الجمهورية الجزائية الديموقراطية الشعبية

جامعة محمد الصديق بن يحي-جيجل

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات في مقياس الاقتصاد القياسي

موجهة لطلبة : السنة الأولى ماستر اقتصاد نقدي وبنكي

إعداد الدكتور: بودغدغ أحمد

السنة الجامعية 2021/2020

الجمهورية الجزائية الديموقراطية الشعبية

جامعة محمد الصديق بن يحيى-جيجل

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات في مقياس الاقتصاد القياسي

موجهة لطلبة : السنة الأولى ماستر اقتصاد نقدي وبنكي

إعداد الدكتور: بودغدغ أحمد

السنة الجامعية 2021/2020

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

مقدمة

مقدمة:

برزت الطرق الإحصائية بفضل التطور الذي عرفته الحواسيب وتكنولوجيا المعلومات، حيث أصبح من السهل التعامل مع الكم الهائل من المعطيات والجداول الإحصائية، وتحتل النماذج الاقتصادية الكلية موقعا أساسيا في الدراسات الاقتصادية الحديثة، بحيث أن تطور مختلف الطرق الإحصائية المطبقة على معطيات الاقتصاد الكلي أضحى متعددا ومهما، حيث الاقتصاد القياسي يعني بالمشاكل الاقتصادية التي تظهر في مجال التطبيق الإحصائي على بيانات اقتصادية.

الاقتصاد القياسي يجب أن يولى اهتماماً كبيراً في المرحلة الجامعية الأولى في الكليات ذات الصلة بهذا الموضوع وكذلك في مراحل الدراسات العليا المختلفة، ولا بد أيضاً من تبني هذا النوع من الدراسات في المؤسسات والهيئات الاقتصادية والبحثية كافة وذلك عن طريق تأهيل وتدريب الأشخاص المناسبين على القيام بهذا النوع من الدراسات وعلى استخدام البرامج الحاسوبية المتعلقة بالتحليل الاقتصادي والإحصائي.

إن دراسة علم الاقتصاد القياسي تقتضي من القارئ الإلمام بمفاهيم أساسية لا غنى عنها لفهم الموضوعات المطروحة في هذا المجال.

فعلم الاقتصاد القياسي يدرس المشاكل المتعلقة بالاقتصاد؛ لذا هو يرتبط بالنظام العام الذي يتكون من أجزاء معيّنة مترابطة، وللتعرف إلى أهداف ذلك العلم، وإلى عناصره وعلاقاته وارتباطاته بالعلوم الأخرى، ومراحل تطوره وموضوعه وتعريفه فإن ذلك يتطلب تناول الموضوعات التالية:

- **محور الأول: مدخل للاقتصاد القياسي.**

1-1 نشأة الاقتصاد القياسي وعلاقته بالعلوم الأخرى

1-2- مفهوم وأهمية الاقتصاد القياسي

1-3- أهداف ومهام الاقتصاد القياسي

1-4- خطوات البحث في الاقتصاد القياسي

1-5- تطبيقات واستخدام الاقتصاد القياسي

- **محور الثاني: تحليل الانحدار والتنبؤ بسلوك الظواهر المالية.**

2-1- دراسة استقرارية السلاسل الزمنية المعدة للتقدير

2-2- شروط تطبيق نماذج الانحدار

2-3- الانحدار البسيط

2-4- الانحدار المتعدد

2-5- الاختبارات الاحصائية لنماذج الانحدار البسيط والمتعدد

2-6- قراءة وتكوين نماذج الانحدار البسيط والمتعدد بالبرامج المتخصصة EVIEWS

- محور الثالث: نماذج الانحدار الذاتي للظواهر المالية.

3-1- مفهوم الانحدار الذاتي وشروط تطبيقها على الظواهر المالية

3-2- ألية تطبيق نماذج الانحدار الذاتي

3-3- قراءة وتكوين نماذج الانحدار الذاتي بالبرامج المتخصصة EVIEWS

- محور الرابع: نماذج التكامل المشترك وتطبيقها على الظواهر المالية.

4-1- نماذج أشعة الانحدار الذاتي.

4-2- العلاقة السببية لغرانجر وسيمس بين الظواهر المالية

4-3- مفهوم ومراحل نماذج التكامل المشترك وشروط تحققها بين الظواهر المالية

4-4- تكوين نماذج التكامل المشترك بالبرامج المتخصصة EVIEWS.

1- مدخل للاقتصاد القياسي

1-1 نشأة الاقتصاد القياسي وعلاقته بالعلوم الأخرى

1-2- مفهوم وأهمية الاقتصاد القياسي

1-3- أهداف ومهام الاقتصاد القياسي

1-4- خطوات البحث في الاقتصاد القياسي

1-5- تطبيقات واستخدام الاقتصاد القياسي

1-1 نشأة الاقتصاد القياسي وعلاقته بالعلوم الأخرى

1-1-1- نشأة الاقتصاد القياسي

يعدّ علم الاقتصاد القياسي علماً حديثاً نسبياً إذا ما قورن بالعلوم الاقتصادية الأخرى ، فعلى الرغم من المحاولات التي ظهرت في القرن التاسع عشر والتي كانت ذات طابع إقتصادي قياسي ، كعمل الإحصائي الألماني أرنست إنغل (1821-1896) Ernest Engel الذي وضع قوانينه الخاصة بالدخل والاستهلاك في ضوء بيانات ميزانية الأسرة ، وإستعمل مصطلح الاقتصاد القياسي أول مرة عام 1926 من قبل الاقتصادي النروجي فريش Frisch.

في عام 1919 نشر الاقتصادي الأمريكي بيرسون W.M.Pearson طريقته الخاصة بتحليل الدورات الاقتصادية التي طبقت في تحليل هذه الدورات في عدد من البلدان الرأسمالية ، كما طبقت في الاتحاد السوفييتي سابقاً أيضاً في إنجاز عدد من الأبحاث التي وضعت في خدمة سياسة الدولة السوفييتية في مرحلة الانتقال من الرأسمالية إلى الاشتراكية. وتعد محاولات تقدير دوال منحنيات العرض والطلب للمنتجات الزراعية في الولايات المتحدة الأمريكية في مطلع الثلاثينات من القرن العشرين محاولات أولى أيضاً في مجال تطبيق مبادئ الاقتصاد القياسي.

أما من حيث التاريخ فلها تاريخ طويل في تطبيق الأساليب الكمية في الاقتصاد، ويقال أنها بدأت في الجدول الاقتصادي لكيني في القرن الثامن عشر. لم يتم استخدام البيانات الإحصائية بشكل منهجي حتى القرن العشرين لغرض إعطاء المحتوى الكمي والتجريبي للنظرية الاقتصادية. ومع ذلك، في بداية القرن العشرين، تم تجاهل النظرية الاقتصادية وتم اشتقاق المعلومات الكمية من البيانات الإحصائية وحدها، وعلى العكس من ذلك، تم تجاهل طبيعة البيانات الإحصائية وتم تطبيق النظرية الاقتصادية عليها بشكل أعمى. لا يمكن القول أنه تم الجمع بين النظرية والبيانات الإحصائية بشكل جيد. كمثال على السابق، تشتهر لجنة البحوث الاقتصادية بجامعة هارفارد، التي حاولت تنظيم وتصنيف السلاسل الزمنية الاقتصادية، وإجراء البحوث الإحصائية حول دورات الأعمال، وإنشاء مؤشرات اقتصادية شاملة، وعمل تنبؤات اقتصادية. تم انتقاده على أنه "قياس بدون نظرية" لأنه يفتقر إلى نظرية اقتصادية مناسبة بسبب الفشل المتكرر في التنبؤ الاقتصادي. من ناحية أخرى، من أجل إعطاء إثبات واقعي للنظرية الاقتصادية الكلاسيكية الجديدة التي كانت تطور نظامًا نظريًا رشيقًا باستخدام طرق رياضية متقنة، يتم تحليل النظرية الاقتصادية إحصائيًا باستخدام تحليل الارتباط وتحليل الانحدار. تم صنعه للقياس. على

سبيل المثال، يشتهر H. Moore و H. Schultz و P. Douglas وآخرون بقياس مرونة العرض والطلب والإنتاجية الحدية. ومع ذلك، فهذه هي طرق العلوم الطبيعية المطبقة بشكل أساسي على البيانات الإحصائية الناتجة عن التجارب دون انعكاس، وقد تمت الإشارة إلى القيود والمشاكل عند تطبيقها على البيانات الإحصائية الاقتصادية حيث تمت الإشارة إلى البيانات غير التجريبية كانت. لذلك، من أجل تكوين مزيج مفيد من النظرية الاقتصادية والبيانات الإحصائية، من الضروري تطوير طريقة تحليل إحصائي تأخذ في الاعتبار خصائص البيانات الإحصائية الاقتصادية .ر. فريش ، T. Hobelmo، A. Wald et al.، بمساهمة الإحصائيين الرياضيين، تم تقريبًا إنشاء الطرق الإحصائية المستخدمة في الاقتصاد القياسي بحلول أوائل الخمسينيات من القرن الماضي.

أسس بعض واضعي الفكر الاقتصادي الأوائل من أمثال مور H.More ، وشولتز H.Schultz ، وفريش وستون R.Stone الجمعية الدولية للاقتصاد القياسي International Econometrics Association في عام 1930. ثم توسع تطبيق مبادئ الاقتصاد القياسي بعد الحرب العالمية الثانية ، وأخذت أنشطة هذا العلم تشمل تقديرات لمعالم أو لثوابت نماذج اقتصادية مؤلفة من عدة معادلات. ومنذ ذلك التاريخ والاقتصاد القياسي يستخدم أداة فعالة في حل المعضلات الاقتصادية وفي عمليات التخطيط الاقتصادي . وبدأ تطبيق مبادئ هذا العلم بالانتشار حديثاً في بلدان العالم الثالث. وساعد على إنتشار طرائق الاقتصاد القياسي عاملان إثنان هما:

1. توافر الإحصاءات الاقتصادية بكميات أكبر وبدقة أفضل. وهي تؤلف المادة الأولية للبحث العلمي في الاقتصاد القياسي.

2. التطور الكبير والسريع في مجال الحاسبات الإلكترونية الذي مكن من التوسع في النماذج الاقتصادية لتشمل عدداً كبيراً من المتغيرات بعد أن كان ذلك مقتصراً على التحليل النظري. فقد أصبح بالإمكان اليوم تقدير ثوابت نموذج مؤلف من عدة مئات من المعادلات وإختبار صلاحية النماذج الاقتصادية النظرية ومعرفة مدى ملاءمتها للواقع المعقد.

1-1-2- علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى

- علاقة الاقتصاد القياسي بعلم الاقتصاد :هذا أمر طبيعي، إذ إن الاقتصاد القياسي هو أحد فروع هذا العلم، والنظرية الاقتصادية تشير عموماً إلى وجود علاقات معينة بين متغيرات اقتصادية كالعلاقة بين

الكمية المطلوبة من سلعة معينة وسعرها وأسعار السلع البديلة مثلاً، وتحتاج عملية قياس تلك العلاقات إلى اختيار نماذج قياسية لتمثيلها.

- علاقة الاقتصاد القياسي بعلم الرياضيات :بما توفره الرياضيات من نماذج رياضية يختار الاقتصاد القياسي ما يناسب منها وفق أسس معينة للوصول إلى نموذج لتمثيل العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية المدروسة، ومن الطبيعي أن يكون بعض تلك النماذج أقل جودة في التعبير عن الواقع المعقد من بعضها الآخر.
- علاقة الاقتصاد القياسي بعلم الإحصاء :بما يوفره الإحصاء من أدوات أساسية في القياس كالتي تتعلق بطرائق الاستدلال الإحصائي مثلاً.

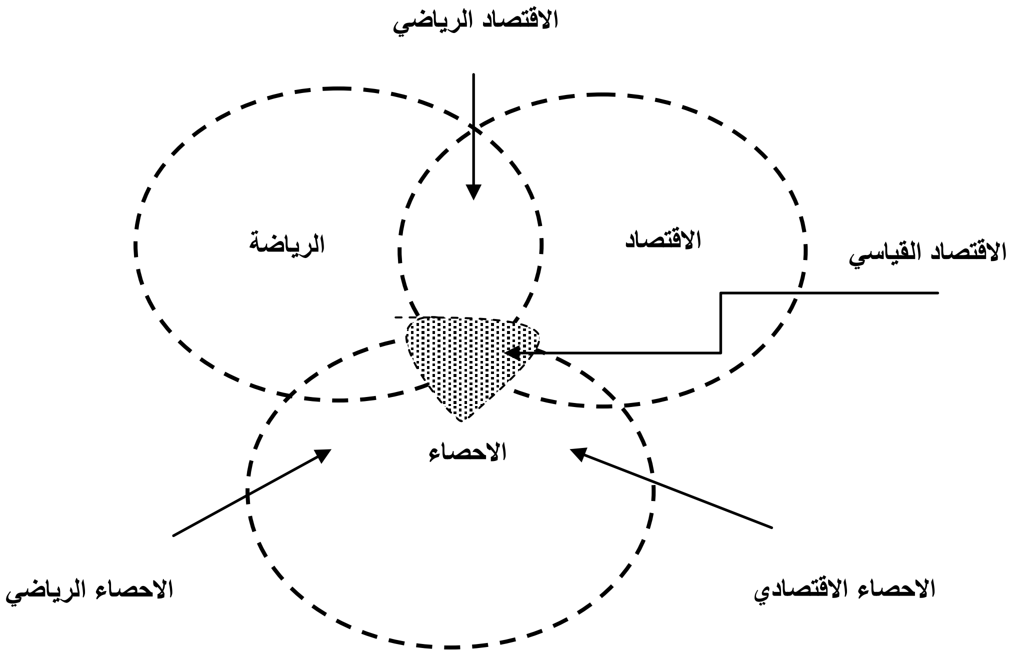
1-2- مفهوم وأهمية الاقتصاد القياسي

1-2-1- مفهوم الاقتصاد القياسي

كلمة إقتصاد قياسي بالإنجليزية (Econometrics) : مكونة من مقطعين ECONO : مشتقة من إقتصاد و METRICS مشتقة من كلمة قياس.

الاقتصاد القياسي هو اسلوب من اساليب التحليل الاقتصادي، يهتم بالتقدير العددي (الكمي) للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية، الموجودة في النظريات الاقتصادية، بالاستعانة بالعديد من العلوم الاخرى واهمها الرياضيات والاحصاء وغيرها، للوصول الى هدفه باختبار الفروض والتقدير، ورسم السياسات واتخاذ القرارات، ومن ثم التنبؤ بالظواهر الاقتصادية في المستقبل. تهدف هذه المادة الى تقديم النظريات الاقتصادية والتقنيات التي تستخدم في القياس والتحليل وخاصة تقنية الانحدار الخطي

والاقتصاد القياسي Econometrics فرع من فروع علم الاقتصاد الذي يختص بالقياس (التقدير) الكمي للعلاقة بين المتغيرات مستخدما النظرية الاقتصادية والرياضيات والأساليب الاحصائية، بهدف اختبار النظريات الاقتصادية المختلفة من ناحية ومساعدة رجال الأعمال والحكومات في اتخاذ القرارات ووضع السياسات من ناحية أخري .



أي أن الاقتصاد القياسي يهتم بتحليل الظواهر الاقتصادية الواقعية تحليلاً كمياً ، وذلك باستخدام أساليب الاستقراء الإحصائي المناسبة. أي إنه علم استعمال طرائق الاستقراء والاستدلال الإحصائي لكشف القوانين الاقتصادية الموضوعية وتحديد فعلها تحديداً كمياً.

يعد الاقتصاد القياسي اسلوب من اساليب التحليل الاقتصادي الذي يهتم بالتقدير العددي للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية معتمدا في ذلك على النظرية الاقتصادية والرياضيات والاحصاء للوصول الى هدفه الخاص باختبار الفروض والتقدير ومن ثم التنبؤ في الظواهر الاقتصادية.

يعرف الاقتصاد القياسي بأنه علم اجتماعي تستخدم فيه ادوات النظرية الاقتصادية والرياضيات والاحصاء لتحليل الظواهر الاقتصادية.

فالتحليل الكمي للظواهر الاقتصادية هو محاولة للتحقق من العلاقات الاقتصادية والتأكد من منطقيتها في تمثيل الواقع المعقد الذي تعبر عنه النظرية الاقتصادية في صيغة فروض . ويعتمد الاقتصاد القياسي في قياس العلاقات الاقتصادية وتحليلها على دمج النظرية الاقتصادية والرياضيات والأساليب الإحصائية في نموذج متكامل ، وذلك بهدف تقويم معالم ذلك النموذج ثم إختبار الفروض حول ظاهرة إقتصادية معينة ، وأخيراً التنبؤ بقيم تلك الظاهرة.

1-2-1- أهمية الاقتصاد القياسي

تأتي أهمية الاقتصاد القياسي من نتائج التطبيقات المختلفة وإمكانية توظيفها للتحكم في الظواهر المدروسة وذلك من خلال النقاط التالية:

- التقدير الكمي لتأثير العوامل المؤثرة على الظواهر الاقتصادية المدروسة من حيث حجم التأثير واتجاهه، وهذا يجعل عملية التحكم واضحة وسهلة، وكذلك العمليات الاقتصادية من خلال التحكم بالعوامل المؤثرة فيها.
- عند تقدير دوال الإنتاج على المستوى الجزئي، يمكن تقدير تأخير كل عامل من العوامل المؤثرة على الإنتاج وتحديد المقادير المثلى من كل عامل التي يجب إضافتها للحصول على أعلى إنتاجية وأقل تكلفة.
- القرارات المتخذة استناداً إلى نتائج الدراسات القياسية تكون رشيدة لأنها تستند إلى نتائج وعلاقات دقيقة ومعنوية وتقديرات منطقية ومختبرة.
- يمكن من خلال النماذج القياسية التنبؤ بتغيرات الظاهرة المدروسة بتغير العوامل المؤثرة عليها وبتغير الزمن.
- سهولة قراءة الظواهر حيث يعتبر النموذج اختصاراً واضحاً ورقمياً للعلاقة بين المتغيرات.
- يعمل الاقتصاد القياسي على استبعاد أخطاء التقدير الشخصي للباحثين، وكذلك يقيس العلاقة الحقيقية، ومدى الارتباط الفعلي، وليست العلاقة الظاهرية بين المتغيرات.

1-3- أهداف ومهام الاقتصاد القياسي

1-3-1- أهداف الاقتصاد القياسي:

يهدف الاقتصاد القياسي إلي تحقيق ثلاثة أهداف رئيسية هي علي النحو التالي:

- إختبار النظريات الاقتصادية المختلفة .
- مساعدة رجال الاعمال والحكومات في إتخاذ القرارات.
- مساعدة رجال الأعمال والحكومات في وضع السياسات.
- رسم السياسات واتخاذ القرارات.
- التنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل.

1-3-2- مهام الاقتصاد القياسي

تتمثل مهام الاقتصاد القياسي عامة بتحقيق ما يلي:

- تحديد النموذج الرياضي المناسب لتمثيل العلاقة أو العلاقات القائمة بين المتغيرات الاقتصادية المدروسة ، إذ يجب على الباحث في هذه المرحلة وضع فروض النظرية الاقتصادية في نموذج رياضي عشوائي.

- تقدير معاملات أو ثوابت النموذج الرياضي المطبق. تبدأ هذه المهمة بجمع الإحصاءات الاقتصادية المناسبة بالدقة المطلوبة حول ظاهرة أو ظواهر يراد دراستها وتنتهي باستخدام الأساليب الإحصائية المناسبة لتقدير معالم النموذج الذي إختاره الباحث لتمثيل العلاقات بين المتغيرات.

- إختبار النموذج الرياضي العشوائي المطبق لمعرفة ما إذا كان يمثل فعلاً حقيقة الواقع المدروس أم أنه يجب على الباحث اختيار نموذج آخر أكثر واقعية. ويعتمد الباحث في اختيار النموذج المناسب على معايير اقتصادية، إذ من المفترض أن تنسجم قيم المعاملات المقررة في النموذج في طبيعتها وقيمها النسبية مع ما هو متوقع في إطار النظرية والفروض الاقتصادية التي تحكم الظواهر المدروسة. وكذلك من اختبارات فروض النموذج نفسها، ولاسيما تلك المتصلة بالحد العشوائي لمعرفة مدى انسجامها مع الواقع المدروس.

