Chapitre 2 : Les séries de Fourier

1- Composant d'un signal.

Considérons l'approximation d'un signal $f(t)$ en terme d'un autre signal réel $x(t)$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$

$$f(t) \simeq c\,x(t) \qquad t_1 \leq t \leq t_2.$$

L'erreur dans ce cas :

$$e(t) = \begin{cases} f(t) - c\,x(t) & t_1 \leq t \leq t_2. \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Pour une meilleure approximation, nous pouvons minimiser le signal erreur soit sa taille (ou énergie) E_e sur $[t_1, t_2]$

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(f(t) - c\,x(t)\right)^2 dt$$

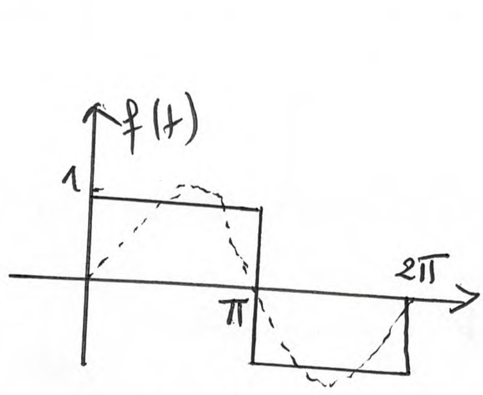
E_e est une fct du paramètre (c) (et non t). Pour le minimiser une condition nécessaire sera :

$$\frac{dE_e}{dc} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dc}\left[\int_{t_1}^{t_2} \left(f(t) - c\,x(t)\right)^2 dt\right] = 0$$

$$\cancel{\frac{d}{dc}\left[\int f^2(t)\,dt\right]} - \frac{d}{dc}\left[2c\int f(t)\,x(t)\,dt\right] + \frac{d}{dc}\left[c^2 \int x^2(t)\,dt\right] = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,x(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt} = \frac{1}{E_x}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,x(t)\,dt.$$

Exple :



* Pour le signal $f(t)$, effectuer une approximation de $f(t)$ en terme de $\sin(t)$

- $f(t) = c(x(t)) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$.

tel que l'énergie de l'erreur soit minimale.

Dans ce cas : $x(t) = \sin(t)$ et $E_x = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt = \pi$

et donc $$C = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(t) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin t\, dt\right]$$

$$C = \frac{4}{\pi}$$

donc : $f(t) \simeq \frac{4}{\pi} \sin t$

* Pour généraliser les résultats pour des fct complexes on aura : $$C = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, x^*(t)\, dt.$$

2 - Représentation d'un signal par un ensemble de signaux orthogonaux :

- Nous considérons l'approximation d'un signal $f(t)$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$ par un ensemble de N signaux orthogonaux $x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)$.

$$f(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_N x_N(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n x_n(t)$$

un ensemble de signaux réels $x_1(t) \dots x_N(t)$ sont orthogonaux sur $[t_1, t_2]$ si :

$$\int_{t_1}^{t_2} x_m(t)\, x_n(t) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ E_n & m = n \end{cases}$$

L'erreur de cette approximation :

$$e(t) = f(t) - \sum_{n=1}^{N} C_n x_n(t)$$

énergie de l'erreur est minimisée si :

$$C_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, x_n(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t)\, dt} = \frac{1}{E_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, x_n(t)$$

2-1 - Serie de Fourier trigonometriques

On considère un système de signaux : 1, $\cos \omega_0 t$, $\cos 2\omega_0 t$, ..., $\cos n\omega_0 t$, ..., $\sin \omega_0 t$, $\sin 2\omega_0 t$, ... $\sin n\omega_0 t$.

Ce système de signaux est orthogonal sur un intervalle de durée $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ qui est la periode de la fondamentale

$$\int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T_0}{2} & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T_0}{2} & n = m \neq 0 \end{cases}$$

et $\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \cos n\omega_0 t = 0 \quad \forall n$

Donc, on peut exprimer le signal $f(t)$ par les series de Fourier trigonométriques sur un intervalle de durée T_0 :

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \qquad t_1 < t < t_1 + T_0.$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

et $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

en utilisant la relation : $c_n = \frac{1}{E_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, x_n(t)\, dt$

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt}{\int_{t_1}^{t_2} \cos^2 n\omega_0 t \, dt}$$

pour $n = 0 \Longrightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\, dt}$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt}, \quad \boxed{b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

* La forme compacte des series de Fourier :
en utilisant la relation

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

avec : $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\theta_n = tg^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

on met : $C_0 = a_0$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad t_1 \leq t \leq t_1 + T_0$$

(C_0 est la moyenne de $f(t)$ sur l'intervalle d'une période)

<u>Exemple</u> :

trouver la forme trigonometrique compacte des series de Fourier de la fct $e^{-t/2}$ sur l'intervalle $0 \leq t \leq \pi$, $T_0 = \pi$, la frequence fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2$.

