Université de Jijel

Analyse complexe (1)

Département de Maths

Solution du TD n°4.

Exercice 1: 1- $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z-1)} = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+2}\right\}$

i- $0 < |z| < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+z/2}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{-\sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}\right\}$$

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n$$

ii- $1 < |z| < 2$:

$$f(z) = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{z}\times\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+z/2}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n - 1/2\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right\}$$

$$f(z) = \frac{1}{3}\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^n} - \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right\}.$$

iii- $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{z}\times\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{z}\times\frac{1}{1+2/z}\right\}$$

②

$$f(z) = \frac{1}{3}\left\{ \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(1/z)^n - \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n \right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^n} - \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{z^n} \right\}$$

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1}\left(1-(-1)^{n-1}2^{n-1}\right)\times\frac{1}{z^n}.$$

b - (i) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$ (i) $0<|z-1|<3$.

$$= \frac{1}{z-1}\times\frac{1}{(z-1)+3} = \frac{1}{3(z-1)}\times\frac{1}{1+\frac{(z-1)}{3}}$$

$$= \frac{1}{3(z-1)}\times\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{3(z-1)} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^{n-1}$$

$$f(z) = \frac{1}{3(z-1)} + \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}(z-1)^n.$$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)}\times\dfrac{1}{(z-1)+3}$

$$= \frac{1}{(z-1)^2}\times\frac{1}{1+3/z-1}$$

3

$$= \frac{1}{(z-1)^2} \times \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{3}{z-1}\right)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n 3^n}{(z-1)^{n+2}} = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-2} 3^{n-2}}{(z-1)^n}.$$

c-(i) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$ $\qquad |z+2| < 3$

$$= \frac{1}{z+2} \times \frac{1}{z+2-3}$$

$$= \frac{1}{3(z+2)} \times \frac{-1}{1 - \frac{z+2}{3}}$$

$$= -\frac{1}{3(z+2)} \times \frac{1}{1 - \frac{z+2}{3}}$$

$$= -\frac{1}{3(z+2)} \times \sum_{n\geq 0} \frac{(z+2)^n}{3^n}$$

$$= -\sum_{n\geq 0} \frac{(z+2)^{n-1}}{3^{n+1}} = -\frac{1}{3(z+2)} - \sum_{n\geq 1} \frac{(z+2)^{n-1}}{3^{n+1}}$$

$$f(z) = -\frac{1}{3(z+2)} - \sum_{n\geq 0} \frac{(z+2)^n}{3^{n+2}}.$$

ii) $|z+2| > 3$;

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)} \times \frac{1}{z+2-3} = \frac{1}{(z+2)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{z+2}}$$

$$= \frac{1}{(z+2)^2} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{3}{z+2}\right)^n = \sum \frac{3^n}{(z+2)^{n+2}} = \sum \frac{3^{n-2}}{(z+2)^n}$$

2- $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$

1- si $0 < |z-1| < 2$ alors

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \times \frac{1}{z-1-2} = \frac{-1}{(z-1)^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} \times \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{(z-1)^{n-2}}{2^n}$$

$$= -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \frac{(z-1)^{n-2}}{2^n}$$

$$f(z) = -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}$$

si $0 < |z-3| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-1)^2} = \frac{1}{z-3} \times \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-3)} \times \frac{1}{(z-3+2)^2}$$

$$= \frac{1}{z-3} \times \frac{1}{2\left(\frac{z-3}{2}+1\right)^2}$$

Posons $\frac{z-3}{2} = Z$, lorsque z est au voisinage de 3 alors Z est du voisinage de 0. posons $g(Z) = \dfrac{1}{(Z+1)^2}$

La fonction g est developpable en serie de Taylors au voisinage de 0 $(|Z| < 1)$ et donc

$$g(Z) = \sum_{n\geq 0} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} Z^n.$$

on a $g'(Z) = \dfrac{-2}{(Z+1)^3}$, $g''(Z) = \dfrac{(-2)(-3)}{(Z+1)^4}$ ....

d'où $$g^{(n)}(Z) = \frac{(-2)(-3)\cdots\cdots(-n-1)}{(Z+1)^{n+2}}.$$

et donc $$g^{(n)}(Z) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(Z+1)^{n+1}}$$

Par consequent

$$g(Z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (n+1)!}{n!} Z^n.$$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1) Z^n.$$

comme $Z = \dfrac{z-3}{2}$ alors

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-3}{2}\right)^n$$

donc

$$f(z) = \frac{1}{2(z-3)} \times \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^n} (z-3)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+1}} (z-3)^{n-1}$$

$$f(z) = \frac{1}{2(z-3)} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+1}} (z-3)^{n-1}$$

xercice 2 :

1 - $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}$, les points singuliers de f sont

$z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et $z_2 = 2$.

$z_0 = 0$: $f(z) = \dfrac{e^z/(z-1)(z-2)}{z^2} = \dfrac{\varphi(z)}{z^2}$.