1-4- خطوات البحث في الاقتصاد القياسي

- بناء النموذج الاقتصادي الرياضي وصياغة علاقاته الرياضية
- تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج إحصائي احتمالي
- جمع وتبويب البيانات اللازمة لتقدير معلمات النموذج
- تمييز العلاقات المكونة للنموذج
- التأكد من إمكانية قياس كل متغير تفسيري على حدة
- الإلمام بالآثار المرتقبة لأخطاء التجميع على تقدير المعلمات النموذج
- اختبار أسلوب القياس المناسب لتقدير معلمات النموذج
- اختبار معنوية التقديرات لمعلمات النموذج
- تحديد القدرة التنبؤية للنموذج والمعالجة الحاسوبية

1-5- تطبيقات واستخدام الاقتصاد القياسي

1-5-1- تطبيقات الاقتصاد القياسي

يعتبر مجال تطبيق الاقتصاد القياسي واسعًا جدًا حيث يشمل كافة الظواهر الاقتصادية:

- على مستوى الاقتصاد الجزئي: حيث يمكن إستخدام تطبيقاته لتحديد دوال الانتاج والتكاليف على مستوى المنشاة وكافة إشتقاقاتها مثل دوال الناتج المتوسط والناتج الحدي والتكلفة المتوسطة والحدية. وكذلك يقيس تاثير العوامل المؤثرة على الانتاج كميًا، ويحدد الحدود المثلى من كل عامل التي يجب إدخالها في العملية الانتاجية ، ويحدد التوليفة المثلى من العوامل مجتمعة التي تحقق أفضل عائدية.

- على مستوى الاقتصاد الكلي: يمكن باستخدام النماذج القياسية تقدير دوال الاستهلاك والطلب للسلع المختلفة على المستوى الكلي. وكذلك دوال الانتاج بصيغها غير الخطية المختلفة . كما يمكن بناء نماذج قياسية (متعددة المعادلات) توصف الاقتصاد ككل وتتضمن دوال الدخل القومي والاستثمار والاستخدام والاستهلاك والتجارة الخارجية (الصادرات والواردات).

- ويمكن إستخدام تطبيقات الاقتصاد القياسي في بعض الدراسات الاجتماعية.

1-5-2- إستخدام الاقتصاد القياسي

تطور إستعمال الاقتصاد القياسي مع تطور العلم نفسه ومع تغير المشكلات الاقتصادية. وبوجه عام فإن مجالات تطبيق طرق الاقتصاد القياسي هي:

1. تحليل الدورات الاقتصادية التي تعرضت لها البلدان الرأسمالية ، وخاصة الولايات المتحدة في مطلع القرن العشرين، بهدف التنبؤ بمواعيدها والتصدي للأزمات الاقتصادية ومعالجتها أو التخفيف من حدتها قبل حدوثها وتقليص الخسائر الناجمة عنها. وكانت جامعة هارفرد المركز الأول لهذا النوع من الأبحاث التي قلت أهميتها إثر عجزها عن التنبؤ بحدوث الأزمة الاقتصادية الكبرى عام 1929.

2. أبحاث السوق وتحديد مرونة الطلب والعرض ، إذ من الثابت عموماً أنّ هناك علاقة عكسية بين سعر المنتج والكمية المطلوبة منه. ومن المهم عند المنتجين معرفة مدى أثر تغيير محدد في سعر السلعة في الكمية المطلوبة منها. وعلى صعيد أجهزة الدولة المسؤولة عن تخطيط عملية التنمية فإن هذا النوع من الأبحاث ذو أهمية خاصة، إذ إن السياسات السعرية تؤلف أدوات لتوجيه أنماط الإنتاج والاستهلاك باتجاهات مرغوب فيها، مما يحتم ضرورة تعرُّف فعالية هذه الأدوات قبل استعمالها. ففي المجتمعات الاشتراكية مثلاً، يتطلب التخطيط الفعال للاستهلاك الفردي تعرُّف مرونات الطلب بالنسبة إلى الدخل

والأسعار، لكي يستطيع المخطط تعرُّف الطلب المستقبلي في ضوء التطور المرسوم للدخول والأسعار المتوقعة للسلع وبدائلها.

3. دراسة مستويات الإنتاج وعلاقتها بالتكلفة ، وهي دراسات ذات أهمية في مسائل تخطيط الإنتاج على صعيد الوحدات والقطاعات الإنتاجية. إذ تبين هذه الدراسات الأهمية النسبية لكل عامل من عوامل الإنتاج في العملية الإنتاجية على صعيد المؤسسة وأهميته في النمو الاقتصادي على مستوى القطاع والمجتمع. أي تحديد مصادر النمو الاقتصادي في المجتمع ودور التطور التقني في ذلك.

4. نظرية البرمجة التي تطبق تطبيقاً واسعاً على صعيد الوحدات الإنتاجية في البلدان الرأسمالية والاشتراكية وفي تخطيط الاقتصاد الاشتراكي الشامل. وفي إطار هذه النظرية يتم تحليل النشاطات الاقتصادية المتداخلة بهدف ضمان التوازن بين جميع الوحدات المستقلة المساهمة في العمليات الإنتاجية المترابطة.

2- تحليل الانحدار والتنبؤ بسلوك الظواهر المالية

2-1- دراسة استقرارية السلاسل الزمنية المعدة للتقدير

2-2- شروط تطبيق نماذج الانحدار

2-3- الانحدار البسيط

2-4- الانحدار المتعدد

2-5- الاختبارات الاحصائية لنماذج الانحدار البسيط والمتعدد

2-6- قراءة وتكوين نماذج الانحدار البسيط والمتعدد بالبرامج المتخصصة EVIEWS

2-1- دراسة استقرارية السلاسل الزمنية المعدة للتقدير

إن أغلب المعطيات سواء في المالية أو التسويق أو على مستوى الاقتصاد الجزئي يتم تمثيلها على شكل سلاسل زمنية، حيث أن كل مشاهدة تمثل تحقيق وحيد لمتغير عشوائي، ومجموع هذه المتغيرات يشكل ما يسمى بالسياق العشوائي، والذي يكتب على الشكل التالي:

- $Y(t)$ إذا كان Y متغيرا عشوائيا مستمرا.
- Y_t إذا كان Y متغيرا عشوائيا منفصلا.

2-1-1- السلاسل الزمنية المستقرة:

تكون السلسلة الزمنية مستقرة إذا تحققت الشروط التالية:

- ثبات الوسط الحسابي للسلسلة.
- ثبات تباين السلسلة.
- اعتماد التغاير بين فترتين زمنيتين على المدة الزمنية الفاصلة بينهما.

ويمكن التعبير عن هذه الشروط رياضيا كما يلي:

$$\mathrm{E}(Y_t) = u$$

$$Var(Y_t) = \mathrm{E}(Y_t - u)^2 = \sigma^2$$

$$\gamma_t = \mathrm{E}[(Y_t - u)(Y_{t+k} - u)]$$

2-1-2- السلاسل الزمنية غير المستقرة وطرق تعديلها:

نقول عن السلسلة الزمنية أنها غير مستقرة إذا لم يتحقق أحد شروط الاستقرارية، وغالبا ما تنتج عدم الاستقرارية عن تغير المتوسط أو التباين أو كليهما معا.

2-1-2-1- أنواع السلاسل الزمنية غير المستقرة:

يمكن التمييز بين نوعين من السلاسل الزمنية غير المستقرة، وهما:

أ. **السياق العشوائي غير المستقر ذات الاتجاه المحدد:** تتم عملية تقدير هذا السياق كما يلي:

$$Y_t = g(t) + V_t \qquad t = 1,2,\ldots\ldots$$

حيث:

$g(t)$: هي دالة محددة غير عشوائية.

V_t : مركبة عشوائية مستقرة.

من خلال العبارة السابقة يظهر أن القسم العشوائي V_t لـ Y_t مستقر وبذلك ترجع عدم استقرارية Y_t إلى القسم $g(t)$.

ب. السياق العشوائي غير المستقر ذات الاتجاه العشوائي: هو السياق الذي يكون لقسم الانحدار الذاتي فيه جذور أحادية، وهذا يعني أن مجموع معاملات الانحدار الذاتي يكون مساويا للواحد.

إن كل سياق عشوائي Y_t يمكن تمثيله على الشكل التالي:

$$\forall t : Y_t = u + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_n Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

كما يمكن كتابة هذا النموذج باستعمال معامل التأخير كما يلي:

$$\forall t : Y_t \left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - .... - \phi_p L^p\right) = u + \varepsilon_t$$

فإذا كانت قيمة مجموع المعاملات $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$ مساوية للواحد فهذا يعني أن السياق العشوائي Y_t ذو اتجاه عشوائي.

حيث:

$$\mathrm{E}(Y_t) = ut + Y_0$$

$$Var(Y_t) = \mathrm{E}[Y_t - \mathrm{E}(Y_t)]^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right)^2 = t\sigma_\varepsilon^2$$

إن متوسط وتباين السياق العشوائي Y_t هما دالتان في الزمن وعليه إذا كان $u = 0$ فإن السلسلة الزمنية غير مستقرة لأن تباينها متزايد عبر الزمن.

2-1-2-2- طرق تعديل السلاسل الزمنية غير المستقرة:

توجد عدة طرق لتعديل السلاسل الزمنية غير المستقرة أهمها:

أ. **تثبيت التباين:** يوجد عدة طرق لتحويل البيانات بهدف تثبيت التباين، وتعتبر التحويلة اللوغاريتمية وتحويلة الجذر التربيعي من أكثر التحويلات استخداما.

ب. إزالة الاتجاه العام: هناك طريقتين أساسيتين لإزالة مركبة الاتجاه العام من السلسلة الزمنية، وهما:

- الفروقات من الدرجة الأولى: وتتم هذه العملية بتطبيق المعادلة التالية:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

- الطريقة الانحدارية: إذا كان لدينا النموذج التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta t \quad + \varepsilon_t$$

حيث:

$(\alpha + \beta t)$: الاتجاه العام.

ε_t : المركبة العشوائية.

ولإزالة مركبة الاتجاه العام نقوم بتقديرها باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية ثم إزالتها من السلسلة الأصلية فنتحصل على سلسلة خالية من الاتجاه العام e_t حيث:

$$e_t = Y_t - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} t\right)$$

نشير إلى أنه قبل تطبيق التقنية المناسبة . طريقة الفرو قات أو الطريقة الانحدارية . يجب مسبقا معرفة أصل مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية.

ج. **إزالة المركبة الموسمية:** يوجد العديد من الطرق لإزالة المركبة الموسمية أهمها:

- طريقة الفروق الموسمية: إذا كانت السلسلة الفصلية أو الشهرية تتضمن المركبة الموسمية فإن عملية تحويلها إلى سلسلة مستقرة تتم بالطريقة التالية:

$$\tilde{Y}_t = (1-L)^d \left(1-L^i\right)^S Y_t$$

أو :

$$\tilde{Y}_t = (1-L)^d \left(1-L^i\right)^S Ln(Y_t)$$

حيث:

$\tilde{Y}_t$: السلسلة الخالية من المركبة الموسمية.

d : درجة التفريق.

S : درجة التفريق الموسمي.

i : تواتر السلسلة.

L : معامل التأخير .

نشير إلى أن هذه الطريقة تسمح بحذف التذبذبات الموسمية إذا كانت قيمة S غير معدومة.

- الطريقة الانحدارية: إذا افترضنا أنه لدينا سلسلة زمنية ذات مركبة موسمية دورتها $p = 4$ ، ومركبة عشوائية فقط ولها شكل تجميعي. في هذه الحالة نعبر عن الموسمية بالمتغيرات التمثيلية كالآتي:

إذا كانت المشاهدة خاصة بالفصل الأول $D_{1t} = 1$ ، الفصول الأخرى تساوي الصفر

إذا كانت المشاهدة خاصة بالفصل الثاني $D_{2t} = 1$ ، الفصول الأخرى تساوي الصفر

إذا كانت المشاهدة خاصة بالفصل الثالث $D_{3t}=1$، الفصول الأخرى تساوي الصفر

إذا كانت المشاهدة خاصة بالفصل الرابع $D_{4t}=1$، الفصول الأخرى تساوي الصفر

ويمكن نمذجة الموسمية في الشكل العام وحساب المؤشر الموسمي الرابع كما يلي:

-الحالة التجميعية:

$$Y_t = \alpha + \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j D_{jt} + \varepsilon_t$$

حيث:

α: الحد الثابت.

$$\sum_{j=1}^{p-1} S_j + S_p = 0$$

$$S_p = -\sum_{j=1}^{p-1} S_j$$

ومنه:

حيث:

S_p: يمثل β_p.

S_j: متوسط مجموع عناصر كل عمود مقابل لفصل معين.

-الحالة الجدائية:

$$Y_t = \prod_{j=1}^{p-1} \beta_j^{D_{jt}}$$

$$S_p = p - \sum_{j=1}^{p-1} S_j$$

2-2- شروط تطبيق نماذج الانحدار

- العشوائية في اختيار العبنة، واستقلالية كل فرد عن الأفراد الأخرين في العينة المختارة.
- أن يكون المتغيرين التابع والمستقل مصنفين ضمن المقاييس الكمية.
- التوزيع الاعتدالي (الطبيعي) لدرجات المتغيرين التابع والمستقل.
- وجود علاقة خطية بين المتغيرين التابع والمستقل.

- أن يكون تباين المتغير المستقل أكبر من الصفر والغرض من هذا أن يسهم المتغير المستقل في تفسير التباين في درجات المتغير التابع.
- أن يكون متوسط البواقي أو الأخطاء العشوائية يساوي صفر وتباين يساوي S^2، والأخطاء العشوائية هي الفرق بين القيمة الحقيقية الفعلية والقيمة التقديرية أو المتنبأ بها وتعرف هذه الأخطاء العشوائية بأنها البواقي.
- أن تكون الأخطاء العشوائية (البواقي) موزعة توزيعا طبيعيا (اعتداليا).

2-3- الانحدار البسيط

يعتبر الانحدار الخطي البسيط أبسط أنواع نماذج الانحدار، بحيث يوجد العديد من العلاقات الاقتصادية التي يمكن قياسها باستخدام هذا الأسلوب، مثل علاقة الإنفاق الاستهلاكي والدخل المتاح، وعلاقة الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها، وأيضا مستوى البطالة مع معدل التضخم ... سنتطرق إذن في هذا الفصل إلى تحليل الانحدار ذي متغيرين. نعطي أولا الصيغة الرياضية لهذا النموذج مع الفرضيات الأساسية حول الخطأ العشوائي ثم في الفقرة الثانية من هذا الفصل نقوم بتعريف طريقة المربعات الصغرى العادية قصد تقدير معالم النموذج ودراسة خصائص المقدرات مع تشتتاتها وفي الجزء الثاني، سنتناول دراسة التوزيع الاحتمالي للمقدرات وبناء فترات الثقة قصد اختبار الفرضيات.

1. كتابة النموذج الخطي والفرضيات الأساسية:

يمكن نمذجة العلاقة بين المتغيرين Y_i و X_i على الشكل :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1.........n$$

حيث : Y_i يسمى بالمتغير المُفَسَّر أو التابع و X_i بالمتغير المُفَسِّر أو المستقل، β_0 و β_1 هما معلما النموذج.

أما ε_i فيمثل الخطأ في تفسير Y_i، ومنه يمكن كتابته انطلاقا من العلاقة: $\varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$

ويرجع وجود حد الخطأ إلى إهمال بعض المتغيرات المستقلة التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع في النموذج و حدوث خطأ في كل من تجميع البيانات وقياس المتغيرات الاقتصادية و يرجع ذلك أيضا إلى الصياغة الرياضية غير السليمة للنموذج.

ويترتب على إسقاط هذا الافتراض حدوث أخطاء تحديد تتمثل في إغفال متغيرات مستقلة هامة في نموذج الانحدار المراد تقديره، أو احتواء هذا النموذج على متغيرات مستقلة غير هامة وفي تغير معاملات الانحدار أي أن معاملات الانحدار قد لا تظل ثابتة أثناء الفترة الزمنية التي تم تجميع البيانات عنها.

فرضيات النموذج :

أ. الفرضية الأولى : الأمل الرياضي للأخطاء معدوم :

$$E(\varepsilon_i)=0, \forall i=1.....n$$

ب. الفرضية الثانية : تجانس (ثبات) تباين الأخطاء Homoscedasticity :

وهو ما يعني أن تشتتها حول المتوسط ثابت، ونعبر عنها رياضيا بالكتابة:

$$Var(\varepsilon_i)=E(\varepsilon_i^2)=\sigma^2 \quad ,\forall i=1.....n$$

ج. الفرضية الثالثة : عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء: بمعنى أن التباينات المشتركة لأخطاء الملاحظات المختلفة تكون معدومة، وهذا على مختلف مشاهدات مكونات العينة، ونعبر عنها رياضيا كما يلي :

$$Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0 \quad ,\forall i\neq j \qquad i,j=1.....n$$

د. الفرضية الرابعة : الأخطاء مستقلة عن X_i :

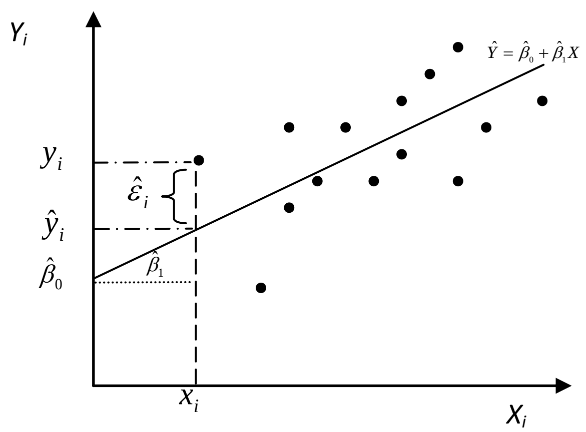
$$Cov(X_i,\varepsilon_i)=0, \forall i=1,...,n$$

2. تقدير معالم النموذج:

1.2. طريقة المربعات الصغرى:

إن هذه الطريقة تحاول إيجاد أحسن تصحيح خطي بتدنئه مربعات الانحراف (بين المشاهدات الفعلية والمقدرة) $\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2$ ، حيث: $\hat{\varepsilon}_i=Y_i-\hat{Y}_i$. (أنظر الشكل رقم (1)).

الشكل رقم (1) : الهدف من طريقة المربعات الصغرى



وهذا ما يمكن كتابته رياضيا بـ :
$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = \underset{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1}{Min}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i\right)^2$$

والشرط اللازم لتدنئة هذه العلاقة هو أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة $\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_0$ معدومة أي :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\hat{\beta}_0}\sum_i\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i\right)^2=0\\ \dfrac{\partial}{\partial\hat{\beta}_1}\sum_i\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i\right)^2=0\end{cases}$$

بعد حل جملة المعادلين السابقة نتحصل على تقدير معلمتي النموذج :

$$\begin{cases}\hat{\beta}_1=\dfrac{n\sum_i X_iY_i-\sum_i X_i\sum_i Y_i}{n\sum_i X_i^2-\left(\sum_i X_i\right)^2}\\ \hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{X}\end{cases}$$

ومن المفيد استخدام صيغة مكافئة لتقدير $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$$

ويكون النموذج المقدر (خط الانحدار) بطريقة المربعات الصغرى المقدرة (*OLS*) كما يلي:

$$\hat{Y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_i$$

2.2. خصائص مقدرات المربعات الصغرى :

أ- خاصية عدم التحيز: التحيز هو ذلك الفرق بين مقدرة ما ووسط توزيعها، فإذا كان هذا الفرق يختلف عن الصفر نقول عن ذلك المقدر بأنه متحيز. وإذا عدنا إلى مقدرتي المربعات الصغرى فإننا نجد $E\left(\hat{\beta}_1\right)=\beta_1 , E\left(\hat{\beta}_0\right)=\beta_0$ ومنه نقول أن $\hat{\beta}_0$ و$\hat{\beta}_1$ هما مقدرتين غير متحيزتين لـ β_0 و β_1 على التوالي.

ب- أفضل مقدر خطي غير متحيز BLUE : تنطلق هذه الفكرة من نظرية Gauss-Markov والتي تقول" من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرتا المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ أفضل مقدرتين خطيتين وغير متحيزتين، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى".

