1. Introduction

Dans le chapitre précédent, on a étudié une variable extensive dépendante ϕ associée à un volume imaginaire fixe et on a vu que le bilan énergétique (équation de transport) établit un lien entre la variation temporelle $\frac{d\phi}{dt}$ et les différents termes de flux et termes sources.

Dans ce chapitre, on va utiliser cette équation de transport afin de formuler les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie. Ainsi, la variable dépendante est typiquement la masse m de ce volume, sa quantité de mouvement $\overrightarrow{mv}$ ou bien son énergie E.

2. Equation de continuité

Elle décrit la conservation du débit massique du fluide durant son écoulement. A l'aide d'un bilan d'une variable ϕ les débits massiques à travers un volume contrôle imaginaire dV peuvent être calculés. Reprenons l'équation de transport de la variable ϕ qui s'écrit

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\vec{v}\phi) = div\left(\Gamma_\phi \overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi\right) + \rho\left(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi\right)$$

La quantité transportée décrivant le débit massique est la masse du fluide lui-même, la variable dépendante ϕ [unités/Kg de fluide porteur] est

$$\phi = \frac{\text{masse du fluide}}{\text{Kg du fluide}} = \frac{1\ \text{kg}}{\text{kg}} = 1$$

Compte-tenu du fait qu'il n'y a pas de création (la masse ne peut être créée ni détruite $\dot{S}_\phi = \dot{P}_\phi = 0$) ni de diffusion de masse (une molécule ne peut céder sa propre masse à une autre $\Gamma_\phi = 0$) , on trouve l'équation suivante

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$$

qui représente l'équation de continuité sous forme vectorielle.

Sous forme développée

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v_y\right)}{\partial y} + \frac{(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Sous forme tensorielle

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho v_j\right)}{\partial x_j} = 0$$

Si le fluide est incompressible

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho div(\vec{v}) = 0$$

$$\Rightarrow div(\vec{v}) = 0$$

3. Les équations de quantité de mouvement

Elles représentent les équations qui régissent le transport des trois composantes du vecteur quantité de mouvement du fluide le long de son écoulement. En considérant un volume de contrôle imaginaire fixe dV dans l'espace Eulérien et à l'aide d'un bilan de débit de quantité de mouvement à travers ce volume, on aboutit à la résultante des forces (ou les puissances mécaniques) extérieures agissant sur le fluide contenu dans le volume dV. Ce bilan s'écrit de la manière suivante

Le taux d'accumulation de la quantité de m^{vt} suivant x_i dans dV =

le flux de quantité de m^{vt} suivant x_i entrant

+ le flux de quantité de m^{vt} suivant x_i sortant

+ la somme des composantes, suivant x_i, des

forces externes agissant sur le fluide du dV.

