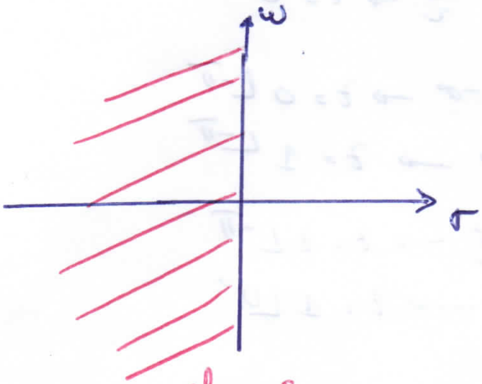
Chapitre 4 : Analyse des systs échantillonnés linéaires

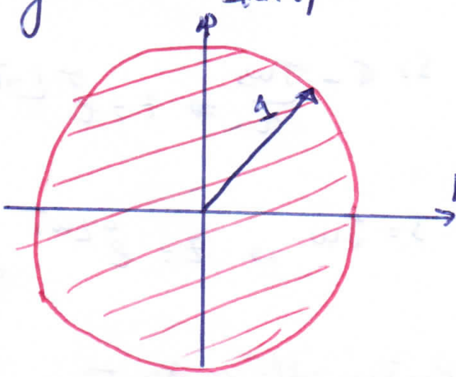
1/ Relation entre s et z :

on a : $z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \angle \omega T = e^{\sigma T} \angle \frac{\omega}{\omega_s} 2\pi$.

où $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$ est la période d'échantillonnage.



plan s



plan z

Remarque : il est clair que les pôles stables sont à l'intérieur du cercle unité dans le plan z, car un pôle stable est caractérisé par une partie réelle négative ce qui conduit à : $\boxed{|z| = e^{\sigma T} < 1}$ et par conséquence

On a : $s = \sigma + j\omega = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow z = e^{Ts} = e^{-\xi\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1-\xi^2}} = e^{-\xi\omega_n T}\angle \omega_n T\sqrt{1-\xi^2}$

et on a aussi : $z = r\angle\theta \Rightarrow \begin{cases} r = e^{-\xi\omega_n T} \\ \theta = \omega_n T\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \xi = \dfrac{-\ln r}{\sqrt{\ln^2 r + \theta^2}} \\ \omega_n = \dfrac{1}{T}\sqrt{\ln^2 r + \theta^2} \end{cases}}$$

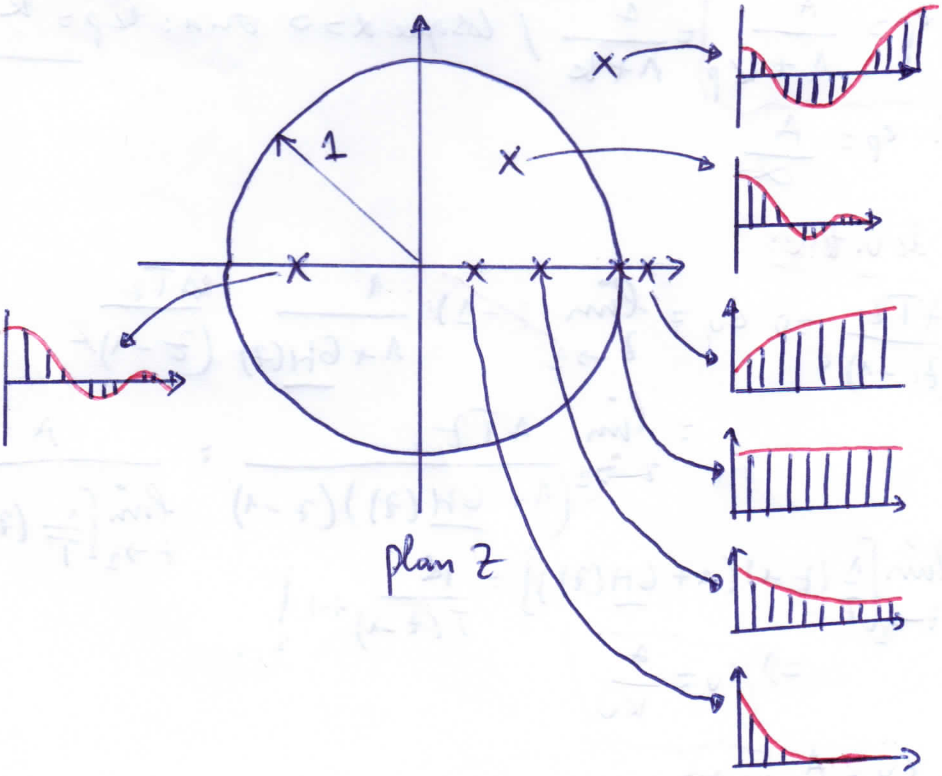
Exemple : Considérons le syst : $G(s) = \dfrac{0{,}368z + 0{,}264}{z^2 - z + 0{,}632}$

– déterminer ξ et ω_n ($T = 1$).