ج-خاصية الاتساق: إذا واجهنا مشكلة تحيز مقدرة ما، فإننا ننظر إلى الخاصية التقاربية لذلك المقدر، ويحدث ذلك لما يكون المتغير المستقل X_i عبارة عن متغير تابع ومبطأ بفترة زمنية ما، ونقول عن $\hat{\beta}_1$ بأنه مقدر متسق (Consistent Estimator)، إذا كان: كلما $n \to \infty$ فإن توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_1$ يقترب من القيمة الحقيقية β_1، ونقول أن النهاية الاحتمالية للمقدر $\hat{\beta}_1$ هي β_1 ونكتب : $\underset{n\to\infty}{p\lim}(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

لكن هذا الشرط غير كاف للحصول على مقدر متسق، بل يجب أن تكون قيمتا التحيز والتباين تقتربان أو تساويان الصفر كلما اقترب n من ما لا نهاية أي:

$$1.\lim_{n\to\infty} E(\hat{\beta}_1) = \underset{n\to\infty}{p\lim}(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

$$2.\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}(\hat{\beta}_1) = \underset{n\to\infty}{p\lim} \operatorname{var}(\hat{\beta}_1) = 0$$

وبتحقق هذين الشرطين، نقول عن المقدر $\hat{\beta}_1$ بأنه مقدر متسق للمعلمة الحقيقية. إن المقدرات المتحصل عليها لكل من $\hat{\beta}_0$، $\hat{\beta}_1$ وσ^2 سواء بطريقة المربعات الصغرى أو غيرها هي تقديرات نقطية، ولكن من المهم أن يكون لدى الاقتصادي أكثر من اختيار، ولذلك يجب أن نبني مجالا لهذه المقدرات وذلك بقبول مستوى ثقة معين وهو ما نسميه بالتقدير المجالي للمعالم.

3. توزيع المعاينة للمقدرات و التقدير المجالي للمعالم:

1.3. حساب تباينات المقدرات :

لبناء مجال الثقة للمعالم، يتعين معرفة تباين كل من $\hat{\beta}_0$، $\hat{\beta}_1$ و البواقي.

- تباين $\hat{\beta}_0$:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0) = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \right)\sigma_\varepsilon^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \right)\sigma_\varepsilon^2$$

- تباين $\hat{\beta}_1$:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} + \bar{X}^2 \operatorname{var}(\hat{\beta}_1)$$

وبناءا على هذا التعريف تكون الانحرافات المعيارية (Standard déviations) هي الجذور التربيعية لتباينات المقدرات، أما الأخطاء المعيارية (Standard errors) فهي الجذور التربيعية لمقدرات الانحرافات المعيارية أي :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)} = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)} = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

نلاحظ أن تباين كل مقدر غير معروف لأنه يرتبط بتباين الأخطاء النظري σ_ε^2، فينبغي في هده الحالة تقدير تباين الأخطاء للحصول على تباين البواقي :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}$$

القيمة التي في البسط تعبر عن مجموع مربعات البواقي حيث $\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ أما $n-2$ فهي درجة الحرية، تعبر عن حجم العينة ناقص 2 و ذلك لوجود معلمين للتقدير في النموذج.

2.3. بناء مجال الثقة للمعالم :

بمعرفة توزيع $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ يمكن تكوين مجالات ثقة وإجراء اختبار الفرضيات الموضوعة حول معالم الانحدار β_0 و β_1 على التوالي، نعطي مجالا للقيم التي يمكن أن تحتوي عليها معالم الانحدار الحقيقية، مع كل مجال ثقة نضع مستوى إحصائيا للمعنوية، حيث أن احتمال احتواء المجال المذكور على معلمة الانحدار الحقيقية يكون واحد مطروحا منه مستوى المعنوية، أي $(1-\alpha)$، ولتكوين مجال الثقة من التوزيع t بالنسبة للمعلمين β_0 و β_1 نكتب القانون الخاص لكل معلمة :

في حالة $n \leq 30$ و σ^2 غير معروف :

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \rightsquigarrow t_{(n-2)}$$

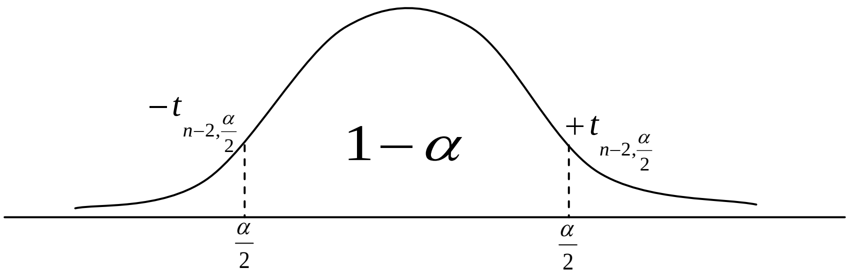
$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \rightsquigarrow t_{(n-2)}$$

عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ يكون مجال الثقة لكلا المعلمين :

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \leq +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \leq +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

الشكل رقم (3) : توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_1$ ثنائي الطرف



إذا ضربنا (داخل الاحتمال) كل الأطراف بواسطة $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}$ $(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1})$ وأضفنا β_0 (β_1) لأطراف المتراجحة نجد :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} , \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} , \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \right]$$

$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة لتوزيع *Student* بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\%\alpha)$ ونجد من جدول التوزيع القيمة المحسوبة.

في حالة n >30 و σ^2 معروف :

$$\hat{\beta}_1 \to \mathrm{N}\left(\beta_1 , \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum_i x_i^2} \right)$$

$$\hat{\beta}_0 \to \mathrm{N}\left(\beta_0 , \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{\sum_i X_i^2}{n\sum_i x_i^2} \right)$$

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \to N(0,1)$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \to N(0,1)$$

عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ يكون مجال الثقة لكلا المعلمين :

$$\Pr\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \leq +z_{\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

$$\Pr\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \leq +z_{\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

نفس الشيء، نضرب (داخل الاحتمال) كل الأطراف بواسطة $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}$ ($\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$) ونضيف β_0 (β_1) لأطراف المتراجحة نجد :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} , \hat{\beta}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} , \hat{\beta}_1 + z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$z_{\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة للتوزيع الطبيعي بنسبة معنوية $(\%\alpha)$ ونجد من جدول التوزيع القيمة المحسوبة.

كلما كان مجال الثقة ضيقا كلما كان المقدر أحسن، لأن الأخطاء المعيارية تكون أصغر.

نبني أيضا مجال الثقة لـ σ^2. لدينا :

$$\frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2} \sim \chi_{\alpha}^2(n-2)$$

$\chi_{\alpha}^2(n-2)$: القيمة الحرجة لتوزيع χ^2 بدرجة حرية $n-2$. يكون مجال الثقة :

$$\Pr\left[\chi_{\alpha/2}^2 \leq \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2\right]=1-\alpha \Rightarrow \Pr\left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \leq \sigma_{\varepsilon}^2 \leq \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\chi_{\alpha/2}^2}\right]=1-\alpha$$

يكون مجال الثقة لتباين الأخطاء :

$$\sigma_{\varepsilon}^2 \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\chi_{\alpha/2}^2}\right]$$

4. التقدير بطريقة المعقولية العظمى

نفترض أن الأخطاء تتوزع توزيعا طبيعيا و النموذج دائما هو $Y_i=\beta_0+\beta_1 X_i+\varepsilon_i,\ i=1,...,n$. دالة كثافة الأخطاء تكتب على الشكل التالي :

$$f(\varepsilon_i)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

نسمي $L(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ دالة المعقولية العظمى، حيث :

$$L(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=\prod_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

نعلم أن : $\varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$ وعليه :

$$L(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i^2}{\sigma^2}\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i)^2}{\sigma^2}\right)$$

نقوم بتقدير معالم النموذج وذلك بتعظيم لوغاريتم دالة المعقولية العظمى، حيث :

$$\max_{\hat\beta_0,\hat\beta_1,\hat\sigma^2}\log L=\max_{\hat\beta_0,\hat\beta_1,\hat\sigma^2}\left\{-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i)^2\right\}$$

نبحث عن شروط التعظيم حيث أن الشروط اللازمة هي :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\log L}{\partial\hat\beta_0}=0\Leftrightarrow-\dfrac{2}{\hat\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat\beta_0-\hat\beta_1X_i)(-1)=0\\[2ex]\dfrac{\partial\log L}{\partial\hat\beta_1}=0\Leftrightarrow-\dfrac{2}{\hat\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat\beta_0-\hat\beta_1X_i)(-X_i)=0\\[2ex]\dfrac{\partial\log L}{\partial\hat\sigma^2}=0\Leftrightarrow-\dfrac{n}{2}.\dfrac{1}{\hat\sigma^2}.\dfrac{1}{2\hat\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat\beta_0-\hat\beta_1X_i)^2=0\end{cases}$$

من المعادلات الثلاث يمكن بكل سهولة استخراج قيم المقدرات :

من المعادلة الأولى : $\hat\beta_0=\overline{Y}-\hat\beta_1\overline{X}$

من المعادلة الثانية :

$$\hat\beta_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

ومن المعادلة الثالثة للجملة :

$$-n\hat\sigma^2=-\sum_{i=1}^{n}\hat\varepsilon_i^2\Rightarrow\hat\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat\varepsilon_i^2}{n}$$

لنتذكر تقدير تباين الأخطاء بطريقة المربعات الصغرى فبرهننا أنه غير متحيز و لكن المقدر المتحصل عليه بطريقة المعقولية العظمى متحيز. فلنسم $\hat\sigma^2_{OLS}$ مقدر تباين الأخطاء بطريقة المربعات الصغرى و $\hat\sigma^2_{MLE}$ المقدر المتحصل عليه بطريقة المعقولية العظمى، لدينا :

$$\hat\sigma^2_{MLE}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat\varepsilon_i^2}{n}=\frac{n-2}{n}.\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat\varepsilon_i^2}{n-2}$$

بإدخال التوقع الرياضي على الطرفين :

$$E(\hat{\sigma}^2_{MLE}) = \left(\frac{n-2}{n}\right).E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}\right) = \left(\frac{n-2}{n}\right).E\left(\hat{\sigma}^2_{OLS}\right)$$

بمأن $\hat{\sigma}^2_{OLS}$ غير متحيز أي : $E(\hat{\sigma}^2_{OLS}) = \sigma^2$ ، إذن : $E(\hat{\sigma}^2_{MLE}) = \left(\frac{n-2}{n}\right).\sigma^2 \Rightarrow E(\hat{\sigma}^2_{MLE}) \neq .\sigma^2$

وعليه نستنتج أن المقدر بطرقة المعقولية العظمى متحيز.

يكون $\hat{\sigma}^2_{MLE}$ أحسن تقدير لـ σ^2 إذا كان حجم العينة كبيرا أي أن $\frac{n-2}{n} \to 1$ لما $n \to \infty$ نستنتج أن : $E(\hat{\sigma}^2_{MLE}) = \sigma^2$ تسمى هده الخاصية بخاصية عدم التحيز التقاربي.

5. تحليل التباين و القدرة التفسيرية للنموذج

تساعد البواقي $\hat{\varepsilon}_i$ على قياس مدى تمثيل المعادلة المفروضة في النموذج لمشاهدات العينة، حيث أن القيمة الكبيرة للبواقي تعني بأن التمثيل يكون غير جيد والقيمة الصغيرة لها تعني تمثيلا جيدا للنموذج، إن المشكلة في استعمال البواقي كمقياس لجودة التوفيق هو أن قيمة البواقي تعتمد على المتغير التابع Y_i، الذي نعرفه حول وسطه انطلاقا من الشكل رقم (1) كما يلي :

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{\varepsilon}_i$$
$$Y_i - \bar{Y} = \hat{Y}_i - \bar{Y} + \hat{\varepsilon}_i$$

وبتربيع طرفي المعادلة أعلاه وجمعها بالنسبة لكل *i* نجد :

$$\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$$

وتعد هذه المعادلة مفيدة جدا لخدمة أغراضنا فيما يتعلق بقياس القدرة التفسيرية، ولذا من المهم أن نفحص بعناية معنى كل حد من حدودها:

- ❖ $\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$ هو مجموع مربعات الانحرافات الكلية في المتغير *Y*: Total Sum of Squares (TSS)
- ❖ $\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ فهو مجموع مربعات الانحرافات المشروحة : Explained Sum of Squares (ESS)

❖ ويبقى الحد الأخير $\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$ الذي هو مجموع مربعات البواقي : Residual Sum of Squares (RSS)

نعيد صياغة المعادلة السابقة على الشكل : $\boxed{TSS = ESS + RSS}$

وبتقسيم كل الأطراف على الانحرافات الكلية TSS نجد :

$$1 = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS}$$

وعليه نعرف معامل التحديد $R^2 = r^2$ كما يلي:

$$R^2 = r^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

معامل التحديد R^2 يقيس ويشرح نسبة الانحرافات الكلية أو التغيرات التي تحدث في المتغير التابع Y_i، والمشروحة بواسطة تغيرات المتغير المستقل X_i فهي نسبة تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع، فهو إذن مقياس للقدرة التفسيرية للنموذج أي يختبر جودة التوفيق و الارتباط.

ويمكن حساب R^2 كالآتي :

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

ويعتبر R^2 من أهم المعاملات التي تقيس علاقة الارتباط بين متغيرين ووجود مثل هذه العلاقة يعني ضمنيا أن أحد هذين المتغيرين يعتمد في تغيره أو في حدوثه على المتغير الآخر. معامل التحديد معرف وينتمي إلى المجال التالي:

$$0 \le R^2 \le 1$$

نذكر أن الفرق الجوهري بين معامل التحديد و معامل الارتباط يكمن في السببية حيث يقيس معامل الارتباط العلاقة بين متغيرين بغض النظر عن الدور الذي يلعبه كل متغير، أما معامل التحديد فيقيس أيضا الارتباط ولكن يأخذ بعين الاعتبار السببية حيث أن المتغير X_i هو الذي يشرح الظاهرة Y_i.

هناك علاقة بين R^2 و $\hat{\beta}_1$، نضع :

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

أو :

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}_1 \sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum(X_i - \bar{X})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

مثال 01: لتكن لديك المعطيات التالية والخاصة بالعلاقة بين متغير تابع Y ومتغير مستقل X

9	5	1	3	2	X
17	9	3	7	4	Y

المطلوب: قدر معادلة نموذج الانحدار البسيط من الشكل $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X + e_i$

أ- باستعمال القانون العام

ب-باستعمال القانون المختصر

أ- ما هي قيمة Y في حالة X يساوي 10

الحل:

x^2	xy	XY	$y = Y - \bar{Y}$	$x = X - \bar{X}$	X^2	Y	X
4	8	8	−4	−2	4	4	2
1	1	21	−1	−1	9	7	3
9	15	3	−5	−3	1	3	1
1	1	45	1	1	25	9	5
25	45	153	9	5	81	17	9
40	**70**	**230**			**120**	**40**	**20**

أ- بالاعتماد على القانون العام:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - (\sum X)^2} =$$

$$\hat{\beta} = \frac{(5)(230) - (20)(40)}{5(120) - (20)^2} = 1.75$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = 8 - 1.75(4) = 1$$

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X =$$

$$\hat{Y} = 1 + 1.75X$$

ب-بالاعتماد على القانون المختص:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{70}{40} = 1.75$$

حساب قيمة Y في حالة X يساوي 10:

$$\hat{Y} = 1 + 1.75X$$

$$\Rightarrow \hat{Y} = 1 + 1.75(10) = 18.5$$

مثال 02: فيما يلي بيانات عن كمية البروتين اليومي بالجرام التي يحتاجها العجل الرضيع، ومقدار الزيادة في وزن العجل بالكجم، وذلك لعينة من العجول الرضيعة حجمها **10**.

الطاقة	10	11	14	15	20	25	46	50	59	70
الانتاج	10	10	12	12	13	13	19	15	16	20

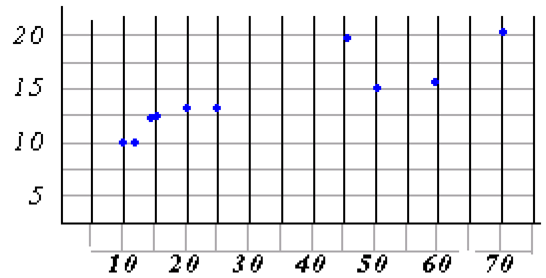
والمطلوب :

- ارسم نقط الانتشار، وما هو توقعاتك لشكل العلاقة ؟
- قدر معادلة انحدار الوزن على كمية البروتين.
- فسر معادلة نموذج الانحدار.
- ما هو مقدار الزيادة في الوزن عند إعطاء العجل **50** جرام من البروتين ؟ وما هو مقدار الخطأ العشوائي؟
- ارسم معادلة الانحدار على نقط الانتشار .

الحل:

❖ **رسم نقط الانتشار:**

مقدار الزيادة y



الطاقةx

من المتوقع أن يكون لكمية البروتين أثر طردي (إيجابي) على مقدار الزيادة في الوزن.

❖ **تقدير معادلة الانحدار.**

بفرض أن هي كمية البروتين، هي مقدار الزيادة في الوزن

X	Y	XY	X^2
10	10	100	100
11	10	110	121
14	12	168	196
15	12	180	225
20	13	260	400
25	13	325	625
46	19	874	2116
50	15	750	2500
59	16	944	3481
70	20	1400	4900
320	**140**	**5111**	**14664**

- لدينا:

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{320}{10}=32 \qquad \bar{y}=\frac{\sum x}{n}=\frac{140}{10}=14$$

$$\hat{\beta}=\frac{n\sum XY-\sum X\sum Y}{n\sum X^2-(\sum X)^2}=\frac{(10)(5111)-(320)(140)}{(10)(14664)-(320)^2}$$

$$=\frac{6310}{44240}=0.1426$$

- يمكن حساب $\hat{\alpha}$ كما يلي:

$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=14-(0.1426)(32)=9.4368$$

- إذا معادلة الانحدار المقدرة، هي:

$$\hat{y}=9.44+0.143x$$

- **تفسير الإحصائي لنموذج الانحدار:**
- معامل الانحدار $\hat{\beta}=0.143$: يدل على أنه كلما زادت كمية الطاقة بوحدة واحد، يؤدي ذلك إلى زيادة في بمقدار 0.143 كجم، أي زيادة مقدارها 143 جرام.
- الثابت – 9.44 = $\hat{\alpha}$: يدل على أنه في حالة عدم استخدام البروتين في التغذية، فإن الوزن يزيد بـ 9.44 جرام.

مقدار الزيادة في الوزن عند $x=50$ هو:

$$\hat{y} = 9.44 + 0.143(50) = 16.59$$

وأما ومقدار الخطأ العشوائي هو:

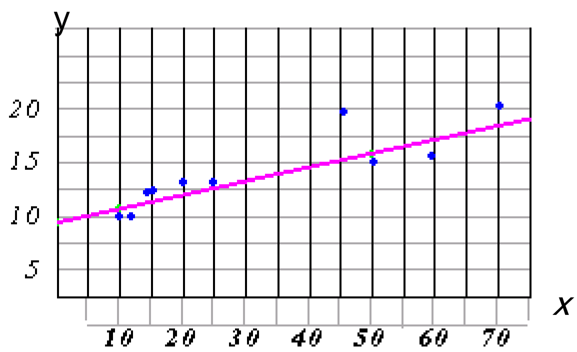
$$\hat{e}_{x=50} = y_{x=50} - \hat{y}_{x=50} = 15 - 16.59 = -1.59$$

رسم معادلة الانحدار على نقط الانتشار.

يمكن رسم معادلة خط مستقيم إذا علم نقطتين على الخط المستقيم.

X	50	10
Y	16.59	10.87

إذا معادلة الانحدار هي:



2-4- الانحدار المتعدد

يعد الانحدار الخطي المتعدد من الأساليب الإحصائية المتقدمة والتي تضمن دقة الاستدلال من أجل تحسين نتائج البحث عن طريق الاستخدام الأمثل للبيانات في إيجاد علاقات سببية بين الظواهر موضوع البحث .

والانحدار الخطي المتعدد هو عبارة عن انحدار للمتغير التابع (Y) على العديد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ,...., X_k$ لذا فهو يستخدم في التنبؤ بتغيرات المتغير التابع الذي يؤثر فيه عدة متغيرات مستقلة أي تعتمد فكرته على العلاقات الدلالية التي تستخدم ما يعرف بشكل التشتت أو الانتشار ، فبإمكاننا التنبؤ بالمستوى الرقمي في فعالية رمي المطرقة على سبيل المثال اعتماداً على دراسة حالات أخرى للرامي كالعمر الزمني والعمر التدريبي والمهارة والمواصفات الجسمية وغيرها .

