# حلول السلسلة الاولى

**التمرين الاول:**

أ) $[\hat{H},\hat{P}]=[\frac{\hat{P}^2}{2m}+V,\hat{P}]=[\frac{\hat{P}^2}{2m},\hat{P}]+[V,\hat{P}]$.

نجد أن

$$[\frac{\hat{P}^2}{2m},\hat{P}]=\frac{1}{2m}[\hat{P}^2,\hat{P}]=0$$

وكذلك $[V,\hat{P}]=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial x}$ إذاً نجد أن $[\hat{H},\hat{P}]=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial x}$.

ب) $[\hat{H},\hat{X}]=[\frac{\hat{P}^2}{2m}+V,\hat{X}]=[\frac{\hat{P}^2}{2m},\hat{X}]+[V,\hat{X}]$ نجد أن

$$[\frac{\hat{P}^2}{2m},\hat{X}]=\frac{1}{2m}[\hat{P}^2,\hat{X}]=\frac{1}{2m}\left\{\hat{P}[\hat{P},\hat{X}]+[\hat{P},\hat{X}]\hat{P}\right\}$$

$$[\frac{\hat{P}^2}{2m},\hat{X}]=\frac{1}{2m}\left\{\hat{P}(-i\hbar)+(-i\hbar)\hat{P}\right\}=-i\hbar\frac{\hat{P}}{m}$$

وكذلك نجد أن $[V,\hat{X}]=0$. إذاً $[\hat{H},\hat{X}]=-i\hbar\frac{\hat{P}}{m}$.

(ج)

$$[\hat{H},\hat{X}\hat{P}]=\hat{X}[\hat{H},\hat{P}]+[\hat{H},\hat{X}]\hat{P}$$

$$[\hat{H},\hat{X}\hat{P}]=\hat{X}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial x}\right)-i\hbar\frac{\hat{P}}{m}\hat{P}$$

إذاً نجد أن

$$[\hat{H},\hat{X}\hat{P}]=i\hbar\,\hat{X}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{i\hbar}{m}\hat{P}^2.$$

**التمرين الثاني:**

(1) (أ) $[\hat{a},\hat{a}^+]$

$$[\hat{a},\hat{a}^+]=[\alpha\hat{X}+i\beta\hat{P},\alpha\hat{X}-i\beta\hat{P}]=[\alpha\hat{X},\alpha\hat{X}-i\beta\hat{P}]+[i\beta\hat{P},\alpha\hat{X}-i\beta\hat{P}]$$

$$[\hat{a},\hat{a}^+]=[\alpha\hat{X},\alpha\hat{X}]-[\alpha\hat{X},i\beta\hat{P}]+[i\beta\hat{P},\alpha\hat{X}]+[i\beta\hat{P},-i\beta\hat{P}]$$

$$[\hat{a},\hat{a}^+]=\alpha^2[\hat{X},\hat{X}]-i\alpha\beta[\hat{X},\hat{P}]+i\alpha\beta[\hat{P},\hat{X}]+\beta^2[\hat{P},\hat{P}]$$

وبما أن $[\hat{X},\hat{X}]=0,\ [\hat{X},\hat{P}]=i\hbar,\ [\hat{P},\hat{X}]=-i\hbar,\ [\hat{P},\hat{P}]=0$ فإن

$$[\hat{a},\hat{a}^+]=-i\alpha\beta(i\hbar)+i\alpha\beta(-i\hbar)=2\alpha\beta\,\hbar=2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\ \ \hbar=1$$

أو

$$[\hat{a},\hat{a}^+]=1$$

(ب)

$$[\hat{a},\hat{X}]=[\hat{X},\alpha\hat{X}+i\beta\hat{P}]=[\hat{X},\alpha\hat{X}]+[\hat{X},i\beta\hat{P}]$$

$$[\hat{a},\hat{X}]=\alpha[\hat{X},\hat{X}]+i\beta[\hat{X},\hat{P}]=0+i\beta(i\hbar)=-\beta\,\hbar$$

إذاً نجد أن

$$[\hat{a},\hat{X}]=-\beta\,\hbar$$

(ج)

$$[\hat{a},\hat{P}]=[\alpha\hat{X}+i\beta\hat{P},\hat{P}]=[\alpha\hat{X},\hat{P}]+[i\beta\hat{P},\hat{P}]$$
$$[\hat{a},\hat{P}]=\alpha[\hat{X},\hat{P}]+i\beta[\hat{P},\hat{P}]=\alpha(i\hbar)+0$$