<u>Solution</u>

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\, dt = 0{,}504$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos 2nt\, dt = 0{,}504\left(\frac{2}{1+16n^2}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin 2nt\, dt = 0{,}504\left(\frac{8n}{1+16n^2}\right). \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

la forme compacte :

$$C_0 = a_0 = 0{,}504 .$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0{,}504\sqrt{\frac{4}{(1+16n^2)^2} + \frac{64n^2}{(1+16n^2)^2}} = 0{,}504\left(\frac{2}{\sqrt{1+16n^2}}\right)$$

donc pour $\theta_n = tg^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = tg^{-1}(-4n) = -tg^{-1}(4n)$.

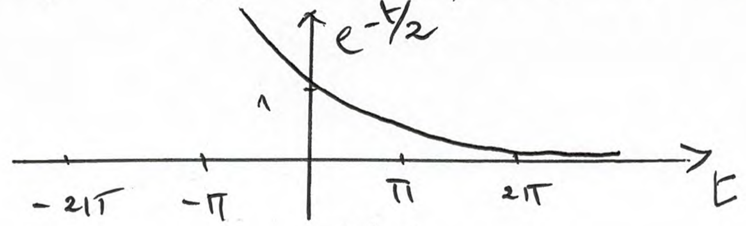
n	0	1	2	3	4	5	6	7
C_n	0,504	0,244	0,125	0,084	0,063	0,0504	0,042	0,036
θ_n	0	-75,96	-82,24	-85,24	-86,42	-87,16	-87,61	-87,95

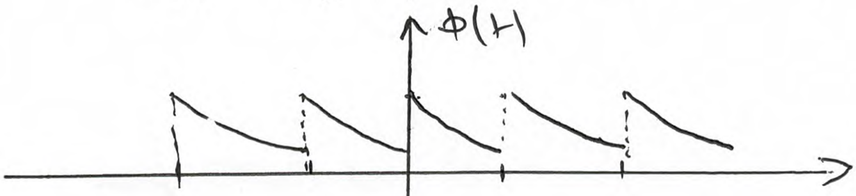
donc on peut ecrire $f(t)$ sous la forme :

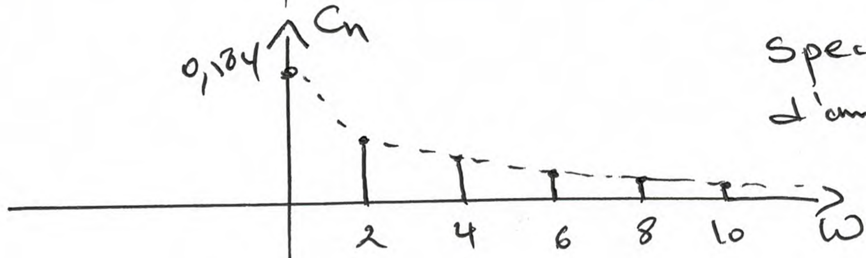
$$f(t) = 0{,}504 + 0{,}504 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+16n^2}} \left(\cos 2nt - tg^{-1}(4n) \right)$$

$$= 0{,}504 + 0{,}244 \cos(2t - 75{,}96^\circ) + 0{,}125 \cos(4t - 82{,}87^\circ)$$

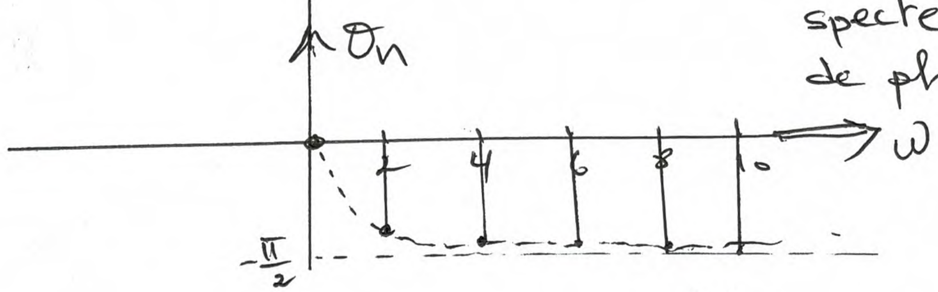
$$+ 0{,}084 \cos(6t - 85{,}24^\circ) + 0{,}063 \cos(8t - 86{,}42^\circ) + \cdots$$







Spectre d'amplitude



spectre de phase.

* Notons que cette equation represente $e^{-t/2}$ sur $[0, \pi]$ uniquement au dela de cet intervalle l'egalité n'est pas verifiée.
* Les series de fourier est une fct periodique de periode T_0
* si $f(t)$ est une fct periodique de T_0, donc la S.F de $f(t)$ est valide sur tout t. Cela nous permet de calculer a_0, a_n, b_n pour n'importe quel intervalle de durée T_0.

