] \; avec \quad a < 1$$ (exponentielle décroissante)

$$x(t) = e^{-\alpha t} \Rightarrow x[nT] = e^{-\alpha nT} = a^n \quad \text{avec} \quad a = e^{-\alpha T}$$

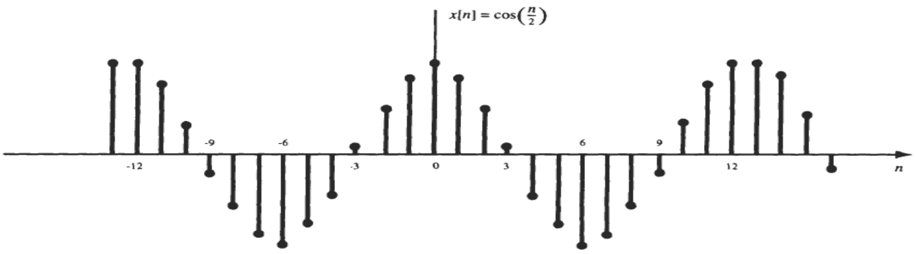


- **La rampe r[n] :** définie par

$$r[n] = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

- **La séquence sinusoïdale :**

$$x[n] = \cos(n\omega_0 + \varphi) \quad \omega_0 = \text{pulsation} = 2\pi f_0 T_e$$



- **La séquence périodique :**

x[n]= x[n+N] N = est un entier représentant la période de la séquence.

6. Energie et Puissance d'une séquence

- **Energie**

En continu : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$

En discret : $E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$

Si E est finie, alors la séquence est à énergie finie.

Exemples

- $x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$E = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n =$ série géométrique de raison r=$\frac{1}{4}$

$E = 1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \cdots + (\frac{1}{4})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} < \infty \Rightarrow x[n] = (\frac{1}{2})^n . U[n]$ est à énergie finie.

- $x[n] = U[n]$

$E = \sum_{n=0}^{\infty} |U[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1^2 = 1 + 1 + 1 \ldots = \infty \Rightarrow x[n] = U[n]$ est à énergie infinie.

- **Puissance**

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Si P<∞, alors la séquence est à puissance fini

7. Traitements possibles des séquences

- **Produit de deux séquences**

$$x.y = \{x[n].y[n]\}$$

- **Somme de deux séquences**

$$x + y = \{x[n] + y[n]\}$$

- **Multiplication par une constante**

$$\alpha.x = \{\alpha.x[n]\}$$

- **Retard**

$$y[n] = x[n - n_0]$$

8. Transformée en Z

La transformation en Z dans le domaine numérique joue le même rôle que la transformation de Laplace dans le domaine analogique. En particulier, elle permet la représentation des systèmes numériques linéaires à l'aide d'une fonction de transfert H(Z) dont les pôles sont les racines de l'équation caractéristique.

Pour les systèmes continus $\longrightarrow$ on utilise la TL.

Pour les systèmes numériques $\longrightarrow$ on utilise la TZ.

8.1 Définition

La TZ de la fonction x[n] est donnée par

$X(Z) = TZ\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].Z^{-n}$ (1)

Z : variable complexe.

X(Z) : fonction complexe de la variable Z.

L'expression (1) est une transformée en Z bilatérale.

Pour les fonctions nulles pour n<0, on utilise la transformée unilatérale

$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n].Z^{-n}$

Dans cas, la transformation bilatérale et unilatérale se ramènent à la même expression pour la classe des fonctions causales c'est à dire si :

$$x[n] \text{ causal } \Rightarrow X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n].Z^{-n}$$

Exemples

- $x[n] = U[n] \Rightarrow X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} U[n].Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1.Z^{-n}$
  $= 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + \cdots + Z^{-n}$

X(Z) est constitué de termes qui sont en progression géométrique de raison Z^{-1} . Sa somme vaut :

$U(Z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-Z^{-n}}{1-Z^{-1}} = \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{-1}{Z-1}$ $\qquad U[n] \overset{TZ}{\rightarrow} \frac{Z}{Z-1}$

- $x[n] = \partial[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$

$X[Z] = TZ\{\partial[n]\} = \sum_{n=0}^{0} 1.Z^{-n} = 1$ $\qquad \partial[n] \overset{TZ}{\rightarrow} 1$

