السنة الثانية فيزياء

جامعة محمد الصديق بن يحيى بجيجل

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

Mécanique de Hamilton

الجزء الأول

الأستاذة : ر. رقيوع

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

مقدمة: لدراسة جملة فيزيائية تعتمد طريقة هاملتون على تعريف دالة سلمية تسمى هاملتون الجملة انطلاقا من معرفة دالة لاغرانج حيث نقوم بتعويض السرعات المعممة بالاندفاعات المعممة. بتطبيق مبدأ الفعل الأصغري على دالة الفعل يمكن الحصول على معادلات هاملتون للحركة وهي جملة معادلات من الدرجة الأولى بحلها يمكن الحصول على المسارات أو السرعات ...إلخ للجملة الموصوفة.

1-دالة هاملتون H:

أ-تعريف: لتكن جملة هولونومية معرفة بدالة لاغرانج L : $L = L(\dot{q}_i, q_i, t)$

نعرّف دالة هاملتون للجملة بالدالة H حيث : $H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

مع $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ هو الاندفاع المعمم.

يُعرّف H بأنه تحويل ليجاندر لدالة لاغرانج بالنسبة للسرعات(la transformation de Legendre).

<u>ب-تحويل ليجاندر:</u> لتكن دالة ذات متغيرين x و y.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

بوضع

$$(1)\begin{cases} u = \frac{\partial f}{\partial x} \\ v = \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow df = udx + vdy$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

نريد الانتقال من المتغيرين (x ، y) إلى المتغيرين (u، y) بواسطة تعريف دالة جديدة g :

$$(x,y) \xrightarrow{g} (u,y)$$

$$g = ux - f \Rightarrow dg = xdu - vdy$$

$$(2)\begin{cases} x = \frac{\partial g}{\partial u} \\ v = -\frac{\partial g}{\partial y} \end{cases}$$

التحويل (2) هو التحويل العكسي ل(1).

بالإسقاط على H نجد:

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i\dot{q}_i - L(\dot{q}_i, q_i, t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$g(u, y) = ux - f(x, y)$$

<u>مثال:</u> أوجد دالة هاملتون لهزاز توافقي احادي البعد.

الحل: هزاز توافقي أحادي البعد

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ V = \frac{1}{2}kx^2 \end{cases} \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

تعريفا

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

$$= p_x \dot{x} - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

2-المعادلات القانونية لهاملتون: (معادلات هاملتون للحركة)

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

$$dH = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - dL$$

$$= \sum_i \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

من معادلة لاغرانج نحصل على

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{p}_i$$

ومنه

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \rightarrow (1)$$

من جهة أخرى

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \rightarrow (2)$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

وهي المعادلات القانونية للحركة.

مثال: أوجد المعادلات القانونية للحركة لهزاز توافقي في بعد واحد و استنتج معادلة الحركة.

ممّا سبق وجدنا

$$H(p_x, x, t) = \frac{p_x}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \longrightarrow (1) \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -kx \longrightarrow (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{m} \Rightarrow \dot{p}_x = m\ddot{x} \\ (2) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \end{cases}$$

م. ت. من الدرجة الثانية حلها العام

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$$

3- التكاملات الأولى للحركة:

أ) إذا كان $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = cst$

أي أن Pi ثابت حركة والاحداثية المرافقة هي احداثية مستترة.

ب)الطاقة الكلية للجملة و هاملتون الجملة : إذا كانت لدينا جملة محفوظة و خاضعة لقوى مشتقة من كمون مستقل عن السرعات فإن

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

$$= \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

حسب نظرية اولر

$$H(p_i, q_i, t) = 2T - T + V$$
$$= T + V = E = cst$$

<u>تطبيق:</u> لتكن دالة لاغرانج لجملة محافظة هو

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2\alpha} + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) - mg\rho\cot\alpha$$

(α ثابت)

1) أوجد دالة هاملتون؟
2) أوجد المعادلات القانونية للحركة.
3) استنتج ثوابت الحركة؟

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = p_\rho \dot{\rho} + p_\varphi \dot{\varphi} - L$$

$$\begin{cases} p_\rho = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \dfrac{m\dot{\rho}}{\sin^2\alpha} \\ p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m}\sin^2\alpha + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + mg\rho\cot\alpha$$

2) توجد احداثيتان مستقلتان (ρ,φ)ومنه المعادلات القانونية للحركة هي

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_{\rho}} = \frac{p_{\rho}}{m}\sin^{2}\alpha \Rightarrow \dot{p}_{\rho} = \frac{m\ddot{\rho}}{\sin^{2}\alpha}\ldots\ldots(1) \\ \dot{p}_{\rho} = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{p_{\varphi}^{2}}{m\rho} - mg\cot\alpha\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{m\rho^{2}} \Rightarrow p_{\varphi} = m\rho^{2}\dot{\varphi} \\ \dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_{\varphi} = cst = m\rho^{2}\dot{\varphi} \end{cases}$$

نعوض(1) في (2)

$$\begin{cases} (1)+(2) \Rightarrow \frac{m\ddot{\rho}}{\sin^{2}\alpha} = \frac{p_{\varphi}^{2}}{m\rho} - mg\cot\alpha \\ \Rightarrow \ddot{\rho} = \rho^{3}\sin^{2}\alpha\,\dot{\varphi}^{2} - g\sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

4- أقواس بواسون: نعتبر مقدار فيزيائي f يتعلق ب 3N إحداثية معممة qi و3N اندفاع معمم pi.