$\varphi(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)(z-2)}$ est holomorphe au point $z_0 = 0$ et $\varphi(0) = 1/2 \neq 0$

Alors $z_0 = 0$ est un pole d'ordre 2 et $Res(f, z_0) = \dfrac{\varphi'(z_0)}{1!}$.

$$\varphi'(z) = \frac{e^z(z-1)(z-2) - e^z((z-1)+(z-2))}{(z-1)^2(z-2)^2}$$

$$= \frac{e^z[(z-1)(z-2) - z+1 - z+2]}{(z-1)^2(z-2)^2}$$

$$= e^z \, \frac{z^2 - 5z + 5}{(z-1)^2(z-2)^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(0) = 1 \times 5/4 = 5/4.$$

$$\Rightarrow Res(f, z_0) = 5/4.$$

$z_0 = 1$

$f(z) = \dfrac{e^z/z^2(z-2)}{z-1} = \dfrac{\varphi(z)}{z-1}$ | $\varphi(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z-2)}$

est holomorphe au point $z_0 = 1$ et $\varphi(1) = -e^1 \neq 0$, Alors $z_0 = 1$

est un pôle simple et on a

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \varphi(1) = -e.$$

$z_2 = 2$

$$f(z) = \frac{e^z / z^2(z-1)}{z-2} = \frac{\varphi(z)}{z-2} \quad / \quad \varphi(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}$$

φ est holomorphe au point $z_2 = 2$ et $\varphi(2) = \frac{e^2}{4} \neq 0$. Alors $z_2 = 2$ est un pôle simple de f et on a

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \varphi(2) = \frac{e^2}{4}.$$

2- $f(z) = \frac{e^z}{z}$ le point singulier de f est $z_0 = 0$.

On sait que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, et donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

Donc 0 est un pôle simple de f et $\operatorname{Res}(f, 0) = C_{-1}$

(C_{-1} est le coefficient de $\frac{1}{z}$ ds la serie de Laurent)

Alors $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$

3- $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{z^3(1-z^2)}$. Les points singuliers de f sont

$z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et $z_2 = -1$.

$z_0 = 0$: $f(z) = \frac{1/1-z^2}{z^3} = \frac{\varphi(z)}{z^3} \quad / \quad \varphi(z) = \frac{1}{1-z^2}$

g est holomorphe au point $z_0 = 0$ et $g(0) = 1 \neq 0$. Alors $z_0 = 0$

est un pôle d'ordre 3 et on a

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{g''(0)}{2!}$$

$$g'(z) = \frac{2z}{(1-z^2)^2}, \quad g''(z) = \frac{2(1-z^2)^2 - 2z\left(2 \times 2z\,(1-z^2)\right)}{(1-z^2)^4}$$

$$= \frac{2(1-z^2) - 8z^2}{(1-z^2)^3}$$

d'où

$$g''(0) = 2$$

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 1.$$

$z_1 = 1$: $\quad f(z) = \dfrac{1/z^3(1+z)}{1-z} = \dfrac{g(z)}{1-z}, \quad g(z) = \dfrac{1}{z^3(1+z)}$

g est holomorphe au point $z_1 = 1$ et $g(1) = 1/2$. Alors, $z_1 = 1$

est un pôle simple de f et on a

$$\mathrm{Res}(f, 1) = g(1) = 1/2.$$

$z_2 = -1$: $\quad f(z) = \dfrac{1/z^3(1-z)}{1+z} = \dfrac{g(z)}{1+z}.$

g est holomorphe au point $z_2 = -1$ et $g(-1) = 1/2 \neq 0$. Alors,

$z_2 = -1$ est un pôle simple de f et on a

$$\mathrm{Res}(f, -1) = g(-1) = 1/2.$$

- $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$, les points singuliers de f sont $z_0 = -i$ et $z_1 = i$

$\underline{z_0 = -i}$: $f(z) = \dfrac{e^{iz}/z-i}{z+i} = \dfrac{\varphi(z)}{z+i}$ | $\varphi(z) = \dfrac{e^{iz}}{z-i}$

φ est holomorphe au point $z_0 = -i$ et $\varphi(-i) = \dfrac{e^{-i^2}}{-2i} \neq 0$. Alors

$z_0 = -i$ est un pôle simple de f et

$$Res(f, -i) = \varphi(-i) = -\frac{e}{2i}$$

$\underline{z_1 = i}$: $f(z) = \dfrac{e^{iz}/z+i}{z-i} = \dfrac{\varphi(z)}{z-i}$ | $\varphi(z) = \dfrac{e^{iz}}{z+i}$

φ est holomorphe au point $z_1 = i$ et $\varphi(i) = \dfrac{e^{i^2}}{2i} \neq 0$. Alors

$z_1 = i$ est un pôle simple de f et

$$Res(f, i) = \varphi(i) = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

5- $f(z) = \dfrac{z e^z}{z^2-1}$, les points singuliers de f sont $z_0 = -1$ et $z_1 = 1$

$\underline{z_0 = -1}$: $f(z) = \dfrac{z e^z / z-1}{(z+1)} = \dfrac{\varphi(z)}{z+1}$ | $\varphi(z) = \dfrac{z e^z}{z-1}$.

