Département de mathématiques, Université de Jijel

3`eme année Licence Mathématiques,

DEVOIR A DOMICILE

ESPACES VECTORIELS NORMES

Exercice 1

Soit (E,N) un espace vectoriel normé et soit F un sous espace vectoriel fermé de E, distinct de E.

1. Montrez qu'il existe $x \in E$ tel que $N(x) \leq 1$ et $d(x, F) = \inf\{N(x - z); z \in F\} \geq 1/2$.

2. Montrez qu'on a équivalence entre :

(i) E est de dimension finie

(ii) La boule fermée B de centre 0 et de rayon 1 est compacte

(iii) E est localement compact i.e. tout point admet un voisinage compact.

Exercice 2

Soit $H = C([-1, 1]); R)$, l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans R muni du produit scalaire

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

et soit (e_n), n∈N une suite dans H telle que e_n (t) = $t^{\,n}$ pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $n \in N$. On pose pout tout $k \in N$, V_k = Vect$\{e_0, e_1, \cdots, e_k\}$. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, construire une suite orthonormale (f_n), n∈N telle que V_k = Vect $\{f_0, f_1, \cdots, f_k\}$. Calculer seulement les quatres premiers vecteurs f_0, …, f_3