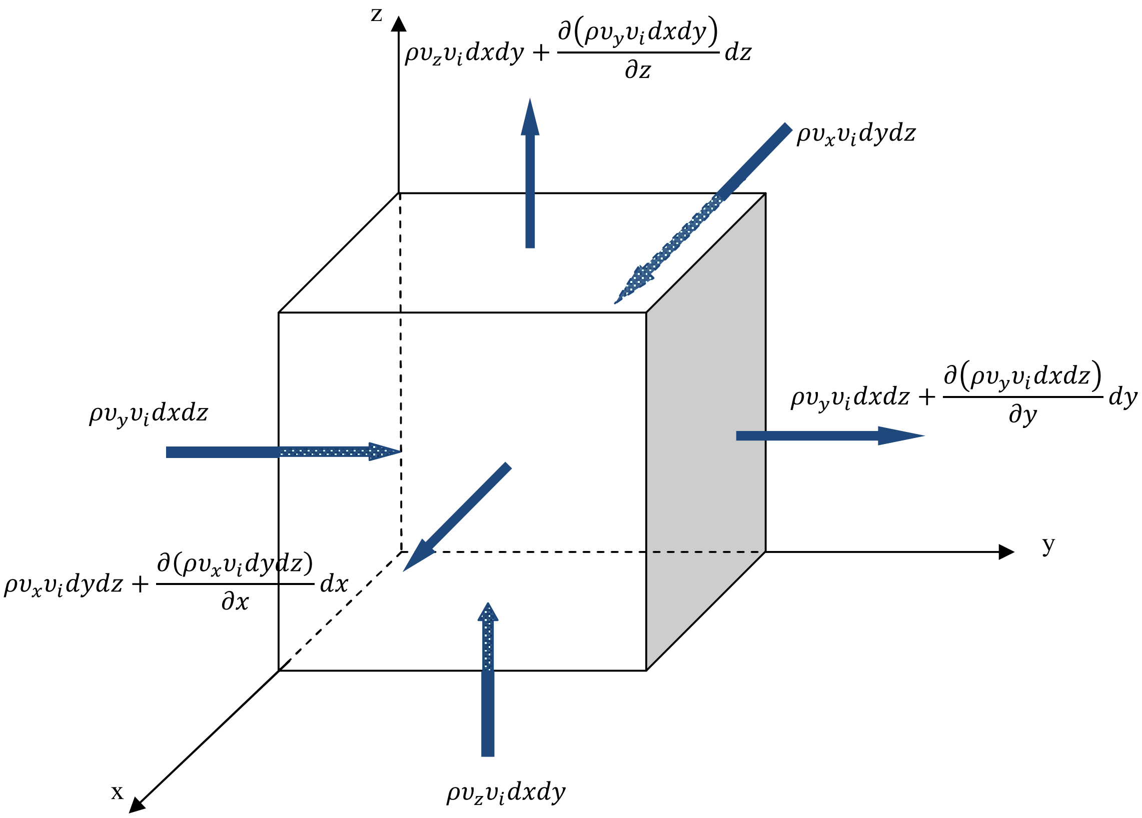

Figure 1 : Les flux de quantité de mouvement suivant x_i à travers les faces

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i dxdydz)$$
$$= \rho v_x v_i dydz - \left[\rho v_x v_i dydz + \frac{\partial(\rho v_x v_i dydz)}{\partial x}dx\right]$$
$$+ \rho v_y v_i dxdz - \left[\rho v_y v_i dxdz + \frac{\partial(\rho v_y v_i dxdz)}{\partial y}dy\right]$$
$$+ \rho v_z v_i dxdy - \left[\rho v_z v_i dxdy + \frac{\partial(\rho v_z v_i dxdy)}{\partial z}dz\right]$$
$$- \rho\sigma_{1i} dydz + \left[\rho\sigma_{1i} dydz + \frac{\partial(\rho\sigma_{1i} dydz)}{\partial x}dx\right]$$
$$- \rho\sigma_{2i} dxdz + \left[\rho\sigma_{2i} dxdz + \frac{\partial(\sigma_{2i} dxdz)}{\partial y}dx_2\right]$$
$$- \rho\sigma_{3i} dxdy + \left[\rho\sigma_{3i} dxdy + \frac{\partial(\sigma_{3i} dxdy)}{\partial z}dz\right] + \rho g_i dxdydz$$

avec σ_{ij} est la contrainte de direction j appliquée sur le plan dont sa normale est i. Elle est définie par la relation

$$\sigma_{ij} = \frac{F}{S},$$

Les forces de surface sont dues aux contraintes de viscosité et la pression hydrostatique

$$dF_{1,surf} = \left(\frac{\partial\sigma_{1i}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{2i}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial z}\right) dxdydz$$

La force de gravité est une force de volume, elle s'écrit comme suit

$$dF_{grav} = \rho g dxdydz$$

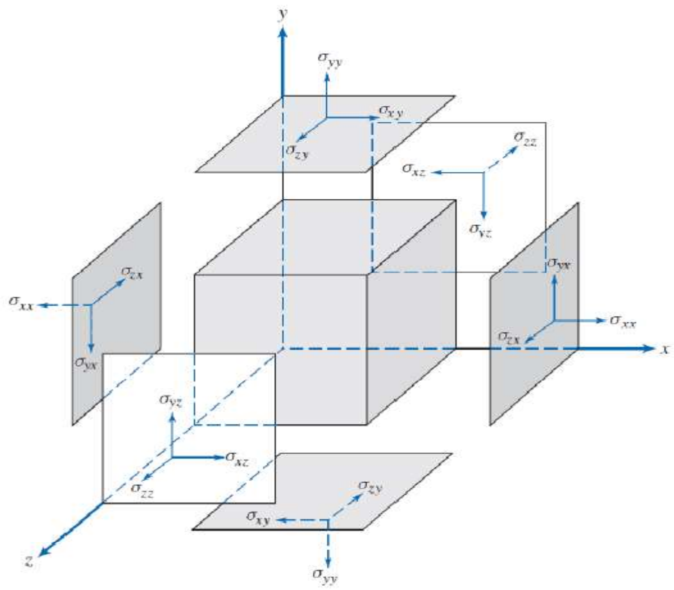

Figure 2 : Composantes des forces de surface externes

Après la simplification par $dxdydz$ (variables indépendantes) et un réarrangement, on abouti à l'équation de Navier Stocks