التفاضل الكلي ل f هو

$$df = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

إذا كان H هو هاملتون الجملة , فحسب المعادلات القانونية للحركة

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \{f, H\}_{q_i, p_i} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

حيث نقوم بإدخال تعريف مقدار جديد يُعرف بأقواس بواسون.

تعريف نعرف أقواس بواسون لدالتين f و g في الحالة العامة ب

$$\{f, g\}_{q_i, p_i} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

6-خواص أقواس بواسون:

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

$$1)\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$2)\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (\text{مترافقان})$$

$$3)\{f, g\} = -\{g, f\}$$

$$4)\{f, a\} = 0 \,(a \text{ ثابت})$$

$$5)\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$$

$$6)\{g, f_1 + f_2\} = \{g, f_1\} + \{g, f_2\}$$

$$7)\{af_1 + bf_2, g\} = a\{f_1, g\} + b\{f_2, g\} \quad (a \text{ و} b \text{ ثوابت})$$

$$8)\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + \{f_1, g\}f_2$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

9)متطابقة جاكوبي

$$\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0$$

7--نظرية بواسون: إذا كان f و g ثابتا حركة فإن $\{f, g\}$ ثابت حركة. أي

أي $$\frac{df}{dt}=\frac{dg}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\{f,g\}=0$$

البرهان : تعريفا

$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\{\{f,g\},H\}+\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}$$

$$=\{\{f,g\},H\}+\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

بتطبيق متطابقة جاكوبي

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = -\{\{H,f\},g\} - \{\{g,H\},f\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\} + \left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$$

$$= \{\{f,H\},g\} + \{f,\{g,H\}\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\} + \left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$$

$$= \left\{\underbrace{\frac{df}{dt}}_{0},g\right\} + \left\{f,\underbrace{\frac{dg}{dt}}_{0}\right\}$$

$= 0 \Rightarrow \{f,g\}$ ثابت حركة

تطبيق:

1) أوجد مركبات العزم الحركي(L_x, L_y, L_z) و(p_x , p_y,p_z) .
2) أحسب أقواس بواسون لمركبات شعاع الموضع مع مركبات شعاع العزم الحركي.

الحل:

1)

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \wedge \left(p_x\vec{i} + p_x\vec{j} + p_x\vec{k}\right)$$

$$= (yp_z - zp_y)\vec{i} + (zp_x - xp_z)\vec{j} + (xp_y - yp_x)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_x = (yp_z - zp_y) \\ L_y = (zp_x - xp_z) \\ L_z = (xp_y - yp_x) \end{cases}$$

(2

$$\{x, L_x\} = 0, \{x, L_y\} = z, \{x, L_z\} = -y$$

$$\{y, L_x\} = -z, \{y, L_y\} = 0, \{y, L_z\} = x$$

$$\{z, L_x\} = y, \{z, L_y\} = -x, \{z, L_z\} = 0$$

$$\Rightarrow \{q_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} q_k$$

ε_{ijk} est le symole de Levi-Civita.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2), \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (3,2,1), (1,3,2) \text{ ou } (2,1,3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i. \end{cases}$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

5- التحويلات القانونية: لتكن جملة هولونومية موصوفة بإحداثيات qi و اندفاعات pi . فإن معادلات هاملتون تعطى كما يلي

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad \ldots(1)$$

نستطيع الانتقال إلى الإحداثيات الجديدة (Qi, Pi) بواسطة التحويلات

$$(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$$

$$\begin{cases} q_i = q_i(Q_i, P_i, t) \\ p_i = p_i(Q_i, P_i, t) \end{cases}$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

ليكن $\tilde{H}(Q_i, P_i, t)$ هو هاملتون الجملة الجديدة. نقول عن هذا التحويل أنه قانوني إذا حافظ على الشكل القانوني لمعادلات الحركة بدلالة المتغيرات الجديدة .أي

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} \end{cases} \quad \ldots (3)$$

بحيث $\{Q_\alpha, P_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$ (التحويل قانوني).

$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0$

$\{P_\alpha, P_\beta\} = 0$

إنّ العلاقة بين $H, \tilde{H}$ تحدد بواسطة دوال F تسمّى الدوال المولدة للتحويل.