إذاً نجد أن

$$[\hat{a},\hat{P}]=i\hbar\alpha$$

(د) نوجد أولاً

$$\hat{a}^{+}\hat{a}=(\alpha\hat{X}-i\beta\hat{P})(\alpha\hat{X}+i\beta\hat{P})$$
$$\hat{a}^{+}\hat{a}=\alpha^{2}\hat{X}^{2}+i\beta\alpha\hat{X}\hat{P}-i\beta\alpha\hat{X}\hat{P}+\beta^{2}\hat{P}^{2}$$
$$\hat{a}^{+}\hat{a}=\alpha^{2}\hat{X}^{2}+i\beta\alpha(\hat{X}\hat{P}-\hat{P}\hat{X})+\beta^{2}\hat{P}^{22}$$

أو على الصورة

$$\hat{a}^{+}\hat{a}=\alpha^{2}\hat{X}^{2}+i\beta\alpha[\hat{X},\hat{P}]+\beta^{2}\hat{P}^{2}$$
$$\hat{a}^{+}\hat{a}=\alpha^{2}\hat{X}^{2}+i\beta\alpha(i\hbar)+\beta^{2}\hat{P}^{2}$$
$$\hat{a}^{+}\hat{a}=\alpha^{2}\hat{X}^{2}-\beta\alpha\,\hbar+\beta^{2}\hat{P}^{2}=\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{X}^{2}-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{P}^{2}$$

إذاً نجد أن

$$\hat{a}^{+}\hat{a}=\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{X}^{2}-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{P}^{2}$$

ومنها يكون

$$\hat{H}=\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2})=\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{X}^{2}-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{P}^{2}+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\hat{H}=\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2}m\omega^{2}\hat{X}^{2}+\frac{\hat{P}^{2}}{2m}=\frac{\hat{P}^{2}}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^{2}\hat{X}^{2}$$

ومنها نجد أن $\hat{H}=\frac{\hat{P}^{2}}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^{2}\hat{X}^{2}$. يُمثل هذا المؤثر مؤثر هاملتون للمهتز التوافقي البسيط. والآن نجد أن

$$[\hat{H},\hat{a}]=[(\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2})\hbar\omega,\hat{a}]=\hbar\omega[(\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2}),\hat{a}]$$
$$[\hat{H},\hat{a}]=\hbar\omega\big[[\hat{a}^{+}\hat{a},\hat{a}]+[\tfrac{1}{2},\hat{a}]\big]$$
$$[\hat{H},\hat{a}]=\hbar\omega[\hat{a}^{+}\hat{a},\hat{a}]=\hbar\omega\big[\hat{a}^{+}[\hat{a},\hat{a}]+[\hat{a}^{+},\hat{a}]\hat{a}\big]$$
$$[\hat{H},\hat{a}]=\hbar\omega[\hat{a}^{+},\hat{a}]\hat{a}=-\hbar\omega\,\hat{a}$$

إذاً

$$[\hat{H},\hat{a}]=-\hbar\omega\,\hat{a}$$

حيث استخدمنا القوسين $[\hat{a}^{+},\hat{a}]=-1$ و $[\tfrac{1}{2},\hat{a}]=0$. ونجد كذلك ان

$$[\hat{H},\hat{a}^{+}]=[(\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2})\hbar\omega,\hat{a}^{+}]=\hbar\omega[(\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2}),\hat{a}^{+}]$$
$$[\hat{H},\hat{a}^{+}]=\hbar\omega\big[[\hat{a}^{+}\hat{a},\hat{a}]+[\tfrac{1}{2},\hat{a}^{+}]\big]$$
$$[\hat{H},\hat{a}^{+}]=\hbar\omega[\hat{a}^{+}\hat{a},\hat{a}^{+}]=\hbar\omega\big[\hat{a}^{+}[\hat{a},\hat{a}^{+}]+[\hat{a}^{+},\hat{a}^{+}]\hat{a}\big]$$
$$[\hat{H},\hat{a}^{+}]=\hbar\omega\,\hat{a}^{+}[\hat{a},\hat{a}^{+}]=\hbar\omega\,\hat{a}^{+}$$