φ est holomorphe au point $z_0 = -1$ et $\varphi(-1) = \dfrac{-e^{-1}}{-2} \neq 0$. Alors

$z_0 = -1$ est un pôle simple de f et

$$Res(f, -1) = \frac{e^{-1}}{2}$$

$\underline{z=1}$: $f(z) = \dfrac{z e^{0}/z+1}{(z-1)} = \dfrac{\varphi(z)}{z-1}$ / $\varphi(z) = \dfrac{z e^{o}}{(z+1)}$

φ est holomorphe au point $z_1 = 1$ et $\varphi(1) = \frac{e}{2} \neq 0$. Alors, $z_1 = 1$ est un pôle simple de f et on a $Res(f, 1) = e/2$

Exercice 2 : 1 -

$$\int_{|z|=2} tg z \, dz = 2\pi i \sum Res(f, z_i) \text{ où } f(z) = tg z \text{ et } z_i$$

sont les points singuliers de f contenant dans $D(0,2)$.

Les seuls points singliers de f ds $D(0,2)$ est $z_0 = \pi/2$, $z_1 = -\frac{\pi}{2}$

$$\int_{|z|=2} tg z \, dz = 2\pi i \left[Res\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) + Res\left(f, \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

au point $z_0 = \pi/2$.

$$f(z) = -\frac{1}{z - \pi/2} + \frac{2}{3}(z - \pi/2) + \cdots$$

Donc $Res(f, +\pi/2) = -1$

au point $z_1 = -\pi/2$

$$f(z) = -\frac{1}{z + \pi/2} + \frac{2}{3}(z + \pi/2) + \cdots$$

Donc $Res(f, -\pi/2) = -1$

$$\int tg z \, dz = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i$$

2- $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4+5z^3}\,dz$. les points singuliers de f sont

$z_0 = 0 \in D(0,2)$ et $z_1 = -5 \notin D(0,2)$ et donc

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4+5z^3}\,dz = 2\pi i \, Res(f,0).$$

$Res(f,0) = ?$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^4+5z^3} = \frac{e^z}{z^3(z+5)} = \frac{e^z/z+5}{z^3} = \frac{\varphi(z)}{z^3}$$

φ est holomorphe au point $z_0 = 0$ et $\varphi(0) = 1/5$. Alors

$z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 3 de f et on a

$$Res(f,0) = \frac{\varphi''(0)}{2!}$$

$$\varphi'(z) = \frac{e^z(z+5) - e^z}{(z+5)^2} = \frac{e^z(z+4)}{(z+5)^2}.$$

$$\varphi''(z) = \frac{\{e^z(z+4) + e^z\}(z+5)^2 - 2(z+5)e^z(z+4)}{(z+5)^4}$$

$$= \frac{e^z(z+5)^{\cancel{3}\,2} - 2(z+5)(z+4)e^z}{(z+5)^{\cancel{4}}} = e^z \frac{(z+5)^2 \; 2z-8}{(z+5)^3}$$

$$= e^z \frac{(z^2+8z+17}{(z+5)^3}$$

$$g''(0) = 17/125$$

$$\text{Res}(f,0) = \frac{17/125}{2!} =$$

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4+5z^3}\,dz = 2\pi i\,(17/250)$$

$$= \frac{17\pi i}{125}.$$

$$\boxed{\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4+5z^3}\,dz = \frac{17}{125}\pi i}$$

3- Le seul point singulier de $\sin\frac{1}{z}$ qui appartient au disque centre en 0 de rayon 1 est $z_0 = 0$.

$$\int_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\,\text{Res}(f,0).$$

$$f(z) = \sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots$$

Donc $\text{Res}(f,0) = 1$.

Alors $\int_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$

4- $$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\, dz .$$

$z \longmapsto \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ est holomorphe sur $C(1,1/2)$ ainsi que $\mathring{C}(1,1/2)$ sauf au point $z_0=1$. Alors d'après le théorème des résidus

$$\int_{|z-1|=1/2} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,1).$$

$\mathrm{Res}(f,1) = ?$

$$f(z) = \frac{z/(z-2)^2}{(z-1)}$$

$g(z) = z/(z-2)^2$ est holomorphe au point $z_0=1$ et $g(1) = \dfrac{1}{(-1)^2} \neq 0$. Alors, $z_0=1$ est un pôle simple de f et par suite

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = g(z_0) = 1.$$

donc

$$\int_{|z-1|=1/2} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = 2\pi i .$$