8.2 Quelques transformée en Z

X[n] n≥0	X(Z)	X(t) t>0	X(P)
$\partial[n]$	1	$\partial(t)$	1
$U[n]$	$\frac{Z}{Z-1}$	$U(t)$	$\frac{1}{P}$
n	$\frac{Z}{(Z-1)^2}$	t	$\frac{1}{P^2}$
a^n	$\frac{Z}{Z-a}$	e^{-at}	$\frac{1}{P+a}$
$\cos(n\omega_0)$	$\frac{Z^2 - Z\cos\omega_0}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 + 1}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{P}{P^2 + \omega_0^2}$
$sin(n\omega_0)$	$\frac{Z\sin\omega_0}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 + 1}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{P^2 + \omega_0^2}$
$a^n \cos(n\omega_0)$	$\frac{Z^2 - a.Z.\cos\omega_0}{Z^2 - 2.a.Z\cos\omega_0 + a^2}$	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)$	$\frac{P+a}{(P+a)^2 + \omega_0^2}$
$a^n\, sin(n\omega_0)$	$\frac{a.Z.\sin\omega_0}{Z^2 - 2.a.Z\cos\omega_0 + a^2}$	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(P+a)^2 + \omega_0^2}$

Figure 6.2 : Quelques transformées en Z et de Laplace

8.3 Relation entre la TZ et la TL

Dans le domaine continu, la TL est donnée par

$$X(P) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

Dans le domaine discret, et en considérant que x[n] est la représentation échantillonnée de x(t), on peut remplacer l'$\int$ par une $\sum$. Cette formule devient

$$\mathrm{X(P)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{x(kt)e^{-pkt}}$$

En posant : T=1 et $Z = e^{PT} \Longrightarrow X(P) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k).Z^{-k}$

La TL signal échantillonné est la TZ du signal numérique correspondant lorsqu'on pose $\mathrm{Z = e^{PT}}$

La TZ est une fonction de la variable Z qui est complexe

$\mathrm{Z} = \mathrm{e^{PT}} = e^{(\alpha+j\tau\omega)T} = e^{\alpha T}e^{j\omega T} = \rho e^{j\theta}$

$$\begin{cases} \rho \geq 1 \text{ si } \alpha \geq 0 \\ \rho < 1 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

L'axe imaginaire du plan « P » est transformé en un cercle de rayon unité.

- Le demi plan gauche correspond à l'intérieur du cercle.
- Le demi plan droit correspond à l'extérieur du cercle.

8.4 Domaine de convergence DCV

Le domaine de convergence DCV est l'ensemble des valeurs de la variable complexe pour lesquelles X(Z) converge. Pour trouver la région de CV, on peut utiliser le critère de Cauchy pour la convergence des séries de puissances.

Existence de X(Z)

$$\mathrm{X(Z)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x[n]Z^{-n}} = \mathrm{X_1(Z) + X_2(Z)}$$

$X_1(Z) = \sum_{-\infty}^{-1} \mathrm{x[n]Z^{-n}}$ et $X_2(Z) = \sum_{0}^{\infty} \mathrm{x[n]Z^{-n}}$

Critère de CAUHY

La série $\sum_{0}^{\infty} U_n = \mathrm{U_0} + U_1 + U_2 \ldots\ldots$ converge si $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} |\mathrm{U_n}|^{\frac{1}{\mathrm{n}}} < 1$

D'où $\mathrm{X_2(Z)}$ converge si : $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} |\mathrm{x(n)Z^{-n}}|^{\frac{1}{\mathrm{n}}} < 1$ c à d $\lim |\mathrm{x(n)}|^{\frac{1}{n}} \, |Z^{-1}| < 1$

Soit R_x^- la limite : $\lim|x(n)|^{\frac{1}{n}} = R_x^-$

$X_2(Z)$ converge alors pour : $\frac{R_x^-}{|Z|} < 1 \implies |Z| > R_x^-$

Le domaine de convergence, dans ce cas, est le plan extérieur au cercle de rayon R_x^-.