إن الانحدار الخطي المتعدد ليس مجرد أسلوب واحد وإنما مجموعة من الأساليب التي يمكن استخدامها لمعرفة العلاقة بين متغير تابع مستمر وعدد من المتغيرات المستقلة التي عادةً ما تكون مستمرة)

يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير تابع Y_i وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ..., X_k$ وحد عشوائي ε_i، ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لـn من المشاهدات وk من المتغيرات المستقلة بالشكل الأتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + ... + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \, , \quad i = 1, ..., n ....(1)$$

وفي واقع الآمر فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الأتي:

$$\begin{aligned} i = 1 : Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + ... + \beta_k X_{1k} + \varepsilon_1 \\ i = 2 : Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + ... + \beta_k X_{2k} + \varepsilon_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i = n : Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + ... + \beta_k X_{nk} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

هذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلومات المطلوب تقديرها علما بان الحد الأول منها β_0 يمثل الحد الثابت الآمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كآلاتي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1K} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2K} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \ldots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ . \\ B_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad .... \; (2)$$

وباختصار يمكن كتابة العلاقة السابقة كالآتي:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Y: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع .

X : مصفوفة أبعادها $(n \times k+1)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح ليمثل الحد الثابت .

β: متجه عمودي أبعاده $(k+1 \times 1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها .

ε: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية .

وبما أن المعادلة (1) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها باستخدام الإحصاءات المتوفرة عن المتغير التابع Y والمتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ..., X_k$، فإنه يستوجب تحقق الفروض الأساسية الخاصة بـ ε_i التالية:

2.3 الفرضيات التي يقوم عليها نموذج الإنحدار الخطي المتعدد:

* $H.1$ تأخذ علاقة النموذج الخطي المتعدد الصيغة التالية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots\ldots, n$$

* $H.2$ ε_i يتوزع توزيعا طبيعيا متعدد المتغيرات.

* $H.3$ القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفرا أي أن: $E(\varepsilon_i) = 0$

$$E(\varepsilon_i) = E\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ . \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

* $H.4$ تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفرا أي أن:

$$\begin{cases} \text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, & \forall i = 1.........n \\ \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & \forall i \neq j \end{cases}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = E\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} [\varepsilon_1 \quad \varepsilon 2 \quad \ldots \quad \varepsilon_n]$$

$$= E\begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \ldots & \varepsilon_2\varepsilon_n \\ . & . & . & . \\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_n^2 \end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon'\varepsilon) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & .... & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & .... & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ . & . & ..... & . \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & .... & E(\varepsilon_n^2) \end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \text{var}(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_2) & .... & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ Cov(\varepsilon_2\varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & .... & Cov(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ . & . & .... & . \\ Cov(\varepsilon_n\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_n\varepsilon_2) & .... & Var(\varepsilon_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{var}(\varepsilon_i) = E(\varepsilon^2{}_i) = \sigma^2 \\ \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & \forall i \neq j \end{cases}$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^{\ 2} = \sigma^2{}_2 = \sigma^2 = ...\sigma^2{}_n$$

حيث أن:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 I_n$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك"Variance –CovarianceMatrix" لحد الخطأε_i، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين قيم ε_i، بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم ε_i .

ويمكن تلخيص الفرضيات السابقة رياضيا كما يلي: $\varepsilon_i \sim N\left(0, \sigma^2 I_n\right)$

$* H.5$ $\frac{1}{n}(X'X)$ تؤول الى مصفوفة محدودة غير فردية.

$* H.6$ عدم وجود ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة كما أن عدد المشاهدات يجب أن يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها أي أن : $\rho(X) = K+1 \prec n$ حيث أن ρ رتبة مصفوفة البيانات و X عدد المتغيرات المستقلة $K+1$، وهي أصغر من عدد المشاهدات (n)، وهذه الفرضية ضرورية جدا لضمان أيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$ إذ أن عدم توفر هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) اقل من $K+1$ وبالتالي فان رتبة $(X'X)$ التي تستخدم في الحصول على مقدرات OLS بدورها اقل من $K+1$ ولا يمكن إيجاد معكوسا لها أي أن : $(X'X)^{-1}$ غير معرفة لن محدده يؤول الى الصفر وهذا ما يسبب ما يسمى بمشكلة الارتباط الخطي المتعدد، وبالتالي لا يمكن الحصول على المقدرات باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS).

$* H.7$ (X) مصفوفة غير عشوائية، وتعني هذه الفرضية أنه إذا أخذنا عينة أخرى تتكون من (n)مشاهدة فإن المصفوفة (X) (مصفوفة المتغيرات المفسرة) تبقى دون تغيير، المصدر الوحيد للتغير هنا هو شعاع الخطأ العشوائي(ε)وهذا ما يؤثر على الشعاع (Y) أي ; $\operatorname{cov}(X,\varepsilon) = E(X'\varepsilon) = 0$

3.3 تقدير شعاع المعالم $\hat{\beta}$:

باستعمال طريقة(OLS) وبإتباع نفس خطوات التقدير التي رأيناها في النموذج الخطي البسيط نستطيع تقدير النموذج الخطي المتعدد باستعمال طريقتي المعادلات الطبيعية وجبر المصفوفات كالآتي:

1.3.3 طريقة المعادلات الطبيعية:

في مثل هذه تكون طريقة المعادلات الطبيعية غير عملية، فهي تتطلب وقتا طويلا لإيجاد صيغة مقدرات النموذج، زيادة على ذلك فإن هذه الصيغ تحتاج إلى عمليات حسابية معقدة.

في حالة وجود متغيرين مستقلين فقط وهي أبسط حالة لنموذج الانحدار المتعدد تكون صيغة النموذج كما يلي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i ....1$$

النموذج المقدر هو:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + e_i ....2$$

حيث أن:

$\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ هي مقدرات $\beta_2, \beta_1, \beta_0$ على الترتيب و e_i مقدر ε_i.

تهدف هذه الطريقة إلى إيجاد تقدير للشعاع β الذي يُصَغِّر مجموع مربعات الانحراف $\hat{\varepsilon}_i$ بين القيمة المقدرة $\hat{Y}$ والقيمة الحقيقية Y أي:

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$
$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad i = 1.......n$$

ومن خلال التعويض عن $\hat{Y}_i$ بما يساويها وأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ ومساواتها بالصفر نحصل على :

الشرط اللازم لتدنئة قيمة $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ هو أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة ل $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ معدومة أي:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_0}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_{2i}\right)^2 = 0..................3 \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_{2i}\right)^2 = 0....................4 \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_2}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 = 0.................5 \end{cases}$$

$$3 \Rightarrow \quad -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 . \sum X_{2i} ....6$$

المعادلة رقم: (6) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الأولى.

$$4 \Rightarrow \quad -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 (X_{1i}) = 0$$

$$\sum_i (Y_i X_{1i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i}^{\ 2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{1i} X_{2i} ....7$$

المعادلة رقم: (7) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثانية.

$$5 \Rightarrow \quad -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 (X_{2i}) = 0$$

$$\sum_i (Y_i X_{2i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^{\ 2} ....8$$

المعادلة رقم: (8) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثالثة.

وتمثل المعادلات (6) و (7) و (8) المعادلات الطبيعية الثلاث التي تستخدم في تقدير المعالم الثلاثة المجهولة $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ وهذه المعادلات يمكن حلها بإحدى الطرق الآتية :

2.3.3 <u>طريقة المحددات</u> :

يمكن أن تحل هذه المعادلات بواسطة قاعدة كرا يمر للحصول على قيم $\hat{\beta}_K$من المعلمات وعلى النحو الآتي :

$$\sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 . \sum X_{2i} .$$

$$\sum_i (Y_i X_{1i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i}^{\ 2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{1i} X_{2i}$$

$$\sum_i (Y_i X_{2i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^{\ 2}$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن أيجاد المحددات الآتية:

$$= \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix} |D|$$

$$= \begin{vmatrix} n & \sum Y_1 & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix} |N1|$$

$$= \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i \end{vmatrix} |N2|$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{i2i}Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{|N_2|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{i2i}Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

أما بالنسبة ل $\hat{\beta}_0$ فيتم الحصول عليه عن طريق : $\boxed{\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X}_1 - \hat{\beta}_2\overline{X}_2}$

3.3.3 **طريقة المصفوفات** :

تهدف هذه الطريقة إلى إيجاد تقدير للشعاع β الذي يُصَغِّر مجموع مربعات الانحراف $\hat{\varepsilon}_i$ بين القيمة المقدرة $\hat{Y}$ والقيمة الحقيقية Y.

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad i = 1.......n$$

$$Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = Min\left(Y - \hat{Y}\right)'\left(Y - \hat{Y}\right) = Min\, e'e$$

$$\Rightarrow \quad e = Y - \hat{Y} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$Min(e'e)=\left(Y-\hat{Y}\right)'\left(Y-\hat{Y}\right)=\hat{Y}'\hat{Y}-2\hat{Y}'Y+Y'Y=\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}-2\hat{\beta}'X'Y+Y'Y$$

للحصول على النهاية الصغرى فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial\sum e_i^{\,2}}{\partial\hat{\beta}'}=0\Leftrightarrow 2(X'X)\hat{\beta}-2X'Y=0$$

وبما أن رتبة (X) هي $k+1$ فإن : $(X'X)$ مصفوفة مربعة $((k+1)\times(k+1))$ رتبتها $k+1$ وتقبل معكوس $(X'X)^{-1}$.

ومنه:
$$2(X'X)\hat{\beta}-2X'Y=0 \quad\Rightarrow (X'X)\hat{\beta}-X'Y=0$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(X'X)^{-1}$ لنحصل على : $\boxed{\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y}$ وهو تقدير لـ β.

وللتأكد من أن $\hat{\beta}$ المتحصل عليه هو قيمة دنيا لـ $\sum e_i^{\,2}$ ، يجب تحقيق الشرط من الدرجة الثانية:

$$\frac{\partial^2\sum e_i^{\,2}}{\partial\hat{\beta}'\partial\hat{\beta}}=\left(X'X\right)>0$$

وهي مصفوفة موجبة معرفة ومنه فإن $\hat{\beta}$ هو نهاية صغرى.

المصفوفة $(X'X)$ هي على الشكل التالي:

$$X'X=\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n}X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}X_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n}X_{2i}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n}X_{2i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}X_{ki} & \sum_{i=1}^{n}X_{ki}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n}X_{ki}X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $(X'Y)$ هي على الشكل التالي:

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_0\\ \hat{\beta}_1\\ \vdots\\ \hat{\beta}_k\end{bmatrix} \qquad X'Y=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}Y_i\\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_i\\ \sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}X_{ki}Y_i\end{bmatrix}$$

4.3.3 طريقة الانحرافات :

عن وسطهما الحسابي: x وyمن الممكن الحصول على المقدرات **باستخدام الانحرافات** وذلك بواسطة

$$y_i = \left(Y_i - \bar{Y}\right)$$

$$x_{1i} = \left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)$$

$$x_{2i} = \left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)$$

إذن تصبح معادلة الانحدار بالمعطيات المركزة بالشكل الآتي:

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i ....1$$

نلاحظ من هذه المعادلة أن الحد الثابت لا يوجد.

وفي واقع الآمر فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الآتي :

$$\begin{aligned}
i = 1 : Y_1 &= \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + ... + \beta_k X_{1k} + \varepsilon_1 \\
i = 2 : Y_2 &= \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + ... + \beta_k X_{2k} + \varepsilon_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
i = n : Y_n &= \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + ... + \beta_k X_{nk} + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

هذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلومات المطلوب تقديرها علما بان الحد الأول منها β_0 يمثل الحد الثابت الأمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كالآتي :

$$= \begin{bmatrix} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1K} \\ & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2K} \\ . & . & . & \dots & . \\ & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ . \\ B_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad .... \quad (2) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

وباختصار يمكن كتابة العلاقة السابقة كالآتي:

$$y = x\beta + \varepsilon$$

y: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع .

x : مصفوفة أبعادها $(n \times k)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة لا يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح لأنه لا يوجد الحد الثابت .

β: متجه عمودي أبعاده $(k \times 1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها .

ε: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية .

مثلا يمكننا ببساطة إيجاد $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1$ كالآتي:

لدينا :

$$\begin{aligned} &Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}(y_i-\ddot{y}_i)^2 \\ &\hat{\varepsilon}_i = y_i-\hat{y}_i \qquad i=1.......n \\ &Min\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 = Min(y-\hat{y})'(y-\hat{y}) = Min\, e'e \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad e = y-\hat{y} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$Min(e'e) = (y-\hat{y})'(y-\hat{y}) = \hat{y}'\hat{y} - 2\hat{y}'y + y'y = \hat{\beta}'x'x\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'x'y + y'y$$

للحصول على النهاية الصغرى فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial\sum e_i^{\,2}}{\partial\hat{\beta}'} = 0 \Leftrightarrow 2(x'x)\hat{\beta} - 2x'y = 0$$

وبما أن رتبة (X) هي k فإن : $(x'x)$ مصفوفة مربعة $((k)\times(k))$ رتبتها k وتقبل معكوس $(x'x)^{-1}$.

ومنه: $\quad 2(x'x)\hat{\beta} - 2x'y = 0 \quad \Rightarrow (x'x)\hat{\beta} - x'y = 0$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(x'x)^{-1}$ لنحصل على : $\boxed{\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y}$ وهو تقدير لـ β.

$$(x'x) = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^{\;2} & \sum x_{1i}x_{2i} & .... & \sum x_{1i}x_{ki} \\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^{\;2} & .... & \sum x_{2i}x_{ki} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ \sum x_{ki}x_{1i} & \sum x_{ki}x_{2i} & ..... & \sum x_{ki}^{\;2} \end{pmatrix}$$

و

$$(x'y) = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \\ .... \\ .... \\ \sum x_{ki}y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ . \\ \hat{B}_K \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^{\;2} & \sum x_{1i}x_{2i} & .... & \sum x_{1i}x_{ki} \\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^{\;2} & .... & \sum x_{2i}x_{ki} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ \sum x_{ki}x_{1i} & \sum x_{ki}x_{2i} & ..... & \sum x_{ki}^{\;2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \\ .... \\ .... \\ \sum x_{ki}y_i \end{bmatrix}$$

يمكننا ايجا عناصر هذه المصفوفة انطلاقا من المعطيات الأصلية كما يلي :

$$\sum x_{1i}y_i = \sum X_{1i}Y_i - \frac{\sum X_{1i}\sum Y_i}{n}$$

$$\sum x_{2i}y_i = \sum X_{2i}Y_i - \frac{\sum X_{2i}\sum Y_i}{n}$$

$$\sum x_{1i}x_{2i} = \sum X_{1i}X_{2i} - \frac{\sum X_{1i}\sum X_{2i}}{n}$$

$$\sum x_{1i}^2 = \sum X_{1i}^2 - \frac{(\sum X_{1i})^2}{n}$$

$$\sum x_{2i}^2 = \sum X_{2i}^2 - \frac{(\sum X_{2i})^2}{n}$$

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}$$

حالة خاصة في المعطيات المركزة:

المصفوفة $(x'x)$ بالانحرافات وباستخدام المعطيات الأصلية هي على الشكل التالي:

$$(x'x) = \begin{pmatrix} \sum(X_{1i}-\overline{X}_1)^2 & \sum(X_{1i}-\overline{X}_1)(X_{2i}-\overline{X}_2) & \cdots & \sum(X_{1i}-\overline{X}_1)(X_{ki}-\overline{X}_k) \\ \sum(X_{2i}-\overline{X}_2)(X_{1i}-\overline{X}_1) & \sum(X_{2i}-\overline{X}_2)^2 & \cdots & \sum(X_{2i}-\overline{X}_2)(X_{ki}-\overline{X}_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum(X_{ki}-\overline{X}_k)(X_{1i}-\overline{X}_1) & \sum(X_{ki}-\overline{X}_k)(X_{2i}-\overline{X}_2) & \cdots & \sum(X_{ki}-\overline{X}_k)^2 \end{pmatrix}$$

أي أن:

$$(x'x) = n\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum(X_{1i}-\overline{X}_1)^2 & \frac{1}{n}\sum(X_{1i}-\overline{X}_1)(X_{2i}-\overline{X}_2) & \cdots & \frac{1}{n}\sum(X_{1i}-\overline{X}_1)(X_{ki}-\overline{X}_k) \\ \frac{1}{n}\sum(X_{2i}-\overline{X}_2)(X_{1i}-\overline{X}_1) & \frac{1}{n}\sum(X_{2i}-\overline{X}_2)^2 & \cdots & \frac{1}{n}\sum(X_{2i}-\overline{X}_2)(X_{ki}-\overline{X}_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n}\sum(X_{ki}-\overline{X}_k)(X_{1i}-\overline{X}_1) & \frac{1}{n}\sum(X_{ki}-\overline{X}_k)(X_{2i}-\overline{X}_2) & \cdots & \frac{1}{n}\sum(X_{ki}-\overline{X}_k)^2 \end{pmatrix}$$

أي أن $(x'x)$ تصبح على الشكل التالي:

$$(x'x) = n\begin{pmatrix} V(X_1) & COV(X_1, Y) & \cdots & COV(X_K, Y) \\ COV(Y, X_1) & V(X_2) & \cdots & COV(X_2, Y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ COV(Y, X_k) & COV(X_K, Y) & \cdots & V(X_K) \end{pmatrix}$$

المصفوفة $(x'y)$ بالانحرافات وباستخدام المعطيات الأصلية هي على الشكل التالي:

$$(x'y)=\begin{bmatrix}\sum\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)\\ \sum\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sum\left(X_{ki}-\overline{X}_k\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)\end{bmatrix}$$

أي أن:

$$(x'y)=\begin{bmatrix}\frac{1}{n}\sum\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)\\ \frac{1}{n}\sum\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{1}{n}\sum\left(X_{ki}-\overline{X}_k\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)\end{bmatrix}$$

اي أن $(x'y)$ تصبح على الشكل التالي:

$$(x'y)=n\begin{bmatrix}COV\ (X_1,\mathrm{Y})\\ COV\ (X_2,\mathrm{Y})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ COV\ (X_K,\mathrm{y})\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{B}}_1\\ \widehat{\boldsymbol{B}}_2\\ \cdots\\ \widehat{\boldsymbol{B}}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v(X_1) & cov(X_1،X_2) & \cdots & cov(X_1،X_K)\\ cov(X_2،X_1) & v(X_2) & \cdots & cov(X_2،X_K)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ cov(X_K،X_1) & cov(X_K،X_2) & \cdots & v(X_K)\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}cov(X_1،Y_t)\\ cov(X_2،Y_t)\\ \cdots\\ cov(X_K،Y_t)\end{pmatrix}$$

أما $\hat{\beta}_0$ فيحسب بالطريقة التالية:

$$\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{X}_1-\hat{\beta}_2\overline{X}_2-\hat{\beta}_3\overline{X}_3-\ldots\ldots\ldots\ldots-\hat{\mathrm{B}}_K\overline{X}_K$$

مثال تطبيقي :

2- تحليل الانحدار والتنبؤ بسلوك الظواهر المالية

الجدول التالي يتضمن البيانات الخاصة بالاستيراد كمتغير تابع (Y) والدخل الوطني كمتغير مستقل أول (X_1) وأسعار الاستيراد كمتغير مستقل ثاني (X_2) في إحدى الدول للفترة من : 2002 -2010.

X_2 السعر	X_1 الدخل الوطني	Y_i الاستيراد
02	3	20
02	5	22
02.5	6	23
3.5	7	24
4.5	8	26
06	9	29
7	11	30
10	12	34
10.5	13	37
12	16	40
$\sum X_{2i} = 60$	$\sum X_{1i} = 90$	$\sum Y_i = 285$

1*أوجد المعادلة المقدرة باستخدام المعطيات العادية والمركزة " الانحرافات".