Sous forme développée

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_i) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_i) = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial z} + \rho g_i$$

Sous forme tensorielle

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

Ces équations contiennent les vitesses et les contraintes comme inconnus. Ce problème de fermeture du système est résolu en réécrivant le tenseur de contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ en fonction du tenseur des taux de déformation $\bar{\bar{D}}$ qu'on va démontrer son lien directe avec le tenseur des gradients de vitesses.

4. Tenseur déviateur des contraintes

Afin de séparer les effets des forces de frottement et celles des forces de pression dans le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$, on introduit le tenseur déviateur des contraintes tel que

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij} \Leftrightarrow \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\tau}} - pI$$

où I est le tenseur identité. En d'autres termes, il est construit de telle sorte que sa trace soit nulle.

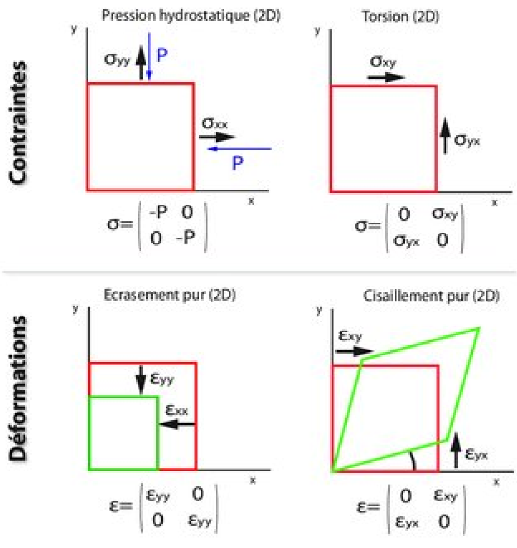

Figure 3 : Les effets des différentes contraintes au plan (xOy)

Le tenseur déviateur des contraintes est souvent appelé tenseur des contraintes visqueuses car, comme on le verra dans la section suivante, il est directement lié à la viscosité du fluide.

De la décomposition du tenseur des contraintes en $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\tau}} - pI$, il s'ensuit que l'équation du bilan de quantité de mouvement peut être réécrite comme suit

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_j v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

5. Tenseur des taux de déformations

Comme en mécanique des fluides, les déformations ne sont pas statiques le tenseur décrivant le taux de déformation est usuellement décrit par le tenseur des taux de vitesse de déformation.

Afin de définir le tenseur des taux de déformation, on fait une analyse bidimensionnelle détaillée du champ de vitesse, dans un repère fixe (*xOy*), tout en s'appuyant sur la figure(4).

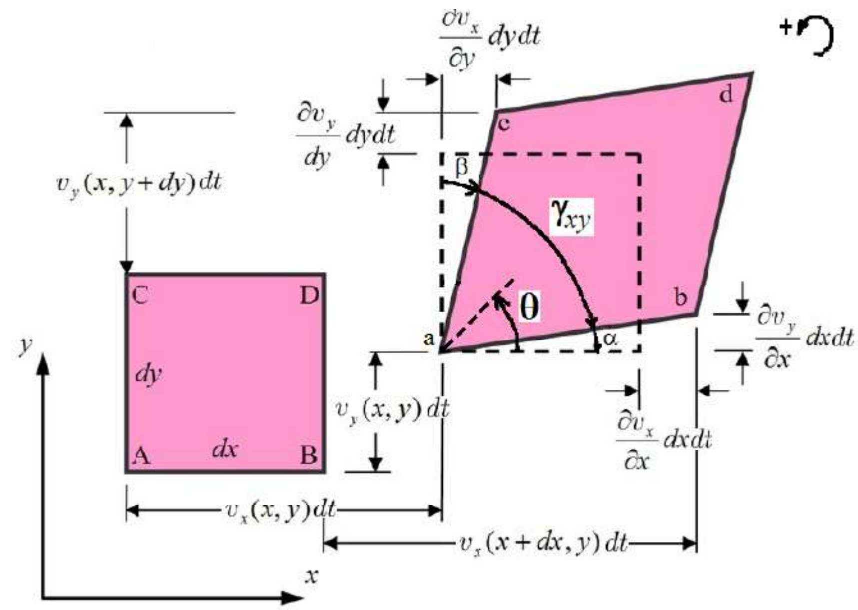

Figure 4 : Différentes déformations : translation, expansion, cisaillement, rotation