Avec le changement de variable l= -n, on peut montrer d'une façon similaire que la série X1(Z) converge pour $|Z| < R_x^+$ ou $R_x^+ = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{|x(-l)|^{\frac{1}{l}}}$

Le domaine de convergence, dans ce cas, correspond à l'intérieur du cercle de rayon R_x^+.

En général, la série $x(Z)=X_1(Z) + X_2(Z)$ converge dans un anneau du plan complexe de Z donné par

$$0 \leq R_x^- < |Z| < R_x^+ \leq +\infty$$

Le domaine de convergence DCV de $X(Z)=X_1(Z) + X_2(Z)$ correspond à la consonne comprise entre les cercles de rayons R_x^- et R_x^+.

Exemples

$x[n] = a^n.U[n] \implies X(Z) = \frac{Z}{Z-a}$

X(Z) converge si $|a\,Z^{-1}| < 1 \implies |Z| > |a|$ d'où $R_x^- = |a|$

Cas particuliers

- Si $x[n] \neq 0$ uniquement pour $n_1 \leq n \leq n_2$ (séquence de durée finie)
  $X(Z) = \sum_{n1}^{n2} x[n]Z^{-n} \implies \text{DCV}: 0 < |Z| < \infty$
- Si $x[n] = 0$ pour $n < n_1$ (séquence tournée à droite)
  $X(Z) = \sum_{n1}^{\infty} x[n]Z^{-n} \implies \text{DCV}: |Z| > R_x^-$ (extérieur du cercle)
- Si $x[n] = 0$ pour $n > n_2$ (séquence tournée à gauche)
  $X(Z) = \sum_{-\infty}^{n2} x[n]Z^{-n} \implies \text{DCV}: |Z| < R_x^+$ (interieur du cercle)
- Si $x[n] \neq 0$ pour $-\infty < n < +\infty$ (séquence bilatérale)

$$X(Z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]Z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]Z^{-n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]\, Z^{-n} \ \Longrightarrow \mathrm{DCV}: \ |Z| < R_x^+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, Z^{-n} \ \Longrightarrow \mathrm{DCV}: \ |Z| > R_x^-$$

Si $R_x^- < R_x^+$; il y a un domaine en commun et DCV : $R_x^- < |Z| < R_x^+$

Si $R_x^- > R_x^+$; X(Z) diverge.

9. Propriété de la TZ

Linéarité

$$x[n] \overset{TZ}{\rightarrow} X(Z) \text{ et } y[n] \overset{TZ}{\rightarrow} Y(Z)$$

$$a\, x[n] + b\, y[n] \overset{TZ}{\rightarrow} a\, X(Z) + b\, Y(Z)$$

Décalage temporel

$$x[n + n_0] \overset{TZ}{\rightarrow} Z^{n0} X(Z)$$

Cette propriété est essentielle pour la réalisation des filtres numériques. On représente schématiquement l'opérateur retard par Z^{-1}.

Exemple

$$U[n-3] \overset{TZ}{\rightarrow} Z^{-3}\frac{Z}{Z-1} = \frac{Z^{-2}}{Z-1}$$

$$\partial[n-1] \overset{TZ}{\rightarrow} Z^{-1} = \frac{1}{Z}$$

$$\partial[n+1] \overset{TZ}{\rightarrow} Z$$

Amortissement ou changement d'échelle

$$a^n \overset{TZ}{\rightarrow} X(a^{-1}Z) = X(\frac{Z}{a})$$

Dérivation

$$n\, x[n] \overset{TZ}{\rightarrow} -Z\, \frac{d}{dZ} X(z)$$

Séquence conjuguée

$$x^*[n] \xrightarrow{TZ} X^*(Z^*)$$

$$x^*[-n] \xrightarrow{TZ} X^*(Z^{-1})^*(Z^*)$$

Théorème de la valeur initiale

$$x[n] \text{ causal : } x[0] = \lim_{Z\to\infty} X(Z)$$

Théorème de la valeur finale

$$x[\infty] = \lim_{Z\to 1}(1 - Z^{-1})X(Z)$$

Exemple

$$F(Z) = \frac{Z^2 + 4Z - 2}{(Z-1)(Z^3 + 2Z + 4)}$$

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1} \frac{Z-1}{Z} \frac{Z^2+4Z-2}{(Z-1)(Z^3+2Z+4)} = \frac{3}{7} =$$