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

بالتطبيق العددي نتحصل على :

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 10 & 90 & 60 \\ 90 & 954 & 671 \\ 60 & 67 & 486 \end{bmatrix}$$

$$(X'Y)=\begin{bmatrix}\sum Y_i\\ \sum X_{1i}Y_i\\ \sum X_{2i}Y_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}285\\2804\\1935\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}(X'Y)=\begin{bmatrix}10 & 90 & 60\\ 90 & 954 & 671\\ 60 & 671 & 486\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}285\\2804\\1935\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15.99\\0.65\\1.11\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{Y}_i=15.99+0.65X_{1i}+1.11X_{2i}}$$

- <u>تقدير المعلمات باستخدام الانحرافات</u> :

$$y_i=(Y_i-\bar{Y})$$

$$x_{1i}=(X_{1i}-\bar{X}_1)$$

$$x_{2i}=(X_{2i}-\bar{X}_2)$$

$$(x'x)=\begin{bmatrix}\sum x_{1i}{}^2 & \sum x_{1i}x_{2i}\\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}{}^2\end{bmatrix}$$

$$(x'y)=\begin{bmatrix}\sum y_i\\ \sum x_{1i}y_i\end{bmatrix}$$

$$\sum x_{1i}y_i=\sum X_{1i}Y_i-\frac{\sum X_{1i}\sum Y_i}{n}=239$$

$$\sum x_{2i}y_i=\sum X_{2i}Y_i-\frac{\sum X_{2i}\sum Y_i}{n}=225$$

$$\sum x_{1i}x_{2i}=\sum X_{1i}X_{2i}-\frac{\sum X_{1i}\sum X_{2i}}{n}=131$$

$$\sum x_{1i}{}^2=\sum X_{1i}{}^2-\frac{\left(\sum X_{1i}\right)^2}{n}=144$$

$$\sum x_{2i}{}^2=\sum X_{2i}{}^2-\frac{\left(\sum X_{2i}\right)^2}{n}=126$$

$$\sum y_i{}^2=\sum Y_i{}^2-\frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}=1274$$

$$(x'y)=\begin{bmatrix}239\\225\end{bmatrix}\quad,\quad(x'x)=\begin{bmatrix}144 & 131\\131 & 126\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(x'x)^{-1}(x'y)=\begin{bmatrix}144 & 131\\131 & 126\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}239\\225\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.65\\1.11\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}_0 = Y - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 \quad = 15.99$$

لدينا :

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \cdots \\ \hat{B}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(X_1) & cov(X_1،X_2) & \cdots & cov(X_1،X_K) \\ cov(X_2،X_1) & v(X_2) & \cdots & cov(X_2،X_K) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ cov(X_K،X_1) & cov(X_K،X_2) & \cdots & v(X_K) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} cov(X_1،Y_t) \\ cov(X_2،Y_t) \\ \cdots \\ cov(X_K،Y_t) \end{pmatrix}$$

في مثالنا لدينا متغيرتين مستقلتين وبالتالي:

$$= \left(n \begin{pmatrix} V(X_1) & COV(X_1, X_2) \\ COV(X_2, X_1) & V(X_2) \end{pmatrix} \right)^{-1} n \begin{pmatrix} COV(X_1, Y) \\ COV(X_2, Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$$

أي أن :

$$= \begin{pmatrix} V(X_1) & COV(X_1, X_2) \\ COV(X_2, X_1) & V(X_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} COV(X_1, Y) \\ COV(X_2, Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$$

لدينا :

$$V(X_1) = \frac{1}{n}\sum x_{1i}^2 = \frac{1}{n}\sum X_{1i}^2 - \frac{\left(\sum X_{1i}\right)^2}{n^2} = \frac{144}{10} = 14.4$$

$$V(X_2) = \frac{1}{n}\sum x_{2i}^2 = \frac{1}{n}\sum X_{2i}^2 - \frac{\left(\sum X_{2i}\right)^2}{n^2} = \frac{126}{10} = 12.6$$

$$COV(X_1, Y) = \frac{1}{n}\sum x_{1i} y_i = \frac{1}{n}\sum X_{1i} Y_i - \frac{\sum X_{1i} \sum Y_i}{n^2} = \frac{239}{10} = 23.9$$

$$COV(X_2, Y) = \frac{1}{n}\sum x_{2i} y_i = \frac{1}{n}\sum X_{2i} Y_i - \frac{\sum X_{2i} \sum Y_i}{n^2} = \frac{225}{10} = 22.5$$

$$COV(X_1, X_2) = \frac{1}{n}\sum x_{1i} x_{2i} = \frac{1}{n}\sum X_{1i} X_{2i} - \frac{\sum X_{1i} \sum X_{2i}}{n^2} = \frac{131}{10} = 13.1$$

بالتعويض نجد :

$$= \begin{pmatrix} 14.4 & 13.1 \\ 13.1 & 12.6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 23.9 \\ 22.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 1.11 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_0 = Y - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 \quad = 15.99$$

- **شرح المعنى الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة :**

تشير التقديرات إلى وجود علاقة طردية بين الاستيراد (Y) والدخل الوطني (X_1) فكل زيادة في الدخل الوطني بمقدار وحدة واحدة تزداد الاستيراد (Y) ب 065 وحدة مع ثبات أثر السعر (X_2) .

كما تشير المعادلة إلى وجود علاقة طردية بين السعر (X_2) والاستيراد (Y) فزيادة السعر (X_2) بوحدة واحدة تؤدي إلى زيادة الاستيراد (Y) ب 1.11 وحدة مع ثبات أثر الدخل الوطني (X_1). وهذا مخالف للنظرية الاقتصادية لأن النظرية الاقتصادية تشير إلى علاقة عكسية بين السعر والاستيراد.

مثال 01: لتكن لذيك المعطيات التالية والخاصة بالعلاقة بين متغير تابع Y متغيرين مستقلين X_1 و X_2 و كما يبينه الجدول التالي:

الفترة	Y	X_1	X_2
1	50	10	02
2	63	15	08
3	61	16	03
4	50	08	03
5	56	15	02
6	72	20	06
7	62	18	03
8	60	15	02
9	54	12	01
10	70	17	10

المطلوب:

- قدر معلمات النموذج المتعدد من الشكل $Y_t = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{1t} + \hat{B}_2 X_{2t}$
- إعطاء التفسير الإحصائي لهذه المعلمات المقدرة
- احسب مصفوفة التباين المشترك
- احسب تباين المعلمات المقدرة $v(\hat{B}_0)$ و $v(\hat{B}_0)$ و $v(\hat{B}_0)$
- احسب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة $\delta(\hat{B}_0)$ و $\delta(\hat{B}_0)$ و $\delta(\hat{B}_0)$
- احسب معامل التحديد ومعامل الارتباط مع اعطاء التفسير الاحصائي لكل منهما

- ادرس المعنوية الكلية لهذا النموذج بالاعتماد على اختبار فيشر عند مستوى معنوية 5 %
- ادرس معنوية معلمات هذا النموذج بالاعتماد على اختبار ستودنت عند مستوى معنوية 5 %

الحل:

- حساب معلمات النموذج المتعدد

$$\hat{B} = (\acute{X}X)^{-1}\acute{X}Y$$

حساب: $(\acute{X}X)^{-1}$

$$\acute{X}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 10 & 15 & 16 & \cdots & 17 \\ 2 & 8 & 3 & \cdots & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 1 & 15 & 8 \\ 1 & 16 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 17 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 146 & 40 \\ 146 & 2252 & 628 \\ 40 & 628 & 240 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\acute{X}X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.898 & -0.129 & 0.021 \\ -0.129 & 0.01 & -0.006 \\ 0.021 & -0.006 & 0.016 \end{pmatrix}$$

حساب $\acute{X}Y$ **:**

$$\acute{X}Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 10 & 15 & 16 & \cdots & 17 \\ 2 & 8 & 3 & \cdots & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 63 \\ 61 \\ \vdots \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 598 \\ 8955 \\ 2541 \end{pmatrix}$$

حساب $\hat{B}$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1.898 & -0.129 & 0.021 \\ -0.129 & 0.01 & -0.006 \\ 0.021 & -0.006 & 0.016 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 598 \\ 8955 \\ 2541 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34.014 \\ 1.47 \\ 1.049 \end{pmatrix}$$

أي أن:

$$\boxed{Y_t = 34.014 + 1.479X_1 + 1.049X_2}$$

- **التفسير الإحصائي لنموذج الانحدار المتعدد**

– معامل الانحدار $\hat{B}_0$ يساوي 34.014 : أي في حالة عدم وجود تأثير معنوي لـ X_1 و X_2 على Y فان قيمة هذا الاخير سوف تقدر بـ 340.14.

- معامل الانحدار $\hat{B}_1$ يساوي 1.479 أي أن في حالة تغير $_1$ بوحدة واحدة ومع ثبات X_2 فان Y يتغير بـ 1.479

- معامل الانحدار $\hat{B}_2$ يساوي 1.049 أي أن في حالة تغير X_2 بوحدة واحدة ومع ثبات X_1 فان Y يتغير بـ 1.049

•حساب مصفوفة التباين المشترك

$$mvc = \widehat{\delta_\varepsilon}^2 (\acute{X}X)^{-1}$$

$$\text{mvc} = \frac{\acute{e}e}{n-k-1}\begin{pmatrix} 1.898 & -0.129 & 0.021 \\ -0.129 & 0.01 & -0.006 \\ 0.021 & -0.006 & 0.016 \end{pmatrix}$$

حساب خطا التباين $\widehat{\delta_\varepsilon}^2$

$$\widehat{\delta_\varepsilon}^2 = \frac{\acute{e}e}{n-k-1} = \frac{\sum(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-k-1}$$

$$\sum(y_i-\hat{y}_i)^2 = \sum(y_i-\bar{y})^2 - \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2$$

حساب التباين الإجمالي: $\boldsymbol{\sum(y_i-\bar{Y})^2}$

$$\sum(y_i-\bar{Y})^2 = \sum Y^2 - n(\bar{Y})^2 = 36270 - 10(59.8)^2 = 509.6$$

حساب التباين المفسر: $\boldsymbol{\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2}$

$$\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \hat{\acute{B}}\,\acute{X}Y - n(\bar{Y})^2$$

$$\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = (34.014 \quad 1.479 \quad 1.049)\begin{pmatrix} 598 \\ 8955 \\ 2541 \end{pmatrix} - 10(59.8)^2 = 489.926$$

حساب التباين الغير المفسر: $\boldsymbol{\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2}$

$$\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = 509.6 - 489.926 = 19.67$$

ومنه الخطأ المعياري يساوي:

$$\widehat{\delta_\varepsilon}^2 = \frac{\acute{e}e}{n-k-1} = \frac{19.674}{10-2-1} = 2.810$$

وبالتعويض نحصل على مصفوفة التباين المشترك mvc

$$mvc = 2.810 \times \begin{pmatrix} 1.898 & -0.129 & 0.021 \\ -0.129 & 0.01 & -0.006 \\ 0.021 & -0.006 & 0.016 \end{pmatrix}$$

- حساب تباين والانحراف المعياري للمعلمات المقدرة:

$$v(\hat{B}_0) = 2.810 \times 1.898 = 5.33 \quad \Rightarrow \hat{\delta}_{B_0} = \sqrt{v(\hat{B}_0)} = 2.30$$

$$v(\hat{B}_1) = 2.810 \times 0.01 = 0.0281 \quad \Rightarrow \hat{\delta}_{B_1} = \sqrt{v(\hat{B}_0)} = 0.167$$

$$v(\hat{B}_2) = 2.810 \times 0.016 = 0.044 \quad \Rightarrow \hat{\delta}_{B_2} = \sqrt{v(\hat{B}_0)} = 0.209$$

- حساب معامل التحديد ^{2}

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\hat{\acute{B}}\,\acute{X}Y - n(\bar{Y})^2}{\sum Y^2 - n(\bar{Y})^2}$$

$$R^2 = \frac{(34.014 \quad 1.479 \quad 1.049)\begin{pmatrix} 598 \\ 8955 \\ 2541 \end{pmatrix} - 10(59.8)^2}{36270 - 10(59.8)^2} = \frac{489.926}{509.6} = 0.961$$

أي أن 96 % من تغير المتغير التابع y يرجع الى تغير المتغيرات المستقلة X_1 و X_2 والنسبة المتبقية والمقدرة بحوالي 4 % تعود إلى عوامل أخرى لم تدرج في هذا النموذج.

- حساب معامل الارتباط r

$$r = \sqrt{R^2} = \sqrt{0961} = 0.98$$

- دراسة المعنوية الكلية للنموذج

$$\begin{cases} H_0 : B_0 = B_1 = B_2 = 0 \\ H_1 : B_0 \neq B_1 \neq B_2 \neq 0 \end{cases}$$

ولاختبار هذه الفرضية نستعمل إحصائية فيشر حيث:

$$F_{Cal} = \frac{\frac{R^2}{K-1}}{\frac{1-R^2}{n-K-1}} \rightarrow F^{\propto\%}_{(k-1\,,n-k-1)}$$

$$F_{cal} = \frac{\frac{0.961}{3-1}}{\frac{1-0.961}{10-3}} = \frac{0.4805}{0.0056} = 85.803$$

$$F^{\propto\%}_{(k-1\,,n-k-1)} = F^{5\%}_{(2,7)} = 4.74$$

$$F_{cal} = 85.803 > F^{5\%}_{(2,7)} = 4.74$$

ومنه نقول توجد معلمة على الأقل تختلف عن الصفر أي أننا نقبل الفرضية البديلة H_1 ونرفض الفرضية الصفرية H_0

- **دراسة معنوية المعلمات المقدرة**

معنوية $\hat{B}_0$

$$\begin{cases} H_0: B_0 = 0 \\ H_1: B_0 \neq 0 \end{cases}$$

ولاتخاذ القرار نقوم بحساب احصائية ستودنت والتي تعطى بالصيغة التالية

$$t_{cal} = \frac{\hat{B}_0 - B_i}{\sqrt{v(\hat{B}_0)}} = \frac{B_0}{\delta(\hat{B}_0)} = \frac{34.014}{2.30} = 14.728$$

$$t_{cal} > t^{\propto\%}_{\text{tab}(7)} = 2.365$$

ومنه نقبل الفرضية H_1 اي ان $\hat{B}_0$ معنوي

معنوية $\hat{B}_1$

$$\begin{cases} H_0: B_1 = 0 \\ H_1: B_1 \neq 0 \end{cases}$$

ولاتخاذ القرار نقوم بحساب احصائية ستودنت والتي تعطى بالصيغة التالية

$$t_{cal} = \frac{\hat{B}_1 - B_1}{\sqrt{v(\hat{B}_1)}} = \frac{B_0}{\delta(\hat{B}_1)} = \frac{1.479}{0.167} = 8.823$$

$$t_{cal} > t^{\propto\%}_{\text{tab}(7)} = 2.365$$

ومنه نقبل الفرضية H_1 اي ان $\hat{B}_1$ معنوي

معنوية $\hat{B}_2$

$$\begin{cases} H_0: B_2 = 0 \\ H_1: B_2 \neq 0 \end{cases}$$

ولاتخاذ القرار نقوم بحساب إحصائية ستودنت والتي تعطى بالصيغة التالية

$$t_{cal} = \frac{\hat{B}_2 - B_2}{\sqrt{v(\hat{B}_2)}} = \frac{B_2}{\delta(\hat{B}_2)} = \frac{34.014}{2.30} = 14.728$$

$$t_{cal} > t_{\text{tab}(7)}^{\propto\%} = 2.365$$

ومنه نقبل الفرضية H_1 اي ان $\hat{B}_0$ معنوي

4.3 الخصائص الإحصائية للمعالم المقدرة:

1.4.3 التوقع:

لدينا: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$..............01

و أيضا: $Y = X\beta + \varepsilon$

بتعويض قيمة Y في المعادلة 01 نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'[X\beta + \varepsilon] = (X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon \Rightarrow \hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon$$

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon \text{..............................02}$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1} X' E(\varepsilon) \quad / \quad E(\varepsilon) = 0$$

نتحصل على: $\boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$

نستنتج أن $\hat{\beta}$ المحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى مقدرة غير متحيزة.

حسب نظرية " Gausse – Marcov" والتي تقول من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية "OLS" أفضل مقدرات خطية غير متحيزة "BLUE " حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى.

تتضمن هذه النظرية خاصية أقل تباين للمقدرات ويمكن البرهنة عليها بعد إيجاد تباينات المقدرات كما يلي:

2.4.3 تباين المقدرات:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[\left(\hat{\beta} - \beta\right)\left(\hat{\beta} - \beta\right)'\right] \text{........................03}$$

لدينا: من المعادلة رقم 02 نجد:

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1} X'\varepsilon$$

نعوض $\hat{\beta} - \beta$ في المعادلة رقم 03 نجد:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[\left((X'X)^{-1} X'\varepsilon\right)\left((X'X)^{-1} X'\varepsilon\right)'\right]$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[\left(X'X\ \right)X'\,\varepsilon\varepsilon'\,X\left(X'X\right)^{-1}\right]$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \left[\left(X'X\ \right)X'\,E\left(\varepsilon\varepsilon'\right)X\left(X'X\right)^{-1}\right]..................04$$

لدينا :

$$\Omega_{\varepsilon} = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_{\varepsilon}^{2} I_{n}$$

بتعويض هذه العلاقة في المعادلة رقم : 04 نجد:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \left[\left(X'X\right)X'\sigma^{2}{}_{\varepsilon}I_{n}X\left(X'X\right)^{-1}\right]$$

نتحصل على:

$$\boxed{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^{2}\left(X'\,X\right)^{-1}}$$

حيث σ_{ε}^{2}: تباين الحد العشوائي.

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك "Variance –CovarianceMatrix" للمعالم المقدرة، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين المعالم المقدرة ، بينما العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) التباين المشترك والترابط بين أي إثنين من هاته المعالم المقدرة.

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \operatorname{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & .... & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_K) \\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & .... & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_K) \\ . & . & .... & . \\ Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_1) & .... & Var(\hat{\beta}_K) \end{bmatrix}$$

من المصفوفة أعلاه يمكن إستنتاج مايلي:

$$Var\ \left(\hat{\beta}\right) = diag\ \ \Omega_{\hat{\beta}}$$

أي أن :

$$Var\ \ \left(\hat{\beta}\ \right) = diag\ \ \ \sigma_{\varepsilon}^{2}\ \left(X'\ X\right)^{-1}$$

أي أن :

$$Var\ \ \left(\hat{\beta}\ \right) = \sigma_{\varepsilon}{}^{2}\ diag\ \ \left(X'X\right)^{-1}$$

وبالتالي فإن تباين أي عنصر من عناصر $\hat{\beta}$ هوعبارة عن حاصل ضرب قيمة $\sigma_{\varepsilon}{}^{2}$ بما يقابلها من العناصر الواقعة على قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$، كما أن قيمة التباين المشترك بين أي اثنين من

عناصر $\hat{\beta}$ هوعبارة عن حاصل ضرب ${\sigma_\varepsilon}^2$ بالعنصر المقابل لها والواقع خارج نطاق القطر للمصفوفة $(X'X)^{-1}$.

يمكن أن نبرهن عن هذا التباين $\Omega_{\hat{\beta}}$ هو الأقل بحساب نهايته عندما يكون n كبير نسبيا :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} = \sigma^2{}_\varepsilon \frac{n}{n} (X'X)^{-1} = \frac{\sigma^2{}_\varepsilon}{n} \left(\frac{1}{n} X'X \right)^{-1}$$

إذا كانت الفرضيتين الرابعة والخامسة محققتين فإن :

$$\Omega_{\hat{a}} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} \left(\frac{X'X}{n} \right)^{-1} \Longrightarrow \operatorname{Lim} \Omega_{\hat{a}} = 0 \text{ si } n \longrightarrow \infty$$

تباين المقدرات باستخدام المعطيات المركزة:

يمكننا إيجاد مصفوفة التباين والتباين المشترك باستخدام المعطيات المركزة كما يلي:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_\varepsilon^2 (x'x)^{-1}$$

فلنأخذ مثالا لنموذج متكون من متغيرتين مستقلتين في النموذج

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

$\Omega_{\hat{\beta}}$ تكتب على الشكل التالي:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = {\sigma_\varepsilon}^2 \begin{bmatrix} \sum {x_{1i}}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} \\ \sum x_{1i} x_{2i} & \sum {x_{2i}}^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \operatorname{var}(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

نلاحظ من مصفوفة التباين والتباين المشترك للمقدرات بالنحرافات أنها لا تتضمن تباين الحد الثابت $Var(\hat{\beta}_0)$ كما أنها لا تتضمن التباين المشترك للحد الثابت مع أي ميل حدي $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_i)\ i = 1,2,$

نستطيع أن نستخرج تباين الحد الثابت بكل سهولة من العلاقة الآتية:

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_e^2 \left[\bar{X}'(x'x)^{-1} \bar{X} + \frac{1}{n} \right]$$

$\overline{X}'$ منقول مصفوفة المتوسطات الحسابية في حالة متغيرتين مستقلتين: $\overline{X}'=\left(\overline{X}_1,\overline{X}_2\right)$ و $\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{X}_1\\ \overline{X}_2\end{pmatrix}$

خاصية الاتساق:

بما أن $\hat{\beta}$ تحقق الشروط :

$$E(\hat{\beta})=\beta$$
$$\lim_{n\to\infty}\Omega_{\hat{\beta}}=0$$

فإن المقدرات $\hat{\beta}$ هي مقدرات متسقة للمعالم β

5.3 تقدير تباين الأخطاء σ_ε^2 :

إحدى فرضيات النموذج هي $E(\varepsilon\varepsilon')=\Omega_\varepsilon=\sigma^2 I_n$ وبما أن σ^2 غير معروف، فينبغي تقديره:

$$\hat{\varepsilon}=Y-X\hat{\beta}=X\beta+\varepsilon-X\hat{\beta}=\varepsilon-X(\hat{\beta}-\beta)=\varepsilon-X(X'X)^{-1}X'\varepsilon=(I_n-X(X'X)^{-1}X')\varepsilon$$

نضع : $M_X=(I_n-X(X'X)^{-1}X')$، حيث M_X *تسمى المصفوفة الدورية* أي :

$$M_X=M_X'M_X=M_X^2=M'$$

بالإضافة إلى ذلك :

$$M_X X=0$$

ومنه: $e'e=e'M_X'M_Xe$ أي : $e'e=e'M_Xe$

ندخل التوقع الرياضي على الطرفين : $E(e'e)=E(e'M_Xe)$

ويجب الملاحظة أن أثر $e'e$ يساوي أثر $e'Me$، ونعلم أيضا أن أثر (AB)=أثر (BA).