2.2 - Serie de Fourier Exponentiel :

Une autre forme de SF, qui est plus utilisée est celle de serie de Fourier exponentielle. Pour un signal $f(t)$, il peut être exprimé sur T_0 :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} f(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} + D_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\ D_0 = C_0 . \end{array} \right.$$

et $$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} .$$

et par rapport à la forme trigon. compacte :

$$D_n = \frac{1}{2} C_n e^{j\theta_n} \quad \text{et} \quad D_{-n} = \frac{1}{2} C_n e^{-j\theta_n}$$

et $$D_n = \frac{1}{2}\left(a_n - j b_n \right).$$

<u>Exemple</u> (suite).

Calcul de la SF. expo. de $e^{-t/2}$

$T_0 = \pi$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2$ et

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{j2nt}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int e^{-t/2} e^{-j2nt} dt = \frac{0{,}504}{1 + j4n}$$

et $$\varphi(t) = 0{,}504 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+j4n} e^{j2nt}$$

$$= 0{,}504 \Big[1 + \frac{1}{1+j4} e^{j2t} + \frac{1}{1+j8} e^{j4t} + \frac{1}{1+j12} e^{j6t} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{1-4j} e^{-j2t} + \frac{1}{1-j8} e^{-j4t} + \frac{1}{1-j12} e^{-j6t} + \cdots \Big].$$

Les coeff D_n sont complexes et D_n et D_{-n} sont conjugués

- Spectre de Fourier

Par comparaison avec la S.F compacte :

$D_0 = a_0 = C_0$

si $f(t)$ est fct réelle :

$|D_n| = |D_{-n}| = \frac{1}{2} C_n$. $n \neq 0$ ← fct paire

$\arg(D_n) = \theta_n$ et $\arg(D_{-n}) = -\theta_n$ ← fct impaire

donc : $D_n = |D_n| e^{j\theta_n}$ et $D_{-n} = |D_n| e^{-j\theta_n}$.

$|D_n|$ est l'amplitude et $\arg(D_n)$ est l'orientation (argument) des différentes composantes.

<u>exple (suite)</u>

dans l'exple précédent :

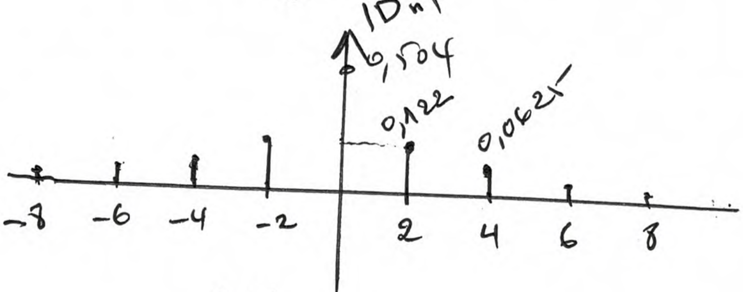
$D_0 = 0{,}504$

$D_1 = \frac{0{,}504}{1+j4} = 0{,}122\, e^{-j75{,}96} \longrightarrow |D_1| = 0{,}122,\ \arg(D_1) = -75{,}96°$

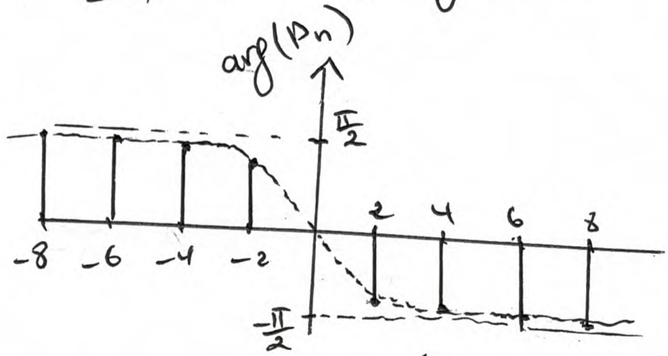
$D_{-1} = \frac{0{,}504}{1-j4} = 0{,}122\, e^{j75{,}96} \longrightarrow |D_{-1}| = 0{,}122,\ \arg(D_{-1}) = 75{,}96°$

$D_2 = \frac{0{,}504}{1+j8} = 0{,}0625\, e^{-j82{,}87} \longrightarrow |D_1| = 0{,}0625,\ \arg(D_2) = -82{,}87°$

$D_{-2} = \frac{0{,}504}{1-j8} = 0{,}0625\, e^{j82{,}87} \longrightarrow |D_{-2}| = 0{,}0625,\ \arg(D_{-2}) = 82{,}87°$



fct paire



fct impaire

* Remarque

- La composante D_0 est la même que C_0.
- Le spectre d'amplitude $|D_n|$ est la moitié de celle de $|C_n|$ pour $n \geq 1$.