TZ du produit de convolution

$$x[n] \xrightarrow{TZ} X(Z) \text{ et } y[n] \xrightarrow{TZ} Y(Z)$$

$$w[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \xrightarrow{TZ} W(Z) = X(Z).Y(Z)$$

Exemple

$$y[n] = a^n U[n] \xrightarrow{TZ} Y(Z) = \frac{Z}{Z-a} \qquad |Z| > |a|$$

$$x[n] = U[n] \xrightarrow{TZ} X(Z) = \frac{Z}{Z-1} \qquad |Z| > 1$$

$$W(Z)X(Z).Y(Z) = \frac{Z^2}{(Z-a)(Z-1)} \Longrightarrow \frac{W(Z)}{Z} = \frac{Z}{(Z-a)(Z-1)} = \frac{A}{Z-a} + \frac{B}{Z-1}$$

$$A = \frac{a}{a-1} \; ; \quad B = \frac{1}{1-a}$$

$$W(Z) = \frac{a}{a-1}\frac{Z}{Z-a} + \frac{1}{1-a}\frac{Z}{Z-1} \xrightarrow{TZ^{-1}} w[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} U[n]$$

10. Transformée en Z inverse

Méthodes indirectes pour le calcul de la TZ inverse

❖ Division Polynomiale

C'est le principe de la division de deux polynômes. La TZ est une fraction rationnelle en Z. Si on écrit F(Z) sous la forme d'un rapport de deux polynômes en Z^{-k}, la division de ces deux polynômes donne encore un polynôme en Z^{-k}.

Exemple

$$X(Z) = \frac{1}{1-a\,Z^{-1}} \qquad |Z| > |a|$$

$$\frac{1}{1-a\,Z^{-1}} = 1 + aZ^{-1} + a^2Z^{-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n Z^{-n} = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

❖ Développement en fractions rationnelles

F(Z) peut être présentée sous forme de puissance en Z

$$F(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} = \frac{C_0\,Z^l + C_1\,Z^{l-1} + \cdots .+C_l}{Z^n + d_1\,Z^{n-1} + \cdots .+d_n} = \frac{C_0\,Z^l + C_1\,Z^{l-1} + \cdots .+C_l}{\prod_{m=1}^{n}(Z - Z_m)}$$

Z_m : représentent les pôles de F(Z) et la TZ^{-1} dépend de la nature de ses pôles. Le cas le plus courant est celui ou tous les pôles sont simples.

On exprime F(Z) sous la forme suivante

$$\frac{Y(Z)}{Z} = \frac{A_1}{Z - Z_1} + \frac{A_2}{Z - Z_2} + \cdots + \frac{A_k}{Z - Z_k}$$

Z_k : pôles de F(Z).

Les coefficients Ak sont déterminés par la méthode des résidus.

$$A_k = (Z - Z_k)\frac{Y(Z)}{Z}\bigg|\; Z = Z_k \quad \Longrightarrow y(n) = \sum_k A_k\,(Z_k)^n$$

Si les pôles sont multiples

$$F(Z) = \sum_k \frac{C_k}{(Z - Z_i)^s} \text{ et } C_k = \frac{1}{(s-1)!} \left\{ \frac{d^{s-k}}{dZ^{s-k}} [(Z - Z_i)^s \ F(Z)\}Z = Z_i \right.$$

Z_i est le pôles multiple et s est l'ordre du pôles multiple.

Si les pôles sont complexes, les coefficients A_k se présentent sous la forme complexe.

Si $Z_k = |Z_k|\ \theta_k$ et $A_k = |A|\ \varphi_k$

$$f(n) = A_k\ (Z_k)^n + A_k^*\ (Z_k^*)^n = 2\ |A_k|\ (Z_k)^n\ \cos(n\theta_k + \varphi)$$

Exemple

1- $F(Z) = \frac{Z^2}{(Z-1)(Z-0.5)} \Rightarrow \frac{F(Z)}{Z} = \frac{Z}{(Z-1)(Z-0.5)} = \frac{A_1}{(Z-1)} + \frac{A_2}{(Z-0.5)}$