On a : $z^2 - z + 0{,}632 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 0{,}5 \pm j\,0{,}615 = 0{,}792\angle 51° = 0{,}792\angle \pm 0{,}89\,\text{rd}$

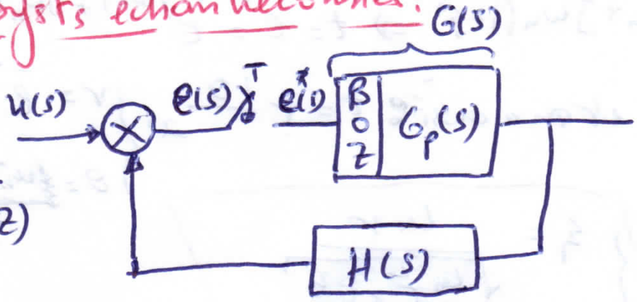
$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = \dfrac{-\ln r}{\sqrt{\ln^2 r + \theta^2}} = \dfrac{-\ln(0{,}792)}{\sqrt{\ln^2(0{,}792) + (0{,}89)^2}} = 0{,}25 \\ \omega_n = \dfrac{1}{T}\sqrt{\ln^2 r + \theta^2} = \sqrt{\ln^2(0{,}792) + (0{,}89)^2} = 0{,}971\ \text{rd/s}. \end{cases}$$

2/ Caractéristique de la réponse temporelle en fonction des pôles dans le plan-z :



3/ Précision des systs échantillonnés:

$$e^*(s) = \frac{u(z)}{1+\underline{GH}(z)}$$



On définie : $e = \lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)e(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{1+\underline{GH}(z)}u(z)$.

Notant que : $\underline{GH}(z) = \frac{k}{(z-1)^\alpha}\underbrace{\boxed{\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}}}_{F(z)}$ / avec : α est la classe du syst.
k : est le gain statique
et $F(1) = 1$. $\cancel{Z[F(s)]_{s\to 0}}$

A/ Erreur de position:

$u(t)$ est un échelon $\Rightarrow u(z) = \frac{Az}{z-1}$

$$e_p = \lim_{z\to 1}\frac{\cancel{(z-1)}}{1+\underline{GH}(z)}\cdot\frac{Az}{\cancel{(z-1)}} = \lim_{z\to 1}\frac{Az}{1+\underline{GH}(z)} = \frac{A}{1+\lim_{z\to 1}\underline{GH}(z)}$$

et on a : $\lim_{z\to 1}\underline{GH}(z) = \frac{k}{(z-1)^\alpha}\Big|_{z=1} = k_p$ constante de l'erreur de position.

$\alpha = 0$: $\boxed{e_p = \frac{A}{1+k_p}} = \frac{A}{1+k}$ / lorsque $\alpha = 0$ on a : $\boxed{k_p = k}$.

$\alpha \geq 1$: $e_p = \frac{A}{\infty}$

B/ erreur de vitesse:

$$u(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2} \Rightarrow e_v = \lim_{z\to 1}\cancel{(z-1)}\frac{1}{1+\underline{GH}(z)}\frac{ATz}{(z-1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{ATz}{(1+\underline{GH}(z))(z-1)} = \frac{A}{\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{T}(z-1)(1+\underline{GH}(z))\right]}$$

Soit : $k_v = \lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{T}(z-1)(1+\underline{GH}(z))\right] = \frac{K}{T(z-1)^{\alpha-1}}\Big|_{z=1}$

$$\Rightarrow \boxed{e_v = \frac{A}{k_v}}$$

$\alpha = 0$: $e_v = \frac{A}{0} = \infty$

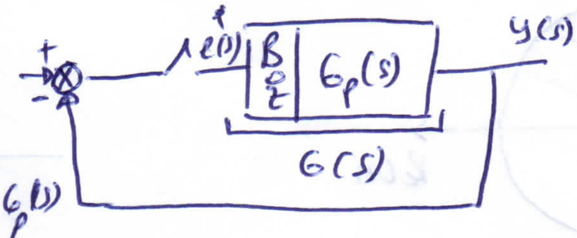
$\alpha = 1$: $e_v = \frac{AT}{K}$

$\alpha \geq 2$: $e_v = \frac{A}{\infty} = 0$

Remarque :

Dans un syst échantillonné, si le nombre des pôles $z=1$ est élevé, cela signifie que ce syst est plus précis. Cependant, les pôles conduit le syst vers l'instabilité.

Exemple :



Soit : $G_p(s) = \dfrac{k}{s(s+1)}$

- pour le syst $G(s) = B_0(s)\, G_p(s)$

Calculer l'erreur de position, de vitesse et d'accélération.