حيث استخدمنا القوسين $[\hat{a},\hat{a}^{+}]=1$ و $[\tfrac{1}{2},\hat{a}^{+}]=0$. إذاً فإن

$$[\hat{H},\hat{a}^{+}]=\hbar\omega\,\hat{a}^{+}$$

**التمرين الرابع:**

نجد أن الطاقة الكلية تُعطى من المعادلة

$$\hat{H}\psi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\psi_0 = E_0\psi_0$$

حيث

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A\exp(-x^2/2a^2)\right) = -\frac{x}{a^2}A\exp(-x^2/2a^2)$$

و

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(A\exp(-x^2/2a^2)\right) = -\frac{1}{a^2}A\exp(-x^2/2a^2) + \frac{x^2}{a^4}A\exp(-x^2/2a^2)$$

ومنها يكون

$$\hat{H}\psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{a^2}+\frac{x^2}{a^4}\right)A\exp(-x^2/2a^2) + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2A\exp(-x^2/2a^2)$$

ومنها نحصل على

$$\hat{H}\psi_0(x) = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\psi_0(x) = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\psi_0(x)$$ حيث $a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

من الواضح أن هذه الدالة دالة ذاتية لمؤثر هاملتون. ونجد منها طاقة الحالة الأرضية الكلية والتي تساوي

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$$

$$\hat{p}\psi_0(x) = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A\exp(-x^2/2a^2)\right) = -i\hbar\left(-\frac{x}{a^2}A\exp(-x^2/2a^2)\right) = \frac{i\hbar x}{a^2}\psi_0(x)$$

الجدير بالذكر أن هذه الحالة ليست دالة ذاتية لمؤثر كمية الحركة، حيث نجد أن المقدار $i\hbar x/a^2$ ليس عدداً بل دالة، وذلك بسبب أن مؤثر كمية الحركة لايتبادل مع مؤثر هاملتون، أي $[\hat{H},\hat{P}] \neq 0$.

**التمرين الرابع:**

**التمرين الخامس:**

(أ) تُعطى مُعَايرة الدالة بالمعادلة $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$ وبالتعويض نجد أن

$\int_{-\infty}^{\infty} |C|^2 \; x^2 \exp(-2x^2)\, dx = 1$ . بم أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-ax^2)\, dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

وبالتالي يصبح التكامل السابق على الصورة

$$|C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-2x^2)\, dx = |C|^2 \; \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1$$

ومنه نحصل على ثابت المُعَايرة $C$ حيث نجد أن $|C|^2 = \sqrt{\frac{32}{\pi}}$.

(ب) يُعطى متوسط كمية حركة الجسيم $p_x$ بالعلاقة

$$< p_x >= \int_0^{\infty} \psi^* \hat{P} \psi \; dx = \int_0^{\infty} \psi^* \; \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

بالتعويض عن $\psi$ أعلاه نجد أن

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2x^2 C \exp(-x^2) + C \exp(-x^2)$$

ومنها يكون

$$< \; p_x \; >= \; \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} C^* \; \exp(-x^2) \; (-2x^2 C \; \exp(-x^2) + \; C \; \exp(-x^2)) \;\; dx$$

$$< p_x >= \frac{\hbar}{i} |C|^2 \left[ -2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-2x^2) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2x^2) \; dx \right]$$

$$< p_x >= \frac{\hbar}{i}\left[ -2 + |C|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{\hbar}{i}(-2+4) = \frac{2\hbar}{i}$$

حيث استخدمنا التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-ax)\, dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(ج) يُعطى متوسط مربع كمية الحركة بالعلاقة

$$< p_x^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{P}^2 \psi \; dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2})\, dx$$

ومن الدالة $\psi$ أعلاه نجد أن

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[ -2x^2 C \exp(-x^2) + C \exp(-x^2) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -4xC \exp(-x^2) + 4x^3 C \exp(-x^2) - 2xC \exp(-x^2)$$

وبالتعويض نحصل على

$$< p_x^2 > = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} C^* x \exp(-x^2)[-4x\exp(-x^2) + 4x^3 \exp(-x^2) - 2x\exp(-x^2)]dx$$

$$< p_x^2 > = -\hbar^2 \,|C|^2 \left[-6\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2)\,dx + 4\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-x^2)\,dx\right]$$

$$< p_x^2 > = 3\hbar^2$$

حيث استخدمنا التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-ax^2)\,dx = \frac{3}{4a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