يكون لدينا إذن : أثر $(e'Me)$=أثر $(ee'M)$

$$E(ee')=E(ee')Tr(M_X)$$

نعلم أن: $E(ee')=\sigma^2$ وعليه: $E(ee')=\sigma^2\{Tr(I_n)-Tr(X(X'X)^{-1}X')\}$

ومنه :

$$E(e'e)=\sigma^2(n-k-1)$$

حيث : $Tr(X(X'X)^{-1}X')=k+1$; $Tr(I_n)=n$

لكي نحصل على تقدير غير متحيز لـ σ^2 يكفي قسمة العبارة على $(n-k-1)$:

$$E\left(\frac{e'e}{n-k-1}\right)=\sigma^2$$

في حالة الانحدار المتعدد حيث هناك $k+1$ معلم للتقدير و n عدد المشاهدات، وهذا يُعطي عدد درجات الحرية $n-k-1$، إذن :

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}$$

6.3 اختبار جودة التوفيق والارتباط:

1.6.3 معامل التحديد R^2 : Multiple Coefficient of determination

ويعد مؤشر أساس في تقييم مدى معنوية العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات المستقلة (X_k) حيث : ($k=1,2,3.......k$) ، بعبارة أخرى هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع . ويمكن حسابه كالأتي:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT - SCR}{SCT} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$SCE = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum \hat{Y}_i - n\bar{Y}^2$$

$$\sum \hat{Y}_i - n\bar{Y}^2 = \hat{Y}'\hat{Y} - n\bar{Y}^2$$

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

$$\hat{Y}' = \hat{\beta}'X'$$

$$\hat{Y}'Y = (\hat{\beta}'X')X\hat{\beta}$$

لدينا :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{Y}'Y = \beta'X'\ X(X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\hat{Y}'Y = \hat{\beta}'(X'Y)$$

أي أن :

$$SCE = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{Y}'Y - n\bar{Y}^2 = \hat{\beta}'(X'Y) - n\bar{Y}^2$$

$$SCT = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$

$$\frac{SCE = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{Y}'Y - n\bar{Y}^2 = \hat{\beta}'(X'Y) - n\bar{Y}^2}{SCT = \sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2}$$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2}$$
$$R^2 = 1 - \frac{e'e}{Y'Y - n\overline{Y}^2}$$

SCT : تمثل الانحرافات الكلية .

SCE : تمثل الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار .

$e'e$: تمثلا الانحرافات غير الموضحة .

وبما أن معامل التحديد R^2 عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قيل خط الانحدار إلى الانحرافات الكلية " Total variation " ، فانه يمثل نسبة مجموع مربعات التغير في المتغيرات المستقلة إلى مجموع المربعات الكلية :

$$\boldsymbol{R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2}}$$
$$\boldsymbol{R^2 = 1 - \frac{e'e}{Y'Y - n\overline{Y}^2}}$$

ملاحظة : $0 \leq R^2 \leq 1$

- عندما يكون R^2 قريب من الواحد فهذا يدل على جودة التوفيق وقوة القدرة التفسيرية للنموذج والعكس صحيح.
- إذا كان: "SCR=0" فهذا يعني أن النموذج هو عبارة عن خط مستقيم ولا توجد أخطاء في النموذج وهي حالة نادرة الحدوث.
- أما إذا كان: " SCE=0" فهذا يعني ان المتغيرات المستقلة لا تفسر إطلاقا المتغير التابع وهي حالة نادرة الحدوث ايضا.

يمكن إيجاد معامل التحديد بالانحرافات كما يلي:

حيث : $\forall i = 1.......n \qquad x_i = X_i - \overline{X} \quad , \quad y_i = Y_i - \overline{Y}$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'x'y}{y'y} = \frac{\hat{\beta}'x'y}{\sum y^2}$$

<u>إيجاد معامل التحديد المصحح</u> $\overline{R}^2$:

إن إضافة متغيرات مستقلة جديدة إلى المعادلة يؤدي إلى رفع قيمة R^2، وذلك لثبات قيمة المقام وتغير قيمة البسط بمقدار $(\hat{\beta}'X'Y)$ غير أن الاستمرار بإضافة المتغيرات المستقلة سيؤدي إلى انخفاض درجات الحرية $(n-k-1)$، مما يتطلب استخراج معامل التحديد المعدل أو المصحح $\bar{R}^2$ على النحو الآتي:

$$\bar{R}^2 = \left[1 - \frac{SCR \ / \ n-k-1}{SCT \ / \ n-1}\right]$$

$$\bar{R}^2 = \left[1 - \left(\frac{SCR}{SCT}\right)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

$$\bar{R}^2 = \left[1-\left(1-R^2\right)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

نلاحظ أن: $R^2 \geq \bar{R}^2$ إذا كانت

$k>1$

يمكن أن نلاحظ أنه عندما يكون عدد المشاهدات n كبير نسبيا فإن R^2 يؤول إلى $\bar{R}^2$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}^2 = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n-k-1}\left(1-R^2\right) = R^2$$

نتيجة : إذا كان حجم العينة n كبيرا، فإن R^2 و $\bar{R}^2$ يقتربان في قيمتهما، لكن في العينات الصغيرة، إذا كان عدد المتغيرات المستقلة كبيرا بالمقارنة مع حجم العينة، فإن $\bar{R}^2$ يقل بكثير على R^2، ويمكن أن يأخذ قيما سالبة، في هذه الحالة يجب شرحه على أساس أن قيمته تساوي الصفر.

مثال : في المثال التطبيقي السابق أوجد :

2*اوجد الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة باستخدام المعطيات الأصلية والانحرافات:

* **<u>حساب الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة</u>** .

$$\boxed{Var\left(\hat{\beta}\right) = diag\Omega_{\hat{\beta}}}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \operatorname{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & Cov\left(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2\right) \\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

لدينا : $\boxed{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^2\left(X'X\right)^{-1}}$ و $\boxed{\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}}$

إيجاد $\sum e^2{}_i$:

لدينا : $\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$

$$SCT = \sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = 408.50$$

$$SCT = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2 = 408.5$$

$$SCE = \sum_I \left(\hat{Y} - \bar{\hat{Y}}\right)^2 = \hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2 = 405.1$$

$$SCE = (15.99 \quad 0.65 \quad 1.11)\begin{pmatrix} 285 \\ 2804 \\ 1935 \end{pmatrix} - 10\left(\frac{285}{10}\right)^2 = 405.1$$

$$SCR = \sum e^2{}_i = SCT - SCE = 3.4$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum e^2{}_i}{n-k-1} = \frac{3.4}{10-2-1} = 0.48$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e^2 (X'X)^{-1} = 0.48\begin{bmatrix} 10 & 90 & 60 \\ 90 & 954 & 671 \\ 60 & 671 & 486 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = 0.48\begin{bmatrix} 1.36 & -0.35 & 0.32 \\ -0.35 & 0.12 & -0.13 \\ 0.32 & -0.13 & 0.14 \end{bmatrix}$$

- <u>حساب الانحراف المعياري للمقدرات :</u>

$$Var(\hat{\beta}) = diag\Omega_{\hat{\beta}}$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = 0.48 * 1.36 = 0.65 \qquad \sigma_{\hat{\beta}0} == \sqrt{0.65} = 0.80$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = 0.48 * 0.12 = 0.06 \qquad \sigma_{\hat{\beta}1} == \sqrt{0.06} = 0.24$$

$$\sigma_{\hat{\beta}2} = \sqrt{0.07} = 0.26 \qquad Var(\hat{\beta}_1) = 0.48 * 0.15 = 0.07$$

- **حساب الانحراف المعياري للمفدرات " بطريقة الانحرافات :**

بالانحرافات مصفوفة التباين والتباين المشترك على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

لدينا: $\boxed{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^2 (x'x)^{-1}}$

إيجاد $\sum e^2{}_i$:

لدينا : $\sum_i y_i{}^2 = \sum_i \hat{y}^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$

$$SCT = \sum_i y_i{}^2 = 408.5$$

$$SCE = \sum_I \hat{y}^2 = \hat{\beta}'x'y = 405.1$$

$$SCR = \sum_i e_i{}^2 = SCT - SCR = 3.4$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}}$$

$$\sigma_e{}^2 = \frac{\sum e^2{}_i}{n-k-1} = \frac{3.4}{10-2-1} = 0.48$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e^2 (x'x)^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e{}^2 (x'x)^{-1} = \sigma_e{}^2 \begin{bmatrix} 144 & 131 \\ 131 & 126 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.06 \\ -0.06 & 0.07 \end{bmatrix}$$

- **حساب الانحراف المعياري للمفدرات :**

$$Var(\hat{\beta}) = diag\Omega_{\hat{\beta}}$$

$$\sigma_{\hat{\beta}1} == \sqrt{0.06} = 0.24 \qquad Var(\hat{\beta}_1) = 0.06$$

$$\sigma_{\hat{\beta}2} = \sqrt{0.07} = 0.26 \qquad Var(\hat{\beta}_2) = 0.06$$

- **حساب الانحراف المعياري للحد الثابت باستخدام الانحرافات :**

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_e^2 \left[\bar{X}'(x'x)^{-1}\bar{X} + \frac{1}{n} \right]$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}' = (\bar{X}_1, \bar{X}_2) = (9,6)$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_e^2 \left[\bar{X}'(x'x)^{-1}\bar{X} + \frac{1}{n} \right] = 0.48 \left[(9,6) \begin{pmatrix} 144 & 131 \\ 131 & 126 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} \right]$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = 0.65 \qquad \sigma_{\hat{\beta}0} == \sqrt{0.65} = 0.80$$

- **<u>إيجاد معامل التحديد مع التفسير</u>** R^2:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT - SCR}{SCT} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{405.1}{408.5} = 0.99$$

$$SCE = \hat{\beta}'(X'Y) - n\bar{Y}^2$$

$$SCE = (15.99 \quad 0.65 \quad 1.11) \begin{pmatrix} 285 \\ 2804 \\ 1935 \end{pmatrix} - 10\left(\frac{285}{10}\right)^2 = 405.1$$

$$SCT = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2 = 408.5$$

أو :

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{3.4}{408.5} = 0.99$$

<u>التفسير</u>: الاستيراد (Y) مفسر ب : 99% عن طريق الدخل الوطني (X_1) و السعر (X_2) وتبقى 01% تدخل ضمن هامش الخطأ وهي متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج أو أخطاء إرتكبناها أثناء القياس ، على العموم هو هامش قليل جدا دلالة على قوة النموذج التفسيرية.

- **<u>إيجاد معامل التحديد المصحح</u>** $\bar{R}^2$:

$$\bar{R}^2 = \left[1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k-1} \right]$$

$$\bar{R}^2 = \left[1 - (1 - 0.99)\frac{10-1}{10-2-1} \right] = 0.98$$

2.6.3 <u>معامل الارتباط الجزئي:Partial Correlation</u>

في بعض الظواهر والدراسات يوجد هناك عدد من المتغيرات (ثلاثة فأكثر) مرتبطة بعلاقة رياضية فيما بينها مثل: إنفاق أسرة يكون مرتبط بدخلها الشهري و عدد افرداها وكذلك حجم مبيعات سلعة معينة يرتبط بسعرها وحجم الدعاية لها وكذلك الفترة الزمنية للبيع ففي هذه الحالة، ولغرض حساب معامل الارتباط بين متغيرين اثنين في دراسة معينة مع وجود متغيرات أخرى نلجأ إلى حساب ما يسمى بالارتباط الجزئي .

الارتباط الجزئي هو: العلاقة الرياضية الصافية بين متغيرين اثنين فقط مع وجود متغيرات أخرى قيد الدراسة ويمكن حساب هذه العلاقة الرياضية من خلال معامل الارتباط الجزئي.

إن الفرق بينه وبين معامل الارتباط البسيط هو أن معامل بيرسون يستخرج العلاقة بين متغيرين اثنين لأي ظاهرة بدون يأخذ بنظر الاعتبار وجود متغيرات أخرى تؤثر في الظاهرة أو لا ، بينما معامل الارتباط الجزئي لا يأخذ بنظر الاعتبار وجود متغيرات أخرى تؤثر في الظاهرة فحسب وإنما يقوم باستبعاد أثرها لكي يستخرج الارتباط الصافي بين أي متغيرين.

1.2.6.3 حساب معامل الارتباط الجزئي

ليكن لدينا نموذج انحدار متكون من متغيرتين مستقلتين كالاتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_1, Y):

$$r_{(Y,x_1)}(X_2) = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_2}\right)\left(1-r^2_{x_1x_2}\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين X_2 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

r_{YX1} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (Y, X_1).

r_{YX2} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (Y, X_2).

r_{X1X2} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (X_1, X_2).

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_2, Y):

$$r_{(Y,x_2)}(X_1) = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_1}\right)\left(1-r^2_{X_1X_2}\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين X_1 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

2.2.6.3 خصائص معامل الارتباط الجزئي:

* إن قيمة معامل الارتباط الجزئي تتراوح بين $(1,-1)$

* تفسر قيمته كما تفسر قيمة معامل الارتباط البسيط.

* إن معامل الارتباط الجزئي لأي متغيرين تكون إشارته مماثلة لإشارة معامل الارتباط البسيط بينهما.

مثال تطبيقي :

إنطلاقا من المعطيات السابقة أوجد معامل الارتباط الجزئي (X_1,Y) مع تثبيت X_2 ثم أوجد معامل الارتباط الجزئي (X_2,Y) مع تثبيت X_1.

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_1,Y) :

$$r_{(Y,x_1)}(X_2)=\frac{r_{YX_1}-r_{YX_2}\,r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2{}_{Yx_2}\right)\left(1-r^2{}_{x_1x_2}\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين X_2 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

r_{YX1} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (Y,X_1).

r_{YX2} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (Y,X_2).

r_{X1X2} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (X_1,X_2).

$$r_{(Y,x_1)}=\frac{COV(Y,X_1)}{\sigma_Y\ \sigma_{X1}}=\frac{23.9}{\sqrt{40.85}\sqrt{14.4}}=0.98$$

$$r_{(Y,x_2)}=\frac{COV(Y,X_2)}{\sigma_Y\ \sigma_{X2}}=\frac{22.5}{\sqrt{40.85}\sqrt{12.6}}=0.99$$

$$r_{(X_1,X_2)}=\frac{COV(X_1,X_2)}{\sigma_{X1}\ \sigma_{X2}}=\frac{13.1}{\sqrt{14.4}\sqrt{12.6}}=0.97$$

$$r_{(Y,X_1)}(X_2)=\frac{r_{YX_1}-r_{YX_2}\,r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2{}_{Yx_2}\right)\left(1-r^2{}_{x_1x_2}\right)}}=\frac{0.98-0.99*0.97}{\sqrt{\left(1-0.99^2\right)\left(1-0.97^2\right)}}=0.57$$

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_2,Y):

$$r_{(Y,X_2)}(X_2)=\frac{r_{YX_2}-r_{YX_1}\,r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2{}_{YX_1}\right)\left(1-r^2{}_{x_1x_2}\right)}}=\frac{0.99-0.98*0.97}{\sqrt{\left(1-0.98^2\right)\left(1-0.97^2\right)}}=0.81$$

نلاحظ من النتائج المتحصل عليها أن المتغيرة X_2 اكثر مساهمة في تفسير Y من المتغيرة X_1

2-5- الاختبارات الاحصائية لنماذج الانحدار البسيط والمتعدد

2-5-1- اختبار الفرضيات لنماذج الانحدار البسيط

بمعرفة توزيع $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ يمكن إجراء اختبار الفرضيات الموضوعة حول معالم النموذج β_0 و β_1على التوالي. الاختبار الشائع جدا هو فرضية العدم H_0، وتقترح على العموم بأنه لا يوجد أثر على النموذج من قبل متغير مستقل ما، ونظرا إلى أن الباحثين يتمنون قبول النموذج، فإن فرضية العدم توضع عادة لإثبات رفضها إذا أمكن ذلك. ونأمل رفض H_0 بإيجاد القيمة التقديرية والتي تكون تختلف عن الصفر، حتى نقبل النموذج.

- اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم

قد يكون النموذج المبني من طرفنا صحيحا أو غير صحيح، و تثبت صحته من خلال اختباره، ويتم ذلك بواسطة فرض معلمة من معالم النموذج تساوي الصفر أو أي عدد آخر، وتسمى فرضية العدم H_0، وما دامت العلاقة بين Y و X قائمة على أساس النموذج الخطي، فإن انعدام هذه العلاقة يعني بأن خط انحدار المجتمع هو عبارة عن خط أفقي، أي $(H_0 : \beta_1 = 0)$ وبما أن الافتراض H_0 خاضع للاختبار، فإنه لا يكون بالضرورة صحيحا، الأمر الذي يتطلب منا وضع فرض بديل $H_1 : \beta_1 \neq 0$. وفي حالة معرفة إشارة β_1مسبقا من النظرية الاقتصادية فإن الافتراض البديل يكون $H_1 : \beta_1 > 0$ (أو $H_1 : \beta_1 < 0$)، وإذا طلب منا اختبار الفرضية :

$$H_0 : \beta_1 = 0 \text{ (فرضية العدم)}$$

ضد : $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

نكتب: $t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ وهي القيمة المحسوبة.

ما دمنا نختبر فرضية العدم، نكتب: $t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ ، حيث نقبل H_0 بمستوى معنوية $(\%\alpha)$ إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| \leq t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ ففي هذه الحالة، المعلم β_1ليس له معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر حيث $t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ مأخوذة من جدول التوزيع t (ستودنت) وتسمى بالقيمة المجدولة، ونرفض H_0 بمستوى معنوية $(\%\alpha)$ إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| > t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلم β_1 له معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر. نقوم بنفس الاختبار مع الثابتة β_0. إضافة إلى ذلك، عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n > 30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

- اختبار التوزيع *F* (اختبار المعنوية الكلية للنموذج)

إن اختبار معنوية (أثر) المتغير المستقل X_i $(H_0 : \beta_1 = 0)$ يمكن أن يكون في شكل توزيع *Fisher* :

$$F = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2}{\sum \hat{\varepsilon}_i^2 / (n-2)} = \frac{(n-2)\hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2}{RSS} \sim F_{1,n-2}$$

$$F = \frac{ESS/1}{RSS/(n-2)} \sim F_{1,n-2}$$

أو :

$$F = \frac{R^2/1}{(1-R^2)/(n-2)} = \frac{R^2}{(1-R^2)}.(n-2) \sim F_{1,n-2}$$

في توزيع *F*، نختبر انعدام كل المعالم في آن واحد ضد فرضية معنوية الميل. القيمة المجدولة لإحصائية Fisher في هذه الحالة تعتمد على درجتي حرية 1 (في البسط) و $n-2$ (في المقام).