A un instant t donné, on considère une parcelle de fluide ABCD (élément de fluide) de position définie par les coordonnées des points $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$ et de vitesse définie par les vecteurs vitesse :

$$\overrightarrow{v_A}(v_{xA}, v_{yA}), \overrightarrow{v_B}(v_{xB}, v_{yB}), \overrightarrow{v_C}(v_{xC}, v_{yC}), \overrightarrow{v_D}(v_{xD}, v_{yD})$$

De même, à un instant $t + dt$, la position de la parcelle est définie par les coordonnées des points $A'(x_{A'}, y_{A'}), B'(x_{B'}, y_{B'}), C'(x_{C'}, y_{C'}), D'(x_{D'}, y_{D'})$ et sa vitesse est définie par les vecteurs vitesse : $\overrightarrow{v_{A'}}(v_{xA'}, v_{yA'}), \overrightarrow{v_{B'}}(v_{xB'}, v_{yB'}), \overrightarrow{v_{C'}}(v_{xC}\ , v_{yC'}), \overrightarrow{v_{D'}}(v_{xD}\ , v_{yD'})$.

Entre les deux positions la parcelle fluide subit des déformations que nous allons décomposer ci-dessous en deux parties :

Les éléments diagonaux du tenseur des taux de déformation

La parcelle fluide subit une translation globale de $v_x dt$ suivant (O*x*) et $v_y dt$ suivant (O*y*). Elle est globalement déformée élongation ou contraction de $\frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt$ suivant *x* et de $\frac{\partial v_y}{\partial y} dydt$ suivant *y*. A partir de la figure (2.3) on définie la position et la vitesse de la parcelle aux instants t et $t + dt$ comme suit

A l'instant t

La position : $\begin{cases} A(0,0) \\ B(dx, 0) \\ C(0, dy) \\ D(dx, dy) \end{cases}$ La vitesse : $\begin{cases} \overrightarrow{v_A}(v_x, v_y) \\ \overrightarrow{v_B}\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx, v_y\right) \\ \overrightarrow{v_C}\left(v_x, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy\right) \\ \overrightarrow{v_D}\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy\right) \end{cases}$

A l'instant $\mathbf{t + dt}$

La position : $\begin{cases} A'(v_x dt, v_y dt) \\ B'\left(dx + v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt, v_y dt\right) \\ C'\left(v_x dt, dy + v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dydt\right) \\ D'(dx + v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt, dy + v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dydt) \end{cases}$

L'accroissement relatif, suivant *x*, de la longueur est donné par

$$\frac{d(AB)}{AB} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left(dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt\right) - dx}{dx} = \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_{\substack{taux \\ élongation \\ suivant\ x}} dt$$

Suivant *y*, le taux d'élongation sera alors $\frac{\partial v_y}{\partial y} dt$.

Comme la parcelle fluide ABCD est une surface (2dim) sa déformation (contraction élongation est liée à la variation relative de son aire définie par

$$\frac{dS}{S} = \frac{S' - S}{S} = \frac{\left(dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt\right)\left(dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dydt\right) - dxdy}{dxdy}$$
$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt + \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} dt^2}_{\approx \varepsilon \longrightarrow 0} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dt$$

En trois dimensions 3dim, le taux de déformation est

$$\frac{\partial V}{V} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dt = Tr\left(\overline{\overline{grad}}\vec{v}\right) dt = div\vec{v}\ dt$$

En conséquence, les éléments de diagonale du tenseur des taux de déformation correspondent aux taux d'élongation (ou contraction) du fluide dans les trois directions de l'espace. La trace de ce tenseur permet d'évaluer le taux d'expansion local du volume.

Les éléments non-diagonaux du tenseur des taux de vitesse de déformation

La parcelle fluide, durant son déplacement, subit toujours une translation globale de $v_x dt$ suivant (O*x*) et $v_y dt$ suivant (O*y*). Mais dans ce cas elle se met à une déformation angulaire de $\frac{\partial v_y}{\partial x} dxdt$ suivant *x* et de $\frac{\partial v_{y_x}}{\partial y} dydt$ suivant *y*.