وبالتالي نجد أن

$$.\ \Delta p = \sqrt{< p_x^2 > - < p_x >^2} = \sqrt{0 + 4\hbar^2} = 2\hbar$$

يُعطى متوسط موقع الجسيم بالعلاقة

$$< x > = \int x\,|\psi|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |C|^2\, x^3 \exp(-2x^2)\,dx$$

$$< x > = 0$$

ومتوسط مربع الموقع بالعلاقة

$$< x^2 > = \int x^2\,|\psi|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |C|^2\, x^4 \exp(-2x^2)\,dx$$

أو

$$< x^2 > = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-2x^2)\,dx = |C|^2\, \frac{3}{4(4)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$< x^2 > = \frac{3}{4}$$

حيث استخدمنا التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-ax)\,dx = \frac{3}{4a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ومنهما نحصل على

$$\Delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - 0} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

نجد أن علاقة هايزنبرج للاتحديد تنتج

$$\Delta x\,\Delta p_x = \frac{1}{2}\sqrt{3}(\hbar) = 0.866\,\hbar \geq \frac{\hbar}{2}$$

**التمرين السادس:**

لمعرفة عمّا إذا كان المؤثر $\hat{A}$ هيرميتياً نطبق الشرط التالي

$$\hat{A} = \hat{A}^+$$

نحصل على $\hat{H}^+$ بإيجاد مدورة المصفوفة $\hat{H}$، ثم نأخذ المرافق لكل عنصر في المصفوفة.

$$\hat{H}^+ = \hat{H}^{T*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \hat{H} \quad \text{و} \quad \hat{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

إذاً نجد أن $\hat{H}$ مؤثر هيرميتي وتكون بالتالي القيم الذاتية له أعداداً حقيقية. تُمَثِّل القيم الذاتية لمؤثر هاملتون طاقتي الجسيم. نكتب أولاً معادلة القيم الذاتية على الصورة

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

حيث $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \psi =< \psi |$ وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

أو

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ومنها نجد

$$\begin{pmatrix} 1-E & -1 \\ -1 & 1-E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وحل هذه المعادلة هو أنّ محددة المصفوفة تساوي الصفر، أي

$$\begin{vmatrix} 1-E & -1 \\ -1 & 1-E \end{vmatrix} = 0$$

ومنها نجد أن

$$E^2 - 2E = 0 \quad \Leftarrow \quad (1-E)(1-E) - 1 = 0$$

حيث $E(E-2) = 0$ وحلها هو $E_1 = 0$ و $E_2 = 2$. إذا كانت $E_1 = 0$ فإن الحالة الذاتية المناظرة لها تكون

$$\begin{pmatrix} 1-0 & -1 \\ -1 & 1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

أو على صورة معادلتين

$$c_1 - c_2 = 0$$

$$-c_1 + c_1 = 0$$

نجد أن $c_1 = c_2$ ومن شرط المعايرة $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ نحصل على $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ وتكون دالة الحالة الذاتية لهذه الطاقة

$$|\phi_1\rangle \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وإذا كانت $E_2 = 2$ فإن المعادلة أعلاه تصبح على الصورة

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

أو على الصورة

$$-c_1 - c_2 = 0$$

$$-c_1 - c_2 = 0$$

نجد أن $c_2 = -c_1$ ومن شرط المعايرة $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ نحصل على $c_2 = -c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ وتكون دالة الحالة الذاتية لهذه الطاقة

$$|\phi_2\rangle \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

نجد أن متوسط الطاقة في الحالة $|\phi\rangle \quad = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ بالعلاقة

$$< E > = < \phi | \hat{H} | \phi >$$

أو

$$< E >=< \phi \,|\, \hat{H} \,|\, \phi >= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$< E >= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}(-1+2) = \frac{1}{5}$$

(د) يُعطى احتمال وجود الجسيم في الحالة $|\,\phi >= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ إذا كان موجوداً في الحالة $|\,\phi_1 >$ بالعلاقة $P_\phi =|< \phi \,|\, \phi_1 >|^2$ ، حيث $|\,\phi_1 >$ هي الحالة التي طاقتها صفراً. وبالتعويض نحصل على

$$. P_\phi =|< \phi \,|\, \phi_1 >|^2 =| \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}|^2 = \frac{9}{10}$$