$A_1 = (Z-1)\ \frac{F(Z)}{Z}|Z = 1 \ = 2$

$A_2 = (Z-0.5)\ \frac{F(Z)}{Z}|Z = 0.5 \ = -1$

$\frac{F(Z)}{Z} = \frac{2}{(Z-1)} - \frac{1}{(Z-0.5)} \Rightarrow F(Z) = 2\ \frac{Z}{(Z-1)} - \frac{Z}{(Z-0.5)}$

$f(n) = 2U(n) - (0.5)^n U(n)$

2- $F(Z) = \frac{Z(Z+1)}{Z^2-Z+0.5} \Rightarrow \frac{F(Z)}{Z} = \frac{Z+1}{Z^2-Z+0.5} = \frac{A_1}{(Z-P_1)} + \frac{A_2}{(Z-P_2)}$

Les pôles sont : $P_1 = 0.5 + j\ 0.5$ et $P_2 = 0.5 - j\ 0.5 = P_1^*$

$$P_1 = |P_1|\ e^{j\theta} \text{ avec } \begin{cases} |P_1| = \sqrt{(0.5)^2 + (0.5)^2 = 0.7} \\ \theta = \text{arctg}\ \frac{0.5}{0.5} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$P_2 = |P_1|^* = 0.7$ et $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$A_1 = (Z - P_1) \frac{H(Z)}{Z} \Big|\ Z = P_1 = 0.5 - j1.5 = 1.58\ |71.56°$

$A_2 = (Z - P_1^*) \frac{H(Z)}{Z} \Big|\ Z = P_1^* = 0.5 + j1.5 = 1.58\ |-71.56° = A_1^*$

$F(Z) = (0.5 + j\ 0.5)\ \frac{Z}{Z-P_1} + (0.5 - \ 0.5)\ \frac{Z}{Z-P_2}\ )$

$f(n) = (0.5 + j\ 0.5)\ (P_1)^n\ U(n) + (0.5 - j\ 0.5)\ (P_2)^n\ U(n)$

ou bien

$\mathrm{f(n)} = \mathrm{A_1} \ |\mathrm{P_1}|^{\mathrm{n}} \, \mathrm{U(n)} + \mathrm{A_1^*} \ |\mathrm{P_1^*}|^{\mathrm{n}} \, \mathrm{U(n)} = \{2\,|A_1|\,|P_1|^n \cos(n\theta + \varphi)\}U(n)$

$|P_1| = 0.7$; $|A_1| = 1.58$; $\theta = 45^\circ$; $\varphi = 71.56^\circ$

$\mathrm{f(n)} = 3.161\,|0.7|^{\mathrm{n}} \cos(45^\circ - 71.56^\circ)\,\mathrm{U(n)}$.

Règle : Pour la décomposition en éléments simples

- Plutôt que F(Z), on décompose $\frac{F(Z)}{Z}$ en éléments simples.
- On multiplie par Z chaque terme du développement.
- On prend la transformée inverse de chacun des éléments simples.

❖ **Méthode directe : Intégration directe par les résidus**

La TZ^{-1} de F(Z) est donnée par

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(C)} F(Z)\, Z^{n-1}\, dZ$$

(C) est un contour fermé appartenant au domaine de convergence.

Le théorème des résidus permet d'écrire

$\mathrm{f(n)} = \sum \{ \text{résidus de } \mathrm{F(Z)Z^{n-1}}$ aux pôles intérieurs à $(C)\}\, Z = Z_i$

$\mathrm{F(Z)Z^{n-1}} = \frac{\varphi(\mathrm{Z})}{(\mathrm{Z}-\mathrm{Z_0})^{\mathrm{s}}}$; Z_0 est un pôle d'ordre s de $F(Z)Z^{n-1}$

- Si Z_0 est un pôle multiple d'ordre s de $F(Z)Z^{n-1}$

  $Res\,\{F(Z)\,Z^{n-1}\}\ \mathrm{Z_0} = \frac{1}{(\mathrm{s}-1)!} \left\{\frac{\mathrm{d^{s-1}}}{\mathrm{dZ^{s-1}}}\ \varphi(\mathrm{Z})\right\} \mathrm{Z} = Z_0$

- Si s = 1 (pole simple) $\mathrm{F(Z)Z^{n-1}} = \frac{\varphi(\mathrm{Z})}{(\mathrm{Z}-\mathrm{Z_0})}$