A partir de la figure (4) on définie la position et la vitesse de la parcelle aux instants t et $t + dt$ comme suit

A l'instant t

La position : $\begin{cases} A(0,0) \\ B(dx, 0) \\ C(0, dy) \\ D(dx, dy) \end{cases}$ La vitesse : $\begin{cases} \overrightarrow{v_A}(v_x, v_y) \\ \overrightarrow{v_B}\left(v_x, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx\right) \\ \overrightarrow{v_C}\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy, v_y\right) \\ \overrightarrow{v_D}\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx\right) \end{cases}$

A l'instant $\mathbf{t + dt}$

La position : $\begin{cases} A'\left(v_x dt, v_y dt\right) \\ B'\left(dx + v_x dt, v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial x} dxdt\right) \\ C'\left(v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial y} dydt, dy + v_y dt\right) \\ D'(dx + v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial y} dydt, dy + v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial x} dxdt) \end{cases}$

On calcul de la déformation angulaire comme suit

$$\begin{cases} d\alpha \simeq tan\alpha = \dfrac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dxdt}{dx} = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} \\ d\beta \simeq tan\beta = \dfrac{\frac{\partial v_x}{\partial y} dydt}{dy} = \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} \\ \dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{cases}$$

Pour la déformation angulaire on peut envisager deux cas particuliers

- Les deux angles sont égaux $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \longrightarrow$ tenseur des taux de déformation symétrique.

C'est le cas d'une « déformation pure » au cours de laquelle l'angle $\gamma = B\hat{A}C$ subit une variation égale à

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma' - \gamma}{dt} = \frac{(\gamma - d\alpha - d\beta) - \gamma}{dt} = -\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -2\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

- Les deux angles sont opposées $\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$ → tenseur des taux de déformation antisymétrique. Il s'agit ainsi, d'une « rotation pure » autour de l'axe (Oz) de vitesse angulaire

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Cette expression correspond à la moitié de la composante, suivant (Oz), du vecteur rotationnel de la vitesse suivant

$$\vec{\Omega}\begin{pmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{Rot\vec{v}} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\end{pmatrix}$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur tourbillon qui comporte toutes les rotations possibles, autour des trois axes, de la particule fluide durant son écoulement.

Afin de déterminer le tenseur des taux de déformations angulaires pures on doit écrire gradient de vitesse $\overline{\overline{grad\vec{v}}}$ sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique $\overline{\overline{D}}$ et d'un tenseur antisymétrique $\overline{\overline{W}}$

$$\begin{pmatrix}v_x'\\ v_y'\\ v_z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z}\\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z}\\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}}_{\overline{\overline{grad\vec{v}}}}\begin{pmatrix}dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix}$$

Remarque

En coordonnées cylindriques l'expression du gradient de vitesse est

$$\overline{\overline{grad\vec{v}}} = \begin{pmatrix}\frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \frac{\partial v_r}{\partial z}\\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{grad}}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{W}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{D}}}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{W}}}$$

6. Relation entre le tenseur déviateur de contrainte et le tenseur de taux de déformation

Dans le cas des fluides Newtoniens, les contraintes sont des fonctions linéaires des taux de déformations du milieu. De ce fait, le tenseur déviateur de contrainte $\bar{\bar{\tau}}$ et le tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{D}}$ sont liés par la relation suivante

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\mu\overline{\overline{D}}$$

Afin d'exprimer le tenseur des taux de cisaillement, il est plus convenable de décrire la déformation pure $\overline{\overline{D}}$ comme la somme d'une expansion isotrope $\overline{\overline{D}}_{exp}$ $(\overline{\overline{D}}_{ij}, i = j)$ et d'un cisaillement à volume constant $\overline{\overline{D}}_{cis}$ $(\overline{\overline{D}}_{ij}, i \neq j)$

$$\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{D}}_{cis} + \overline{\overline{D}}_{exp}$$

Partie expansion

La variation relative décrivant l'évolution du volume $\frac{dV}{V}$ durant le temps infinitésimal dt est définie par la relation

$$\frac{dV}{V} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dt = div\vec{v}\, dt \Longrightarrow div\vec{v} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$$

D'autre part, de l'équation de continuité on a la relation

$$div\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

qui montre qu'une divergence de la vitesse positive correspond à une diminution locale de masse volumique.