2-5-2- اختبار الفرضيات لنماذج الانحدار المتعدد

- اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم

بإدخال قانون التوزيع الطبيعي المتعدد ونظرا إلى أن $\hat{\beta}$ هو دالة خطية لشعاع الأخطاء العشوائية، فإن هذا المتغير له صفة المتغير العشوائي ويتبع كذلك قانون التوزيع الطبيعي المتعدد

نضع:
$$A=(X'X)^{-1}X'$$

لدينا:
$$\hat{\beta}=\beta+A\varepsilon$$

ومنه فإن:
$$\hat{\beta}\sim N\left(\beta,\sigma_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}\right)$$

ثم لدينا بواقي المربعات الصغرى:
$$\hat{\varepsilon}=M_X\varepsilon$$

إذ أن:
$$\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}=\varepsilon' M_X\varepsilon$$

مع:
$$M_X=(I-X(X'X)^{-1}X')$$

ومنه:
$$\frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}=\frac{\varepsilon' M_X\varepsilon}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}=\frac{(n-k-1)\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}\sim\chi_{n-k-1}^{2}$$

مع الخاصية $M_X X=0$ يكون الشعاعان $\hat{\beta}$ و $\hat{\varepsilon}$ يتبعان التوزيع الطبيعي المتعدد ومستقلين عن بعضهما البعض، وبالتالي فهما شعاعان متعامدان حيث:

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\varepsilon},\hat{\beta}\right)=E\left[\hat{\varepsilon}\left(\hat{\beta}-\beta\right)'\right]=E[M_X\varepsilon\varepsilon' A']=\sigma_{\varepsilon}^{2}M_X A=0,\quad M_X X=0$$

ومنه نستنتج أن شعاع المقدرات $\hat{\beta}$ مستقل كذلك عن $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$، والذي يستلزم أن $\hat{\beta}$ موزع استقلاليا عن $\frac{RSS}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}$ أو $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$، ونكتب:

$$\hat{\beta}_j\sim N\left(\beta_j,\sigma_{\varepsilon}^{2}a_{jj}\right),\quad j=0,1,\ldots,k$$

حيث أن a_{jj} هو العنصر j الموجود بقطر المصفوفة AA' (أو $(X'X)^{-1}$)، مع $A=(X'X)^{-1}X'$.

ولدينا كذلك:
$$\left(\hat{\beta}_j-\beta_j\right)\sim N\left(0,\sigma_{\varepsilon}^{2}a_{jj}\right),\quad j=0,1,\ldots,k$$

ومنه :
$$\left(\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sigma_{\varepsilon}\sqrt{a_{jj}}}\right)\sim N(0,1),\quad j=0,1,\ldots,k$$

وليصبح قانون التوزيع t على الشكل:
$$t=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_{n-k}^{2}/(n-k-1)}}=\frac{\dfrac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sigma_{\varepsilon}\sqrt{a_{jj}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-k-1)\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}\Big/(n-k-1)}}$$

ونجد بعد الاختصار :
$$t=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sigma^{2}\sqrt{a_{jj}}}=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sigma_{\hat{\beta}_j}}\sim t_{n-k-1}$$

تساعدنا هذه المعادلة إذن على تكوين مجالات الثقة لمعالم النموذج بنفس الطريقة المذكورة في حالة النموذج البسيط،

$H_0 : \beta_j = 0$ (فرضية العدم)

$j = 0,1,\ldots,k$

ضد : $H_1 : \beta_j \neq 0$ (الفرضية البديلة)

نكتب: $t_c = \dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}$ وهي القيمة المحسوبة.

ما دمنا نختبر فرضية العدم، نكتب $t_c = \dfrac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}$ ، حيث نقبل H_0 بمستوى معنوية α إذا كانت $\left|\dfrac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}\right| \leq t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$

ففي هده الحالة، المعلم β_j ليس له معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر حيث $t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ مأخوذة من جدول التوزيع t، ونرفض H_0 بمستوى معنوية α إذا كانت $\left|\dfrac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}\right| > t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلم β_j له معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر. عندما يكون حجم العينة كبيرا ($n > 30$) فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع.

- اختبار المعنوية الكلية للنموذج و اختبارات القيود على المعالم

يمكن اختبار المعنوية الإجمالية للنموذج باستخدام نسبة التباين المفسر، إلى التباين غير المفسر، ويتبع هذا توزيع فيشر F، بدرجات حرية k و $n-k-1$، حيث n عدد المشاهدات و $k+1$ عدد المعالم المقدرة:

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \ldots\ldots = \beta_j = \ldots\ldots = \beta_k = 0$$

ضد الفرضية البديلة: $H_1 : \exists$ معامل $\neq 0$

$$F_c = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \Big/ k}{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 \Big/ (n-k-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i^{\,2} \Big/ k}{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 \Big/ (n-k-1)} = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} \sim F_\alpha(k, n-k-1)$$

فإذا تجاوزت الإحصائية F قيمة F المجدولة عند مستوى معنوية α وبدرجتي حرية k و $n-k-1$ نقبل الفرضية القائلة بأن معالم النموذج ليست جميعها مساوية للصفر وأن R^2 يختلف جوهريا عن الصفر. في هذه الحالة، يمكن القول أن للنموذج معنوية إحصائية.

هناك اختبارات أخرى تعتمد على جدول تحليل التباين (إدخال متغير أو عدة متغيرات مفسرة إضافية، استقرار معاملات النموذج، اختبار القيود على المعاملات... الخ) :

$$H_0 : R\beta = r$$
$$H_1 : R\beta \neq r$$
$$F_c = \frac{\left\{(R\hat{\beta} - r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta} - r)\right\}/q}{RSS/(n-k-1)}$$

حيث $\hat{\beta}$ شعاع المعالم المقدرة للنموذج غير المقيد. نرفض H_0 إذا كانت F_c أكبر من القيمة المجدولة لتوزيع فيشر بدرجتي حرية q و $n-k-1$ و بطريقة أخرى، يمكن استعمال الإحصائية التالية :

$$F_c = \frac{(RSS_c - RSS_{nc})/q}{RSS_{nc}/(n-k-1)}$$

حيث RSS_{nc} مجموع مربعات بواقي تقدير النموذج غير المقيد و RSS_c الخاص بالنموذج المقيد.

هناك اختبار آخر مكافئ لاختبار فيشر يرتكز على مقارنة نسبة المعقولية للنموذج المقيد و غير المقيد. إذا كانت القيود موجودة هذا يعني أن $L_c < L_{nc}$ حيث L_{nc} هي دالة المعقولية للنموذج غير المقيد و L_c للنموذج المقيد، أي أن $L_c / L_{nc} < 1$ أو بشكله اللوغاريتمي $\ln L_c - \ln L_{nc} < 0$. الفرق بين لوغاريتمات الدالة ينبغي أن يكون معنويا سالبا. يمكن أن نبرهن أن هذا الاختبار يقودنا إلى اختبار χ^2 و ذلك بحساب الإحصائية $LR = -2(\ln L_c - \ln L_{nc})$ الذي تتبع بطبيعة الحال توزيع χ^2 بدرجة حرية r و التي تعبر عن عدد القيود. إضافة إلى ذلك، إذا كان LR أكبر من القيمة المجدولة لتوزيع χ^2 بنسبة معنوية α و درجة حرية r، نرفض الفرضية H_0 أي أن القيود ليست محققة. كما أنه يمكننا استعمال مضاعف لاغرانج

- اختبار استقرار معاملات النموذج – اختبار Chow –

يدرس هذا الاختبار مدى استقرار النموذج في كامل الفترة الزمنية (دراسة التغيير الهيكلي للنموذج)، أي صياغة النموذج هي نفسها ولكن تختلف القيم المقدرة للمعاملات في العينتين الجزئيتين. ليكن النموذج المقدر ذو k متغير مستقل على فترة واحدة :

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} + ... + \hat{\beta}_k X_{ik}$$ على عينة حجمها n

نقدر النموذج انطلاقا من عينتين جزئيتين n_1 و n_2 مع $n = n_1 + n_2$، حيث :

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0^{(1)} + \hat{\beta}_1^{(1)} X_{i1} + \hat{\beta}_2^{(1)} X_{i2} + ... + \hat{\beta}_k^{(1)} X_{ik}$$
$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0^{(2)} + \hat{\beta}_1^{(2)} X_{i1} + \hat{\beta}_2^{(2)} X_{i2} + ... + \hat{\beta}_k^{(2)} X_{ik}$$

نختبر الفرضيات التالية :

$$H_0 : \begin{cases} \beta_0 = \beta_0^{(1)} = \beta_0^{(2)} \\ \beta_1 = \beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)} \\ \beta_2 = \beta_2^{(1)} = \beta_2^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_k = \beta_k^{(1)} = \beta_k^{(2)} \end{cases}$$

إن اختبار استقرار المعاملات يقودنا الى طرح السؤال التالي : هل يوجد فرق معنوي بين مجموع مربعات البواقي في كامل الفترة n وجمع مجموع مربعات البواقي المحسوبة انطلاقا من العينتين الجزئيتين $RSS^1 + RSS^2$ ؟ إذا كانت الإجابة "لا"، فهذا يعني أن النموذج مستقر في كامل العينة.

تعرف إحصائية فيشر كما يلي :

$$F_c = \frac{\left[RSS - \left(RSS^1 + RSS^2\right)\right]/df_1}{\left(RSS^1 + RSS^2\right)/df_2}$$

مع :

$$df_1 = (n-k-1) - [(n_1-k-1)+(n_2-k-1)] = k+1$$
$$df_2 = (n_1-k-1)+(n_2-k-1) = n-2(k+1)$$

إذا كانت $F_c \le F_\alpha(k+1, n-2(k+1))$، ففي هذه الحالة نقبل الفرضية H_0، أي أن المعاملات مستقرة معنويا في كامل الفترة الزمنية.

- **جدول تحليل التباين ANOVA**:

لغرض الوقوف على تأثير كل من (X_1)، (X_2) في المتغير التابع Y ، لابد من عمل جدول تحليل التباين لبيان أثر المتغيرين المستقلين (X_1) و (X_2) في النموذج.

جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	اختبار F
الانحراف الموضح من قبل (X_1) و (X_2) SCE	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$	k	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 / k$	$F_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 / k}{\sum_{i=1}^{n}e_i^2 / (n-k-1)} \sim F_\alpha(k,n-k-1)$
الانحراف غير الموضح SCR	$e'e$	$n-k-1$	$e'e / n-k-1$	
الانحراف الكلي SCT	$\sum(Y_i-\bar{Y})^2$	$n-1$		

- **قياس حدود الثقة :**

عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ يكون مجال الثقة لكلا المعلمين :

$$\Pr\left[-t_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)} \le \frac{\hat{\beta}_i-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \le +t_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}\right]=1-\alpha \qquad i=0,1,\dots,k$$

و الصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

الانحراف المعياري المعلمة المقدرة$(t\alpha/2)$ $\pm$ المعلمة المقدرة $=$ معلمة المجتمع أي:

$$\beta_i \in \left[\hat{\beta}_i - t_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}, \hat{\beta}_i + t_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}\right] \quad i=0,1,\dots,k$$

$t_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}$: القيمة الحرجة لتوزيع *Student* بدرجة حرية $n-k-1$ و نسبة معنوية $\left(\%\frac{\alpha}{2}\right)$

ونجدها من جدول لتوزيع القيمة المحسوبة.

ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n\ge 30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

وتصبح العلاقة السابقة كالأتي:

$$\beta_i \in \left[\hat{\beta}_i - z_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}, \hat{\beta}_i + z_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}\right] \qquad i = 0,1,\ldots,k$$

$Z_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}$: القيمة الحرجة للتوزيع *الطبيعي* بدرجة حرية $n-K-1$ و نسبة معنوية $\left(\%\frac{\alpha}{2}\right)$

ونجد من جدول التوزيع الطبيعي القيمة المجدولة.

ايجاد مجال الثقة لتباين الأخطاء :

عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ يكون مجال الثقة لتباين الخطاء:

$$\Pr\left[\chi^2_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)} \le \frac{(n-k-1)\sigma_e^2}{\sigma_\varepsilon^2} \le \chi^2_{\left(n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{(n-k-1)\sigma_e^2}{\chi^2_{\left(n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \le \sigma_\varepsilon^2 \le \frac{(n-k-1)\sigma_e^2}{\chi^2_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

$\chi^2_{n-k-1,\alpha/2}$ ، $\chi^2_{n-k-1,1-\alpha/2}$ القيم الحرجة لتوزيع الكاي مربع (χ^2) عند مستوى معنوية α ودرجة حرية $(n-k-1)$.

$$\sigma_\varepsilon^2 \in \left[\frac{(n-k-1)\sigma_e^2}{\chi^2_{\left(n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}, \frac{(n-k-1)\sigma_e^2}{\chi^2_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$$

مثال تطبيقي : اختبر معنوية المعلمات باستخدام اختبار t عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

- **اختبار معنوية ميل الدخل الوطني عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_1 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_c وتساوي :

حيث أن: $t_c = \dfrac{\left|\hat{\beta}_1 - \beta_1\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_1 فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.65}{0.24} = 2.70$$

حيث أن : $t_t = t_{\left(n-k-1, \frac{\alpha}{2}\right)} = t_{\left(10-2-1, \frac{0.05}{2}\right)} = t_{(7, 0.025)} = 2.365$

نلاحظ أن : $|t_c| \succ t_{(7, 0.025)}$ نقبل الفرضية H_1 ونرفض الفرضية H_0 أي أن المعلمة لها معنوية إحصائية أي أن الدخل الوطني يؤثر على الاستيراد.

- **<u>اختبار معنوية ميل السعر عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.</u>**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_2 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_2 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_c وتساوي :

حيث أن: $t_c = \dfrac{\left|\hat{\beta}_2 - \beta_2\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_2 فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}2}} = \frac{1.11}{0.26} = 4.26$$

حيث أن : $t_t = t_{\left(n-k-1, \frac{\alpha}{2}\right)} = t_{\left(10-2-1, \frac{0.05}{2}\right)} = t_{(7, 0.025)} = 2.365$

نلاحظ أن : $|t_c| \succ t_{(7, 0.025)}$ نقبل الفرضية H_1 ونرفض الفرضية H_0 أي أن المعلمة لها معنوية إحصائية أي أن السعر يؤثر على الاستيراد.

- **<u>اختبر معنوية الحد الثابت عند مستوى معنوية</u> α = 5%.**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_0 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t وتساوي :

حيث أن: $t_c = \frac{\left|\hat{\beta}_0 - \beta_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_0 فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{15.99}{0.80} = 19.89$$

حيث أن : $t_t = t_{\left(n-k-1, \frac{\alpha}{2}\right)} = t_{\left(10-2-1, \frac{0.05}{2}\right)} = t_{(7, 0.025)} = 2.365$

نلاحظ أن : $|t_c| \succ t_{(7, 0.025)}$ نقبل الفرضية H_1 ونرفض الفرضية H_0 أي أن المعلمة لها معنوية إحصائية.

- **<u>تقدير معالم النموذج عند مستوى ثقة</u> 95%.**

لدينا :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$$\beta_2 = \left[\beta_2 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\hat{\beta}3}, \hat{\beta}_3 + tn - 3, \frac{\alpha}{2} \sigma_{\hat{\beta}3}\right]$$

$$\beta_0 \in [14.08 \quad 17.89]$$

$$\beta_1 \in [0.061 \quad 1.23]$$

$$\beta_2 \in [0.49 \quad 1.72]$$

- هذا يعني أن هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_0 بين الحدين الأعلى 17.89 والأدنى 14.08 ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.
- نفس الشيء بالنسبة للمعلمة β_1 هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_1 بين الحدين الأعلى 1.23 والأدنى 0.061 ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.
- نفس الشيء بالنسبة للمعلمة β_2 هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_1 بين الحدين الأعلى 1.72 والأدنى 0.49 ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.

- **<u>تقدير تباين الأخطاء عند مستوى ثقة</u> 95%:**

<u>لدينا :</u>

$$\sigma_\varepsilon^2 \in \left[\frac{(n-k-1)\sigma_e^2}{\chi^2_{\left(n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}} , \frac{(n-k-1)\sigma_e^2}{\chi^2_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}} \right]$$

$\chi^2_{n-k-1,\alpha/2}$ ، $\chi^2_{n-k-1,1-\alpha/2}$ القيم الحرجة لتوزيع الكاي مربع (χ^2) عند مستوى معنوية α ودرجة حرية $(n-k-1)$.

$$\sigma_\varepsilon^2 \in \left[\frac{(10-2-1)0.48}{16.013} , \frac{(10-2-1)0.48}{1.690} \right]$$

$$\sigma_\varepsilon^2 \in [1.55 , 1.98 \ ]$$

- هذا يعني أن هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لتباين الأخطاء σ_ε^2 بين الحدين الأعلى 1.98 والأدنى 1.55 ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.

" جدول تحليل التباين ANOVA"

مصدر التباين	مجموع مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	اختبار F
الانحراف الموضح من قبل (X_1) و (X_2) SCE	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2=405.1$	$k=2$	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2/k$	$F_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2/k}{\sum_{i=1}^{n}e_i^2/(n-k-1)}\sim F_\alpha(k,n-k-1)$
الانحراف غير الموضح SCR	$e'e=SCR=3.4$	$n-k-1=10-2-1=7$	$e'e/n-k-1$	
الانحراف الكلي SCT	$\sum(Y_i-\bar{Y})^2=408.5$	$n-1=10-1=9$		

- **اختبار معنوية الانحدار ككل باستخدام اختبار F عند مستوى معنوية** $\alpha=5\%$.

الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالأتي:

الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية $H_0:\beta_1=\beta_2=0$ (فرضية العدم)

الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1:\exists\beta_j\ /\ \beta_j\neq0$ (الفرضية البديلة)

يتم أولا تحديد قيمة F المحسوبة كالتالي :

$$F_c=\frac{SCE/k}{SCR/(n-k-1)}\sim F_{(k,n-k-1)}$$

$$F_c=\frac{405.1/2}{3.4/(10-3)}=346.5$$

أو : $$F_c=\frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)}=\frac{0.99/2}{(1-0.99)/7}=346.5$$

في توزيع F القيمة المجدولة لإحصائية $Fischer$ في هذه الحالة تعتمد على درجتي حرية 2 (في البسط) و $n-3$ (في المقام).

$$F_t=F_{k,n-k-1}=F_{(2,7)}=4.74$$

إذا كان $F_C\geq F_t$ نقبل H_1 ونرفض H_0 الانحدار ككل له دلالة معنوية إحصائية أي أن: الدخل الوطني (X_1) والسعر (X_2) يؤثران معا في الاستيراد (Y_i) .

2-6- قراءة وتكوين نماذج الانحدار البسيط والمتعدد بالبرامج المتخصصة (EVIEWS)

تم في هذه الدراسة الإعتماد على منهج دراسة حالة بإستخدام الإنحدار الخطي المتعدد والإنحدار الخطي البسيط ومن ثم بناء عدة نماذج مختلفة وإختيار النموذج الأمثل من بينها وذلك لإختبار فرضيات الدراسة، ودراسة العلاقة بين المتغير التابع مع المتغيرات المستقلة وقياس مدى تفسير المتغيرات المستقلة للمتغير التابع، بالإضافة إلى دراسة ومعرفة مدى تأثير كل متغير مستقل لوحده على المتغير التابع؛

ومن أجل القيام بذلك تم الإعتماد على البرنامج الإحصائي **EVIEWS**.

لقد تم تمثيل المتغير التابع في الدراسة بالقيمة السوقية وذلك من خلال حساب متوسط القيمة السوقية لكل مؤسسة من عينة الدراسة خلال (أربعة سنوات)، وتم حساب كل من المتغيرات المستقلة التالية : العائد على حقوق المساهمين والعائد على إجمالي الأصول وإجمالي الديون على إجمالي الأصول ونصيب السهم من صافي الأرباح حيث تم حساب كل هذه المتغيرات سنويا لنفس المدة (أربعة سنوات) ومن ثم حساب المتوسط لكل متغير وذلك من أجل توحيد المعطيات، وفي الأخير نتحصل على جدول يشمل جميع المتغيرات المستقلة و التابع.

ومن خلال دراسة العلاقة بين متغير التابع Y وكلا من المتغيرات المستقلة X1،X2،X3،X4، عن طريق برنامج **Eviews7.0**، يمكننا عرض ومناقشة النتائج المتوصل اليها.

2-7-1- <u>عرض ومناقشة النتائج المتوصل إليها</u>

الفرع الأول : نتائج الإنحدار الخطي المتعدد: الهدف من هذه الدراسة هو بناء نموذج إحصائي بين المتغيرات المستقلة المؤثرة على أسعار الأسهم بناء على نتائج دراسات سابقة للمؤسسات عينة الدراسة وذلك من خلال إيجاد المعاملات **B0، B1، B2، B3، B4** وأحسن طريقة لذلك هي طريقة المربعات الصغرى والتي تهدف إلى إيجاد أحسن تصحيح خطي بتدنئة مربعات الإنحرافات بين المشاهدات الفعلية والمقدرة.