  $Res\,\{F(Z)\,Z^{n-1}\ en\ Z = \mathrm{Z_0}\} = \varphi(Z_0)$

Exemple

$$\mathrm{F(Z)} = \frac{\mathrm{Z^2}}{(\mathrm{Z}-1)(\mathrm{Z}-0.5)} \implies f(n) = \sum des\ résidus\ \left\{Z^{n-1}\ \frac{\mathrm{Z^2}}{(\mathrm{Z}-1)(\mathrm{Z}-0.5)}\right\} Z = Z_i$$

$$f(n) = \sum des\ résidus\ \left\{\frac{Z^{n+1}}{(Z-1)(Z-0.5)}\right\} Z = Z_i$$

Les pôles sont $Z_1 = 1$ et $Z_2 = 0.5$

Calculons les résidus en ces pôles

- $res\left\{\frac{z^{n+1}}{(Z-1)(Z-0.5)}\right\}Z_{=1} = \left\{\frac{z^{n+1}}{Z-0.5}\right\} = 2$

- $res\left\{\frac{z^{n+1}}{(Z-1)(Z-0.5)}\right\}Z_{=0.5} = \left\{\frac{z^{n+1}}{Z-1}\right\} = -(0.5)^n$

$$\mathrm{f(n)} = \sum \text{des résidus} = (2 - (0.5)^{n})\mathrm{U(n)}$$

11. Exercices

Exercice 1 :

Un signal f (t) est échantillonné puis reconstruit par un filtre $H(\omega) = \frac{1-e^{j\omega T}}{j\omega}$ et donne le signal reconstruit g(t). Pour T = 1s et f(t) = tu(t)

- Trouver h(t).
- Donner l'expression du signal reconstruit g(t).
- Tracer g(t) pour au moins 4 périodes d'échantillonnage.

Exercice 2 :

Déterminer la TZ des séquences suivantes

$\delta(n)$; $U(n)$; $n\,U(n)$; $n^2\,u(n)$; $a^n\,U(n)$; $n\,a^n\,U(n)$; $e^{-ant}\,U(n)$; $\sin(n\omega_o)\,U(n)$;

$\cos(n\omega_o)\,U(n)$; $a^n \sin(n\omega_o)\,U(n)$; $a^n \cos(n\omega_o)\,U(n)$; $(1/2)^n\,U(-n)$

Exercice 3 :

Calculer la TZ^{-1} de

$$F(Z) = \frac{Z}{Z^3 - 1.9Z^2 + 1.1Z - 0,2} \quad ; \quad G(Z) = \frac{Z^2}{Z^2 - 1} \quad ; \quad H(Z) = \frac{0.1Z(Z+1)}{(Z-1)^2(Z-0.6)}$$

Exercice 4 :

Déterminer l'équation aux différences qui régit un système défini par la fonction de transfert suivante $G(Z) = \dfrac{0.2Z^{-1}}{1-0.8Z^{-1}}$

- Trouver g(n).

- Evaluer la valeur finale de g(n)

Exercice 5 :

Soit $x(n) = U(n)$ et $y(n) = e^{-an} U(n)$ avec $a > 0$

Calculer $w(n) = x(n) \otimes y(n)$

Bibliographie

[1] A.V. Oppenheim; Signals ans systems Prentice–Hall edition, 2004.

[2] F. Mudrey ; Signaux et systèmes SES ; Institut d'automatisation industrielle.

[3] M. Corinthios ; Signals , Systems ; Transforms and digital signal processing 2009

[4] M. Bellanger ;Traitement numérique du signal ; Théorie et pratique; Dunod ; 8e édition.

[5] F. Cottet ; Aide-mémoire Traitement du signal ; Dunod, 2000, 3e édition.

[6] M. Adams ; Continuous time signal and systems ; 2013.

[7] H.Hsu ; Signals and systems ; Schaum's outlines ; 1995.

[8] S. Haykin ; Signals and Systems, John Wiley, 2e édition2003.

[9] J. Max, Traitement du signal.

[10] É. Tisserand, JF. Pautex, P. Schweitzer; Analyse et traitement des signaux; Dunod, 2008, 2e édition.

[11] O.Alkin ; Signals ans systems ; CRC Press, 2014.