La composante du tenseur des taux de déformations associée à l'expansion isotrope notée $\bar{\bar{D}}_{exp}$ est, ainsi, proportionnelle à la divergence de la vitesse. Alors on peut écrire

$$\bar{\bar{D}}_{exp} = \left(\frac{Tr(\bar{\bar{D}})}{3}\right), \qquad \bar{\bar{D}}_{exp,ij} = \frac{div\vec{v}}{3}\delta_{ij}$$

Partie cisaillement

Le tenseur de cisaillement $\bar{\bar{D}}_{cis}$ s'obtient par la différence entre $\bar{\bar{D}}$ et $\bar{\bar{D}}_{exp}$. Alors on peut écrire

$$\bar{\bar{D}}_{cis} = \bar{\bar{D}} - \bar{\bar{D}}_{exp}, \qquad \bar{\bar{D}}_{cis,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{div\vec{v}}{3}\delta_{ij}$$

Puisque la trace de $\bar{\bar{D}}$ et la trace de $\bar{\bar{D}}_{exp}$ sont toutes les deux égales à la divergence de la vitesse, le tenseur $\bar{\bar{D}}_{cis}$ est de trace nulle. Ainsi comme $\bar{\bar{D}}$, le tenseur $\bar{\bar{D}}_{cis}$ est symétrique.

En conséquence, le tenseur déviateur de contrainte $\bar{\bar{\tau}}$ est défini comme suit

Si $i = j$:

$$\bar{\bar{\tau}}_{ij} = 2\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta_{ij}\right)$$

Si $i \neq j$:

$$\bar{\bar{\tau}}_{ij} = 2\mu\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

Afin d'écrire le tenseur déviateur de contrainte sous une forme plus compacte rassemblons les deux cas dans une seule relation

$$\forall i, \forall j: \qquad \bar{\bar{\tau}}_{ij} = 2\mu\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta_{ij}$$

7. Equations de Navier-Stocks

En substituant $\bar{\bar{\tau}}_{ij}$ dans l'équation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

on obtient l'expression suivante

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \underbrace{v_i\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j}}_{=0} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta_{ij}\right] + \rho g_i$$

Pour le cas d'un fluide incompressible

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta_{ij} = 0\,, \quad \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) = 0$$

En orientant la direction de x_3 ou z verticalement vers le haut, on écrit la pression motrice

$$\rho\vec{g} = -\rho\|\vec{g}\|\vec{k} = -\vec{\nabla}(\rho g z) \Longrightarrow p^* = p + \rho g_i z$$

Le bilan de quantité de mouvement, lorsque le fluide est incompressible et newtonien de viscosité constante, porte le nom d'équation de Navier-Stokes qui s'écrit sous la forme

- tensorielle

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p^*}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial {x_j}^2}$$

- vectorielle

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\rho\vec{v}\,\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}=-\overrightarrow{grad}p^*+\mu\Delta\vec{v}$$

- développée

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_x}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p^*}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_y}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p^*}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)\\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\dfrac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p^*}{\partial z}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\end{cases}$$

où $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique du fluide.

8. Equation de l'énergie

L'énergie totale E est la somme de l'énergie mécanique E_m et de l'énergie interne U. On note respectivement e, e_m et u leurs densités volumiques. Afin d'établir le bilan local d'énergie mécanique, on applique sur un volume de contrôle de dimension $(\Delta x \times \Delta y)$ le premier principe de thermodynamique « l'énergie contenue dans le volume de contrôle est égale à la somme des forces extérieures et la quantité de chaleur fournie au système » :

❶ Le taux d'accumulation de $\boldsymbol{e}$ dans le volume dV =

❷L'énergie transférée par écoulement du fluide (par convection)/unité s

+ ❸l'énergie transférée par conduction)/unité s

+ ❹l'énergie générée sous forme de chaleur interne/unité s

+ ❺le travail net sortant du volume dV vers son environnement/unité s

❶ $+\Delta x\Delta y\dfrac{\partial(\rho e)}{\partial t}$

❷ $-\Delta x\Delta y\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v_x e)+\dfrac{\partial}{\partial y}(\rho v_y e)\right]$

❸ $-\Delta x\Delta y\left[\dfrac{\partial \ddot{q}_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \ddot{q}_y}{\partial y}\right]$

❹ $-\ \Delta x \Delta y \dot{q}$

❺ $+\ \Delta x \Delta y \left[\sigma_{xx}\dfrac{\partial v_x}{\partial x} - \tau_{xy}\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \sigma_{yy}\dfrac{\partial v_y}{\partial y} - \tau_{yx}\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right]$

$$+\Delta x \Delta y \left[v_x\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - v_x\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + v_y\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - v_y\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\right]$$

où $\ddot{q}_x$ et $\ddot{q}_y$ sont les densités de flux de chaleur respectivement transmis par conduction dans les direction x et y. Quant à $\dot{q}$ elle représente la quantité de chaleur interne générée dans le volume de contrôle. L'origine de la quantité de chaleur dissipée est le travail affecté par les contraintes normales et tangentielles sur le fluide contenu dans le volume dV.