Sol : On a : $G(s) = \dfrac{k(1-e^{-Ts})}{s^2(s+1)} \Rightarrow G(z) = k\dfrac{(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$

$\Rightarrow \alpha = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} e_p = 0 \\ e_v = \dfrac{1}{k_v} \end{cases}$ et $k_v = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{1}{T}(z-1)G(z) = \dfrac{k}{T}\, \dfrac{(T\cancel{-1}+\cancel{e^{-T}}) + (\cancel{1}-\cancel{e^{-T}}-Te^{-T})}{(z-e^{-T})}\Bigg|_{z=1}$

$= \dfrac{k}{\cancel{T}}\, \dfrac{\cancel{T}\cancel{(1-e^{-T})}}{\cancel{(1-e^{-T})}} = k.$

$\Rightarrow e_v = \dfrac{1}{k}$

et $e_a = \infty$

c) Critère de stabilité de Jury :

Ce critère permet de savoir si une équation polynomiale à coefficients réels $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$, à ces racines inférieurs à 1 en module. Pour pouvoir appliquer le critère de Jury à $P(z)$ on construit d'abord le tableau suivant :

	z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_1	b_0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3			
$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0			
$2n-3$	q_0	q_1	q_2				

tel que :

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2.$$

$$\vdots$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_0 & p_{3-k} \\ p_3 & p_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Pour que le polynôme $P(z)$ a toutes ces racines à l'intérieur du cercle unitaire il faut que les conditions suivantes sont satisfaites :

1- $|a_0| < |a_n|$

2- $P(1) > 0$

3- $P(-1) \begin{cases} >0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ <0 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$

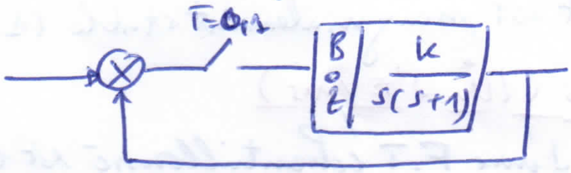
4- $|b_0| > |b_{n-1}|$

5- $|c_0| > |c_{n-2}|$

$\vdots$

n- $|q_0| > |q_2|$.

Exemple: Déterminer k pour que le syst ci-dessous soit stable:



On a: $G(z) = k\dfrac{(0{,}00484z+0{,}00468)}{(z-1)(z-0{,}905)} = k\dfrac{(0{,}00484z+0{,}00468)}{z^2-1{,}905z+0{,}905}$

$\Rightarrow G_{BF}(z) = \dfrac{k(0{,}00484z+0{,}00468)}{z^2+(0{,}00484k-1{,}905)z+(0{,}00468k+0{,}905)}$

$\Rightarrow n=2$, $a_0 = 0{,}00468k+0{,}905$, $a_1 = 0{,}00484k-1{,}905$, $a_2 = 1$.

1- $|a_0| < |a_2| \Rightarrow 0{,}00468k+0{,}905 < 1 \Rightarrow k < \dfrac{0{,}095}{0{,}00468} = \boxed{20{,}3}$

2- $P(1) = 0{,}00952k > 0 \Rightarrow k > 0$

$P(-1) = 3{,}81 - 0{,}0016k > 0 \Rightarrow k < 2381{,}25$

Le syst est stable si: $\boxed{0 < k < 20{,}3}$

Remarque: le syst est marginalement stable pour $k = 20{,}3$, pour cette valeur de k

$P(z) = z^2 - 1{,}806z + 1 = 0 \Rightarrow$ les racines de ce polynôme sont $z_{1,2} = 0{,}903 \pm j0{,}429$
$= 1 \angle \pm 25{,}4 = \pm 0{,}4434^{rad}$

le syst oscille avec la fréquence : $\angle \omega T = \underline{0{,}4434 \text{ rad}}$

$\Rightarrow \omega = 4{,}434$ rad/s.

Exemple 2: $P(z) = z^3 - 1{,}1z^2 - 0{,}1z + 0{,}2 = 0$

1- $|a_0| < |a_n| \Rightarrow 0{,}2 < 1$

2- $P(1) > 0 \Rightarrow P(1) = 1 - 1{,}1 - 0{,}1 + 0{,}2 = 0 \Rightarrow 1$ est une racine de $P(z)$

3- $P(-1) < 0 \Rightarrow P(-1) = -1 - 1{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 = -1{,}8 < 0$ $(n=3)$.

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0,2	-0,1	-1,1	1
2	1	-1,1	-0,1	0,2
3	-0,96	1,08	-0,12	

$|b_0| > |b_{n-1}| \Rightarrow |b_0| > |b_2| \Rightarrow |-0{,}96| > |-0{,}12|$.

$\Rightarrow$ le syst est marginalement stable (1 racine).