Université MSBY Jijel
Faculté des sciences et de technologie
Département d'Electronique
Méthodes numériques : cours
2ème Année Télécoms

Chapitre 5

Méthodes approximatives de résolution des systèmes d'équations Linéaires

5.1 Introduction

Les méthodes approximatives ou itératives pour la résolution des systèmes des équations linéaires de type $Ax=b$ sont basées sur l'idée de construire une suite de vecteurs $x^{(k)}$ qui converge vers une solution exacte x en utilisant une fonction linéaire f telle que $x^{k+1}=f(x^k)$ $(k\epsilon IN)$

5.2 Définitions

a) Une méthode itérative est dite convergente si $lim_{x\to+\infty}x^{(k)}=x$ est la solution exacte du système

b) Une méthode itérative $x^{k+1}=f(x^k)$ est consistante si $x=f(x)$ avec x est le vecteur de solution exacte

c) On appelle erreur à l'itération $x^{k+1}=f(x^k)$ de la méthode itérative le vecteur $e(k)=x^{(k)}-x$

5.3 Forme réduite d'un système d'équations linéaires

Le système $Ax=b$ peut être écrit $x=B\,x+c$ avec B est une matrice et c est un vecteur, c'est par cette forme réduite que le processus itératif ait lieu :

$$x^{k+1}=Bx^k+c$$

Théorème

Soit le système réduit du processus itératif $x^{k+1}=Bx^k+c$, le processus itératif converge vers une solution unique si l'une des normes canoniques de la matrice B est inférieure à 1 et la convergence ne dépend pas du vecteur initial x^0.

Les 3 normes canoniques :

1. $\|B\|_m=max_i\sum_j|a_{ij}|$ norme en lignes

2. $\|B\|_l=max_j\sum_i|a_{ij}|$ norme colonnes

$$\|B\|_k=\sqrt{\sum_{ij}|a_{ij}|^2}$$

3. Evaluation d'erreur du processus itératif

Pour estimer l'erreur des approximations du processus itératif on utilise les formules suivantes :

$$\|x - x^k\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^k - x^{k-1}\|$$

ou

$$\|x - x^k\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^1 - x^0\|$$

Remarque :

En pratique si on impose une précision ε on peut estimer l'erreur par :

$\|x^k - x^{(k-1)}\| \leq \varepsilon$ cela emmènera à écrire $|x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon \ (i=1,\ldots,n)$

5.4 Méthode de Jacobi

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système peut être écrit sous la forme suivante

Cette forme est appelée forme réduite du système Ax=b. Elle peut s'écrire autrement :

$$x_i = [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j]/a_{ii} \ ; \ i=1,\ldots,n$$

Le processus itératif aura lieu en utilisant un vecteur initial x0 et la forme réduite peut être formulée comme suite : $x_i^{k+1} = [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^k]/a_{ii} \ ; \ i=1,\ldots,n \quad et \quad i \neq j$

Exemple :

Résoudre par la méthode de Jacobi en utilisant 3 itérations et un vecteur initial $x^0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Solution :

Le système :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Le système s'écrira en forme réduite :

$$\begin{cases} x_1 = (-1 - x_2 - 3x_3)/-1 \\ x_2 = (2 - x_1)/2 \\ x_3 = (1 - 3x_1 + x_2)/-1 \end{cases} \quad \text{sera} \quad \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 + 3x_3 \\ x_2 = 1 - x_1/2 \\ x_3 = -1 + 3x_1 - x_2 \end{cases}$$

- 1e itération :

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + x_2^0 + 3x_3^0 \\ x_2^1 = 1 - x_1^0/2 \\ x_3^1 = -1 + 3x_1^0 - x_2^0 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^1 = 1 \\ x_2^1 = 1 \\ x_3^1 = -1 \end{cases}$$

- 2e itération

$$\begin{cases} x_1^2 = 1 + x_2^1 + 3x_3^1 \\ x_2^2 = 1 - x_1^1/2 \\ x_3^2 = -1 + 3x_1^1 - x_2^1 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^2 = -1 \\ x_2^2 = 0.5 \\ x_3^2 = 1 \end{cases}$$

-3e itération

$$\begin{cases} x_1^3 = 1 + x_2^2 + 3x_3^2 \\ x_2^3 = 1 - x_1^2/2 \\ x_3^2 = -1 + 3x_1^2 - x_2^2 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^3 = 4.5 \\ x_2^3 = 0.75 \\ x_3^3 = -4.5 \end{cases}$$

5.5 Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de Jacobi en effet elle rend le processus itératif plus rapide.

Le système réduit reste le même sauf que la valeur nouvelle de x_i^{k+1} obtenue dans la ième équation sera injectée dans la suivante.

Le processus itératif se fera avec un vecteur initial et l'utilisation de la formule :

$$x_i^{k+1} = [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{k}]/a_{ii} \ ;\ i=1,\dots,n$$

<u>Exemple :</u>

Résoudre par la méthode de Gauss-Seidel le système précédent en utilisant 3 itérations et un vecteur initial $x^0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

<u>Solution:</u>

- 1^e itération :

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + x_2^0 + 3x_3^0 \\ x_2^1 = 1 - x_1^1/2 \\ x_3^1 = -1 + 3x_1^1 - x_2^1 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^1 = 1 \\ x_2^1 = 0.5 \\ x_3^1 = 1.5 \end{cases}$$

- 2^e itération

$$\begin{cases} x_1^2 = 1 + x_2^1 + 3x_3^1 \\ x_2^2 = 1 - x_1^2/2 \\ x_3^2 = -1 + 3x_1^2 - x_2^2 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^2 = 6 \\ x_2^2 = -2 \\ x_3^2 = 19 \end{cases}$$

-3^e itération

$$\begin{cases} x_1^3 = 1 + x_2^2 + 3x_3^2 \\ x_2^3 = 1 - x_1^3/2 \\ x_3^2 = -1 + 3x_1^3 - x_2^3 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^3 = 56 \\ x_2^3 = -27 \\ x_3^3 = 194 \end{cases}$$