On prend comme exemple le calcul du travail, par unité de temps, associé à la contrainte normale actionnant sur la face gauche du volume dV

$$\underbrace{(-\sigma_{xx}\Delta y)}_{\substack{force \\ de\ pression}} \times \underbrace{v_x}_{\substack{déplacement \\ par\ 1\ seconde}}$$

et actionnant sur la face droite du volume dV

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\Delta x\right)\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$$

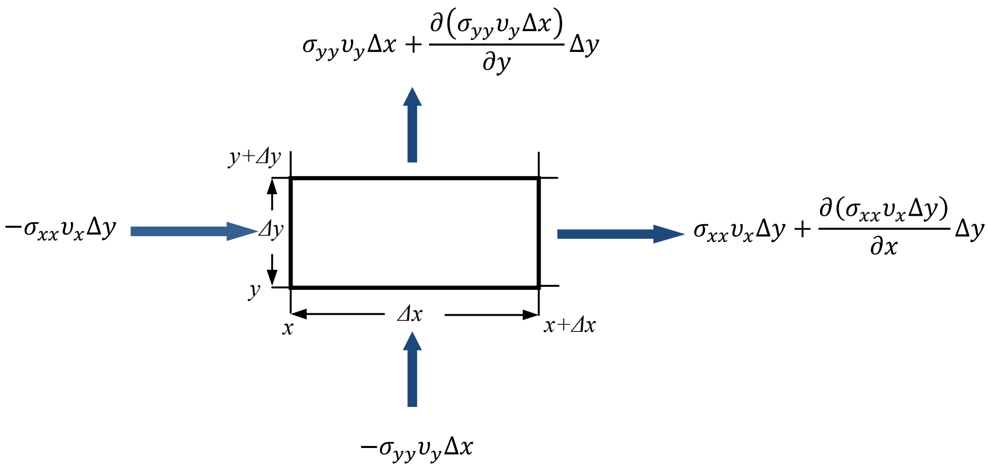

Figure 5: Le travail par unité de temps développé par les forces de pression

d'où le travail net due à cette contrainte est

$$\left(v_x\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\Delta x \Delta y$$

Les travaux des autres contraintes se calculent de la même manière. En assemblant les expressions de puissances thermiques dans l'équation du bilan énergétique, on obtient

$$\rho\frac{\partial(e)}{\partial t} - e\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\vec{\nabla}\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}\vec{q} + \dot{q} - p\vec{\nabla}\vec{v} + \mu\Phi$$

où Φ est la fonction de dissipation visqueuse qui s'écrit en

- deux dimensions

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2$$

- trois dimensions

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2$$

Après le remplacement de l'énergie e en fonction de l'enthalpie spécifique h et de l'entropie spécifique s dans l'équation précédente de l'énergie, on obtient la formulation température de la 1$^{\text{ère}}$ loi de thermodynamique

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla}\left(k\vec{\nabla}T\right) + \dot{q} - \beta\left(\frac{dp}{dt}\right)T + \mu\Phi$$

- Cas d'un fluide idéal $\beta = \frac{1}{T}$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla}\left(k\vec{\nabla}T\right) + \dot{q} - \frac{dp}{dt} + \mu\Phi$$

- Cas d'un fluide incompressible $\beta = 0$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla}\left(k\vec{\nabla}T\right) + \dot{q} + \mu\Phi$$

La plupart des problèmes de convection supposent que

- la conductivité thermique k est constante $k = cste$
- la génération de chaleur interne est nulle $\dot{q} = 0$
- la dissipation visqueuse est négligeable $\Phi = 0$
- l'effet de compressibilité est négligeable $\beta = 0$

ce qui donne à l'équation de l'énergie la forme la plus simple suivante

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = k\Delta T$$

La forme développée de cette équation dans les coordonnées cartésiennes est

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

avec $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ est la diffusivité thermique du fluide.