Université MSBY Jijel
Faculté des sciences et de technologie
Département d'Electronique
Méthodes numériques : cours
2ème Année Télécoms

Chapitre 2
Interpolation polynomiale

2.1 Introduction

En pratique on rencontre souvent des problèmes où la fonction décrivant une grandeur physique donnée n'est connue que par des valeurs de mesure en des points donnés $\{(x_1,y_1) ; (x_2,y_2) ;\ldots\ldots ; (x_n,y_n)\}$ ou en d'autres cas connue mais tellement complexe qu'on cherche à la remplacer par un polynôme

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a^nx^n.$$

Définitions

Soit une fonction $y=f(x)$ définie sur [a,b] n fois dérivable qu'on veut approcher par un polynôme P(x) par l'usage des points donnés $\{(x_1,y_1) ; (x_2,y_2) ;\ldots\ldots ; (x_n,y_n)\}$

1-A cause de l'approximation, l'erreur intervient : $E(x)=f(x)-P(x)$

2-Les points $(x_i,y_i=f(x_i))$ sont appelés points d'appui

3-L'intervalle [a,b] est appelé intervalle d'interpolation

Théorème 1

Etant donnés (n+1) points d'appui (x_i,y_i) $(i=0,\ldots,n)$,

il existe un seul polynôme d'interpolation P(x)

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur [a,b] dérivable (n+1) fois et admet (n+1) points d'appui (xi,yi) (*i=0,….,n*), si P(x) est le polynôme d'interpolation tel que P(xi)= f(xi) xi∊ [a,b] alors

$\exists \xi \epsilon [x, x_i]$ ou $[x_i, x]$ tel que l'erreur

$$|E(x)| = |f(x) - P(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(\xi)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!} \right| \leq \left| \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!} \right| . M_{n+1}$$

$$où\ M_{n+1} = max_{[a,b]} f^{n+1}(x)$$

Remarque

Dans certains cas où la fonction est inconnue ou l'utilisation de la formule du théorème précédent apparait difficile, on peut faire recours à l'approximation suivante:

$$E(x) \approx \left| \frac{\Delta^{n+1} y_0 \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!\, h^{n+1}} \right|$$

Cas d'interpolation linéaire

f est une fonction définie sur l'intervalle $[x_0, x_1]$,

le polynôme d'interpolation dans ce cas est : $P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$ et $\Delta x = x_1 - x_0$ sont appelés différences finies

Cas d'interpolation non linéaire

f est une fonction définie sur l'intervalle $[x_0, x_1]$, le polynôme d'interpolation quadratique dans ce cas est :

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2(x_1 - x_0)^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$ différence finie d'ordre 2

Si on pose $h = x - x_0$ on écrit alors P(x) sous la forme :

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

2.2 Interpolation Newtonienne

L'intervalle [a,b] est divisé en n parties égales c.à.d. on dispose de(n+1) points d'appui

$$h = x_{i+1} - x_i \ (i=0,\ldots,(n-1))$$

Le polynôme de Newton s'écrit

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Avec :

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$
$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$
.... $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$	.... $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$

Exemple :

On donne les points d'appui suivants : (4,1) ; (6,3) ;(8,8) ;(10,20)

1) Ecrire le polynôme d'interpolation de Newton correspondant à f
2) Calculer $P_3(7)$

Solution

1) Le pas h=2

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0=4	$y_0 = 1$			
x_1=6	$y_1 = 3$	$\Delta y_0 = 2$		
$x_2 = 8$	$y_2 = 8$	$\Delta y_1 = 5$	$\Delta^2 y_0 = 3$	
$x_3 = 10$	$y_3 = 20$	$\Delta y_2 = 12$	$\Delta^2 y_1 = 7$	$\Delta^3 y_0 = 4$

Donc le polynôme s'écrit :

$$P_3(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{2}{2}(x - 4) + \frac{3}{2!\,2^2}(x - 4)(x - 6) + \frac{4}{3!\,2^3}(x - 4)(x - 6)(x - 8)$$

2) $P_3(7)$=4.875

2.3 Interpolation de Lagrange

Soient (n+1) points d'appui (xi ,f(xi)) (i=0,…,n), le polynôme de Lagrange s'écrit :

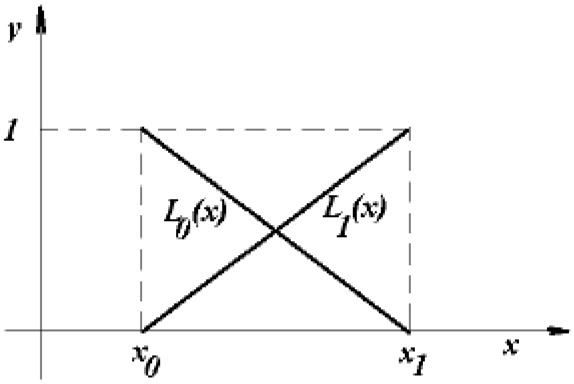
$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \qquad \begin{cases} L_i(x_i) = 1\ \forall j \\ L_i(x_j) = 0\ \forall j \end{cases}$$

1) Cas n=1 c.à.d. i=0,1 et [x0,x1]

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\ ;\ L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Donc le polynôme de Lagrange s'écrit :

$$L(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$



2) Cas de n+1 points d'appui (i=0,…,n) $L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)....(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)...(x_0-x_n)}$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots .(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots .(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)....(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)...(x_2-x_n)}$$

………

………

$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots .(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

Exemple :

On donne les points d'appui suivants : (1,2) ;(2,5) ;(6,7) et (8,1)

Ecrire le polynôme de Lagrange et calculer la valeur du polynôme au point x=3

Solution :

1) $$P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$f(x_0).L_0(x) = 2\frac{(x-2)(x-6)(x-8)}{(1-2)(1-6)(1-8)} = -\frac{2}{35}(x-2)(x-6)(x-8)$$

$$f(x_1).L_1(x) = \frac{5}{24}(x-1)(x-6)(x-8)$$

$$f(x_2).L_2(x) = -\frac{7}{40}(x-1)(x-2)(x-8)$$

$$f(x_3).L_3(x) = \frac{1}{28}(x-1)(x-2)(x-6)$$

2) $P_3(x) = 6.11$