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

6-الدّوال المولدة: حسب مبدأ هاملتون فإن التحويلات (1) و(3) تجعل دالة الفعل أصغرية أي

$$\delta S = 0 \quad و \quad \delta \tilde{S} = 0$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

$$\delta \tilde{S} = 0 \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L} dt = 0$$

بالطرح نجد

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - \tilde{L}) dt = 0$$

يمكن إيجاد دالة F تحقق

$$(L - \tilde{L}) = \frac{dF}{dt}$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta(F(t_2) - F(t_1)) = 0$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

تسمّى هذه الدالة F بالدالة المولدة للتحويل. وعليه

$$\Rightarrow L = \tilde{L} + \frac{dF}{dt}$$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(P_i, Q_i, t) + \frac{dF}{dt} \ldots\ldots (I)$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \sum_i (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) - H(p_i, q_i, t) + H(P_i, Q_i, t)$$

من هنا نستنتج أن الدالة F ترتبط بجملتين من المتغيرات , أحدها من الجملة القديمة والآخر من الجملة الجديدة . وهذا يؤدي بالضرورة إلى الاحتمالات التالية:

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

$F_1(q_i, Q_i, t)$ $F_2(q_i, P_i, t)$ $F_3(p_i, Q_i, t)$ $F_4(p_i, P_i, t)$

-دراسةالدالة $F_1(q_i, Q_i, t)$

تعريفا

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

نعوض في العلاقة (I) نجد

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) = \sum_i P_i\dot{Q}_i - \tilde{H}(P_i, Q_i, t) + \frac{dF}{dt}$$

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) = \sum_i P_i\dot{Q}_i - \tilde{H}(P_i, Q_i, t) + \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

$$\sum_i\left(p_i-\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)\dot q_i-H=\sum_i\left(P_i+\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)\dot Q_i-\tilde H+\frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\sum_i\left(p_i-\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)\dot q_i-\sum_i\left(P_i+\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)\dot Q_i-H+\tilde H+\frac{\partial F_1}{\partial t}=0$$

بما أن Qi , qi احداثيات مستقلة فإن السرعات المرافقة مستقلة وعليه نجد

$$\begin{cases} p_i=\dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i=-\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ \tilde H=H+\dfrac{\partial F_1}{\partial t}\end{cases}$$

وهي العلاقات التي تحققها F1.

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

حتى يكون هناك تحويل عكسي فلا بد من الشرط

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_i} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_i \partial q_i} = -\frac{\partial P_i}{\partial q_i} \neq 0$$

نستخدم تحويل ليجاندر للانتقال إلى العلاقات التي تحققها F4, F3,F2 .

$$F_1(q_i, Q_i, t)\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ \tilde{H} = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases} \qquad F_3(p_i, Q_i, t)\begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\ \tilde{H} = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases}$$

$$F_2(q_i, P_i, t)\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ \tilde{H} = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases} \qquad F_4(p_i, P_i, t)\begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i} \\ \tilde{H} = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases}$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

تطبيق1: لتكن الدالة المولدة

$$F = \frac{1}{2}\omega(t)\frac{q^2}{\tan Q}$$

1) مانوع الدالة المولدة F ؟
2) أكتب التحويلات القانونية لF؟

الحل الدالة F هي دالة مولدة من النوع الأول .

$$F_1(q, Q, t)$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

التحويلات القانونية

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F_1}{\partial q} = \dfrac{\omega g}{\tan Q} \\ P = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} = \dfrac{1}{2}\omega \dfrac{q^2}{\sin^2 Q} \end{cases}$$

<u>تطبيق 2:</u> ليكن هاملتون الجملة

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$$

وليكن التحويل التالي

$$Q = pq^2 \quad , \quad P = \frac{1}{q}$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

1)أوجد دالة لاغرانج ؟

2)أثبت أن التحويل قانوني؟

3)أوجد الدالة المولدة للتحويل من النوع الأول؟

4)أكتب H بدلالة P,Q واستنتج $\hat{H}$ ؟

5)أوجد المعادلات القانونية للحركة بدلالة الإحداثيات الجديدة؟

6)بحل المعادلات التفاضلية , أوجد المعادلات الزمنية للحركة P,Q و p,q ؟

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

1)

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H$$

$$= p\dot{q} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$$

لكن

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \dot{q} = pq^4$$

$$\Rightarrow p = \frac{\dot{q}}{q^4}$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}^2}{q^4} - \frac{1}{q^2}\right)$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

2)التحويل قانوني

$$\{Q,P\} = 1$$

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

3)F1 تحقق جملة المعادلة

$$F_1(q,Q,t) \rightarrow \begin{cases} p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \ldots (1) \\ P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \ldots (2) \\ \tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

(4

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{Q}{q^2} \Rightarrow F_1 = -\frac{Q}{q} + C(Q)\ldots(3)$$

$$-\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{q} \Rightarrow C(Q) = cst\ldots(4)$$

$$\Rightarrow F_1 = -\frac{Q}{q} + cst$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$$

$$= \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$$

$$\Rightarrow \widetilde{H} = H + \cancel{\frac{\partial F_1}{\partial t}}$$

0

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$$

(5

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q} = -Q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{Q} + Q = 0 \ldots (5) \\ \dot{P} = -Q \ldots (6) \end{cases}$$

الفصل الثالث: ميكانيك هاملتون

(6

$$(5) \Rightarrow Q(t) = A\cos(t+\varphi)$$

$$(6) \Rightarrow P(t) = -A\sin(t+\varphi)$$

$$q(t) = \frac{1}{P} = -\frac{1}{A\sin(t+\varphi)}$$

$$p(t) = \frac{Q}{q^2} = A^3\cos(t+\varphi)\sin^2(t+\varphi)$$