- ✓ **إيجاد المعاملات بواسطة طريقة المربعات الصغرى :**

حيث يكون النموذج المقدر لدالة الإنحدار الخطي المتعدد للمتغيرات قيد الدراسة كما هو مبين في المعادلة

التالية :

$$\gamma = \beta 0 + \beta 1 x 1 + \beta 2 x 2 + \beta 3 x 3 + \beta 4 x 4 + \varepsilon i$$

حيث :

Y : متوسط سعر السهم السوقي؛

X1 : متوسط العائد على حقوق المساهمين؛

X2 : متوسط العائد على إجمالي الأصول؛

X3 : متوسط إجمالي الديون على إجمالي الأصول؛

X4 : متوسط نصيب السهم من صافي الأرباح؛

εi : حد الخطأ

تمثل النموذج الأول في الجانب التطبيقي لهذه للدراسة في الأنحدار الخطي المتعدد وذلك من أجل معرفة العلاقة بين جميع المتغيرات المستقلة والتابعة مجتمعة . ومنه وبعد إدخال جميع المتغيرات للبرنامج الإحصائي **EVIEWS 7.0** نتحصل على المخرجات التالية :

الجدول رقم (2.2) : نتائج إختبار النموذج الأول

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 04/18/14 Time: 00:00
Sample: 1 24
Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	9.562892	14.57613	0.656065	0.5196
X1	-13.58431	146.8442	-0.092508	0.9273
X2	319.2226	238.6221	1.337774	0.1968
X3	57.40346	35.28341	1.626925	0.1202
X4	0.114791	0.205473	0.558667	0.5829

R-squared	0.500614	Mean dependent var	59.10229
Adjusted R-squared	0.395480	S.D. dependent var	46.51289
S.E. of regression	36.16418	Akaike info criterion	10.19707
Sum squared resid	24849.11	Schwarz criterion	10.44250
Log likelihood	-117.3648	Hannan-Quinn criter.	10.26218
F-statistic	4.761678	Durbin-Watson stat	2.323729
Prob(F-statistic)	0.007857		

✓ **الإختبارات الإحصائية للنموذج :**

في الدراسات الإحصائية لا يكفي تقدير نموذج إحصائي والتحليل من خلاله، بل يجب تشخيص القوة الإحصائية له من خلال مجموعة من الإختبارات أو المعايير والتي سوف تساعدنا في هذه الدراسة وهي كالتالي :

- **إختبار جودة التوفيق "معامل التحديدR^2"** : يقيس معامل التحديد النسبة من التغير الإجمالي في y الذي تفسره المعادلة المقدرة، وتتناسب قيمة R^2 طرديا مع جودة توفيق النموذج أي أنه :

كلما كان أقرب إلى 1 كانت معادلة الإنحدار المقدرة أكثر تفسيرا للعلاقة بين **y** و**x**، وكلما كانت أقرب إلى 0 كانت العلاقة المقدرة أقرب إلى العشوائية في التفسير أي أضعف تفسيرا؛

- إختبار المعنوية الجزئية الإحصائية للمعاملات المقدرة "Prob"؛
- إختبار المعنوية الكلية للنموذج المقدر "Prob (F-statistic)"؛
- إختبار الإرتباط الذاتي للأخطاء "إحصائية(DW)"؛
- معياري المفاضلة : معيار Akaike، معيار Shwarz؛

كلما كان معياري **Akaike** و**Shwarz** أقل كلما كان النموذج مقبولا.

وبناء عليه ومن خلال مخرجات برنامج **EVIEWS7.0** والنتائج المتحصل عليها نلاحظ أن العلاقة بين المتغيرات المدروسة غير واضحة وغير جيدة وهذا ما تم توضيحه في التفسير المقدم، وعليه سنحاول الكشف على هذه العلاقة بتقدير مجموعة من النماذج القياسية الخطية وغير الخطية من أجل إختيار النموذج المناسب الذي يفسر العلاقة بين المتغيرين.

الفرع الثاني : إختيار النموذج الأمثل

بعد رفض النموذج الأول (الإنحدار الخطي المتعدد) المعد، لأسباب إحصائية مختلفة والمبينة في تحليل وتفسير هذا النموذج، عليه قمنا بإجراء عدة إختبارات فتحصلنا على مجموعة من النماذج المختلفة وبعد الحصول على هذه النتائج بغية إختيار النموذج الأمثل المناسب لإكمال هذه الدراسة توجب علينا إختيار النموذج الأمثل من بينها وفقا للمعايير المذكورة سابقا، هذا ما سيتم عرضه في الجدول الموالي :

الجدول رقم (3.2) : عينة من إختبارات النماذج لتفسير العلاقة بين (Xi) و (Y)

	النموذج	Prob معنوية المعالم					Prob(F-statistic)	R^2	DW	Akaike	Shwars
		C	x1	x2	x3	x4					
1	y c x1 x2 x3 x4	0.5196	0.9273	0.1968	0.1202	0.5829	0.007857	0.500614	2.323729	10.19707	10.4425
2	y x1 x2 x3 x4	-	0.8988	0.0963	0.0465	0.6722	-	0.489301	2.208346	10.13613	10.33248
3	y c x1 x2 x3	0.585	0.6448	0.0231	0.0376	-	0.003081	0.492411	2.283933	10.13003	10.32637
4	y x1 x2 x3	-	0.6699	0.0097	0.015	-	-	0.484591	2.194345	10.06198	10.20924
5	y c x1 x2 x4	0.1732	0.1304	0.5862	-	0.1478	0.009128	0.431045	2.198733	10.24416	10.4405
6	y x1 x2 x4	-	0.03	0.4019	-	0.1638	-	0.37429	1.920536	10.25591	10.40316
7	y c x2 x3 x4	0.505	-	0.0557	0.0281	0.4701	0.002647	0.500389	2.311048	10.11418	10.31053
8	y x2 x3 x4	-	-	0.009	0.0029	0.5524	-	0.488877	2.191211	10.5363	10.20089
9	y c x1 x3 x4	0.229	0.1666	-	0.2977	0.0536	0.006223	0.453576	2.326919	10.20375	10.40009
10	y x1 x3 x4	-	0.0475	-	0.1615	0.0466	-	0.411508	2.127855	10.19458	10.34184
11	y c x1 x2	0.194	0.2579	0.094	-	-	0.008276	0.366569	2.042136	10.26817	10.41543
12	y x1 x2	-	0.0678	0.0454	-	-	-	0.312261	1.792714	10.2671	10.36527
13	y c x1 x3	0.2109	0.1876	-	0.1658	-	0.013011	0..338684	2.018158	10.31125	10.45851
14	y x1 x3	-	0.0527	-	0.0734	-	-	0.286236	1.803975	10.30424	10.40241
15	y c x1 x4	0.126	0.0115	-	-	0.0302	0.003145	0.422338	2.252004	10.17601	10.32327
16	y x1 x4	-	0	-	-	0.0213		0.352482	1.993721	10.20683	10.30501
17	y c x2 x3	0.6022	-	0.0088	0.0179	-	0.000907	0.486849	2.183992	10.05759	10.20485
18	y x2 x3	-	-	0.0011	0.0022	-	-	0.480004	2.114015	9.98751	10.08568
19	y c x2 x4	0.0391	-	0.0499	-	0.2993	0.009182	0.360275	2.259664	10.27806	10.42532
20	y x2 x4	-	-	0.0001	-	0.5127	-	0.212777	1.694079	10.4022	10.50037

علما أنه لم نقم بإدخال اللوغاريتم "Log" على هذه النماذج لأنه يوجد في المتغيرات المستقلة بعض القيم السالبة فإذا قمنا بإدخاله تحذف هذه القيم وتعتبر صفر مما قد يفقد النموذج قيمته، والتي بدورها قد تكون لها أهمية فيه.

ومن أجل الوصول إلى النموذج الذي يفسر العلاقة بين Y وكل من X1، X2 و X3 و X4 ، تم بناء مجموعة من النماذج

واختيار النموذج الأمثل الذي يمثل العلاقة بين هذه المتغيرات، وعليه وبناء على عدة معايير وعلى النتائج المتوصل إليها قمنا بإختيار النموذج رقم 18 والممثل فيما يلي :

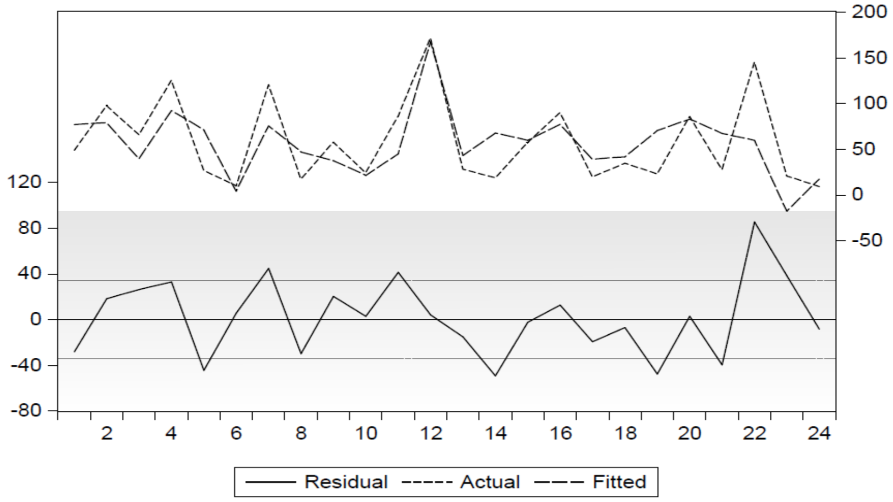
الجدول رقم (4.2) : نتائج إختبار النموذج الأمثل المختار

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 04/18/14 Time: 14:22
Sample: 1 24
Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X2	394.1068	105.5061	3.735392	0.0011
X3	64.53990	18.64964	3.460650	0.0022

R-squared	0.480004	Mean dependent var	59.10229
Adjusted R-squared	0.456367	S.D. dependent var	46.51289
S.E. of regression	34.29462	Akaike info criterion	9.987510
Sum squared resid	25874.67	Schwarz criterion	10.08568
Log likelihood	-117.8501	Hannan-Quinn criter.	10.01355
Durbin-Watson stat	2.114015		

الشكل رقم (1.2) : مقارنة السلسلة الأصلية مع السلسلة المقدرة



الفرع الثالث : إختبار جودة النموذج

من أجل دراسة وإختبار ملائمة وجودة هذا النموذج المختار توجب علينا القيام بالإختبارات التالية :

1- إختبار الإرتباط الذاتي بين الأخطاء من الدرجة الثانية "LM" : يقيس ويختبر الإرتباط الذاتي بين الأخطاء للدرجة أكثر من واحد ويستخدم توزيع فيشر أو توزيع كاي دوا x^2 .

الجدول رقم (5.2) : نتائج إختبار بروش قود فراي

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	0.147754	Prob. F(2,20)	0.8636
Obs*R-squared	0.264590	Prob. Chi-Square(2)	0.8761

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 04/19/14 Time: 23:47
Sample: 1 24
Included observations: 24
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X2	2.948229	110.8215	0.026603	0.9790
X3	-0.862139	19.71923	-0.043721	0.9656
RESID(-1)	-0.079209	0.223231	-0.354831	0.7264
RESID(-2)	-0.099823	0.232277	-0.429760	0.6720

R-squared	0.011025	Mean dependent var	1.963250
Adjusted R-squared	-0.137322	S.D. dependent var	33.48079
S.E. of regression	35.70569	Akaike info criterion	10.13951
Sum squared resid	25497.92	Schwarz criterion	10.33585
Log likelihood	-117.6741	Hannan-Quinn criter.	10.19160
Durbin-Watson stat	2.012304		

2- إختبار الإنحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين الشرطي للأخطاء"ARCH" : هو إختبار لتجانس التباين يعتمد على العلاقة بين مربعات الأخطاء لفترات زمنية سابقة، كما يعتمد على توزيع فيشر أو توزيع كاي دوا x^2 .

الجدول رقم (6.2) : نتائج إختبار تجانس التباين

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	0.002631	Prob. F(1,21)	0.9596
Obs*R-squared	0.002881	Prob. Chi-Square(1)	0.9572

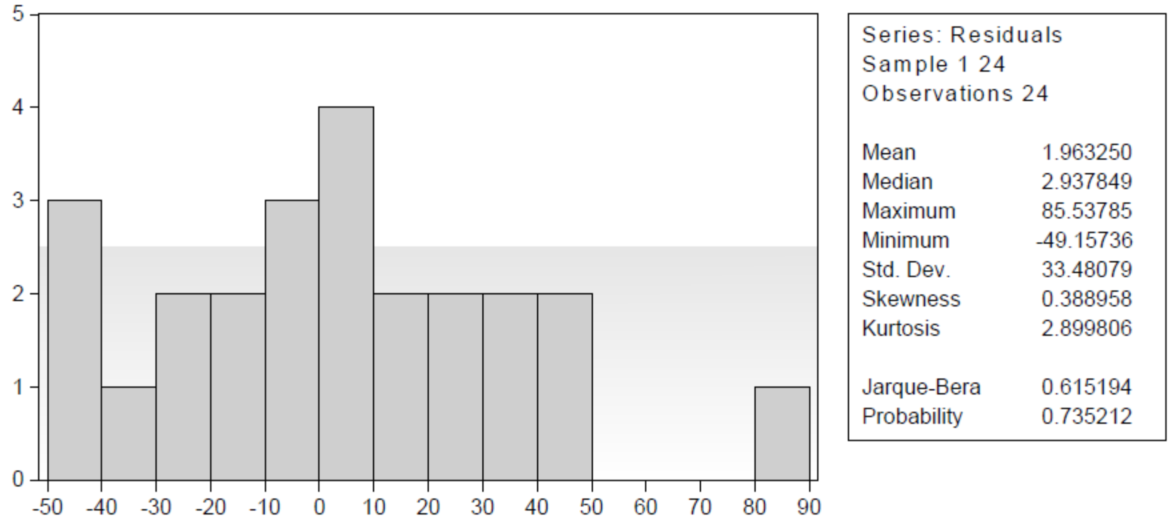
Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 04/20/14 Time: 00:02
Sample (adjusted): 2 24
Included observations: 23 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1078.020	419.4338	2.570178	0.0178
RESID^2(-1)	0.011293	0.220148	0.051295	0.9596

R-squared	0.000125	Mean dependent var	1090.690
Adjusted R-squared	-0.047488	S.D. dependent var	1588.447
S.E. of regression	1625.725	Akaike info criterion	17.70824
Sum squared resid	55502619	Schwarz criterion	17.80698
Log likelihood	-201.6447	Hannan-Quinn criter.	17.73307
F-statistic	0.002631	Durbin-Watson stat	1.974446
Prob(F-statistic)	0.959575		

- **التوزيع الطبيعي للبواقي "جاك بيرا"** : يجيب هذا الشكل على السؤال هل السلسلة المقدرة أو محل الدراسة تتبع التوزيع الطبيعي أم لا.

الشكل رقم (2.2) : التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي للبواقي (الأخطاء)



الفرع الرابع : نتائج الإنحدار الخطي البسيط

سنقوم في هذا الجزء بتقدير نماذج الإنحدار البسيط لكل متغير مستقل على المتغير التابع كل على حدى، وذلك بهدف الكشف عن أي من المتغيرات المستقلة الأكثر تأثيرا على المتغير التابع.

- ✓ **النموذج الأول : علاقة العائد على حقوق المساهمين بأسعار الأسهم**

الجدول رقم (7.2) : تأثير العائد على حقوق المساهمين بأسعار الأسهم

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 04/18/14 Time: 13:43
Sample: 1 24
Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	25.28147	14.36511	1.759922	0.0923
X1	233.8531	81.20206	2.879891	0.0087

R-squared	0.273778	Mean dependent var	59.10229
Adjusted R-squared	0.240768	S.D. dependent var	46.51289
S.E. of regression	40.52850	Akaike info criterion	10.32154
Sum squared resid	36136.31	Schwarz criterion	10.41971
Log likelihood	-121.8585	Hannan-Quinn criter.	10.34759
F-statistic	8.293771	Durbin-Watson stat	2.020145
Prob(F-statistic)	0.008697		

✓ النموذج الثاني : علاقة العائد على إجمالي الأصول بأسعار الأسهم

الجدول رقم (8.2) : تأثير العائد على إجمالي الأصول بأسعار الأسهم

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 04/09/14 Time: 11:09
Sample: 1 24
Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	26.31231	12.83305	2.050356	0.0524
X2	439.4184	134.7763	3.260353	0.0036

R-squared	0.325772	Mean dependent var	59.10229
Adjusted R-squared	0.295125	S.D. dependent var	46.51289
S.E. of regression	39.05075	Akaike info criterion	10.24726
Sum squared resid	33549.14	Schwarz criterion	10.34543
Log likelihood	-120.9671	Hannan-Quinn criter.	10.27330
F-statistic	10.62990	Durbin-Watson stat	2.157339
Prob(F-statistic)	0.003583		

✓ النموذج الثالث : علاقة إجمالي الديون على إجمالي الأصول بأسعار الأسهم

الجدول رقم (9.2) : تأثير إجمالي الديون على إجمالي الأصول بأسعار الأسهم

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 04/18/14 Time: 13:45
Sample: 1 24
Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	27.22459	13.65493	1.993755	0.0587
X3	74.19269	25.34931	2.926813	0.0078

R-squared	0.280252	Mean dependent var	59.10229
Adjusted R-squared	0.247536	S.D. dependent var	46.51289
S.E. of regression	40.34747	Akaike info criterion	10.31259
Sum squared resid	35814.20	Schwarz criterion	10.41076
Log likelihood	-121.7511	Hannan-Quinn criter.	10.33863
F-statistic	8.566233	Durbin-Watson stat	2.178221
Prob(F-statistic)	0.007809		

✓ **النموذج الرابع : علاقة نصيب السهم من صافي الأرباح بأسعار الأسهم**

الجدول رقم (10.2) : تأثير نصيب السهم من صافي الأرباح بأسعار الأسهم

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 04/09/14 Time: 11:11
Sample: 1 24
Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	48.19313	9.546030	5.048500	0.0000
X4	0.414771	0.162850	2.546957	0.0184

R-squared	0.227718	Mean dependent var	59.10229
Adjusted R-squared	0.192614	S.D. dependent var	46.51289
S.E. of regression	41.79400	Akaike info criterion	10.38304
Sum squared resid	38428.25	Schwarz criterion	10.48121
Log likelihood	-122.5965	Hannan-Quinn criter.	10.40908
F-statistic	6.486988	Durbin-Watson stat	2.546848
Prob(F-statistic)	0.018376		

2-7-2- تحليل ومناقشة النتائج التوصل إليها

لقد توصلنا لمجموعة من النتائج سيتم في هذا المطلب تحليلها، وتفسيرها، و إنطلاقا من مخرجات التحليل والتفسير سيتم إختبار صحة فرضيات الدراسة وذلك من أجل الوصول إلى نتيجة نهائية .

أولا : تحليل النتائج المتوصل إليها

الفرع الأول : تحليل نتائج الإنحدار الخطي المتعدد: العلاقة الرياضية مع المعلمة التقاطعية :

$$\gamma = \beta 0 + \beta 1x1 + \beta 2x2 + \beta 3x3 + \beta 4x4 + \varepsilon i$$

وبعد تقدير النموذج بطريقة المربعات الصغرى ومن خلال الجدول رقم (2.2) تحصلنا على المعطيات التالية :

$$\begin{cases} y = 9.56 - 13.58x1 + 319.22x2 + 57.40x3 + 0.11x4 \\ t\,(s) = (0.65)\ (-0.09)\ (1.33)\ (1.62)\ \ (0.55) \\ R^2 = \ 50.06\% \\ DW = \ \ 2.32 \\ Fc = 4.76 \\ F\,4{،}19 = \ 2.90 \end{cases}$$

حيث :

n = عدد المشاهدات =24؛

K = عدد المعالم المقدرة = (4+c) =5؛

m = عدد المتغيرات = (k-1) =4؛

درجتي حرية = (n-k)، (k-1) = 4،19.

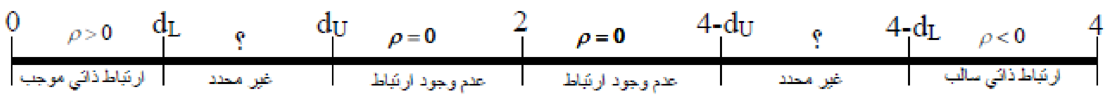
- **المعنوية الكلية** : من خلال هذه المعطيات المقدمة نلاحظ أن إحصائية فيشر المحسوبة $F_{4،19}$=**4.761678** وهي أكبر تماما من القيمة المجدولة (بالقيمة المطلقة) بتوزيع فيشر أنظر الملحق **(09)** بدرجتي حرية **4** و**19** والتي تساوي **2.90** وهذا يعني أن النموذج مقبول إحصائيا.

- **المعنوية الجزئية** : ليس للمعالم المقدرة **β0 ،β1 ،β2 ،β3 ،β4** معنوية إحصائية لأن القيمة الإحتمالية **brop** $0.05 <$ ومنه نقبل الفرضية H_0 : $\beta_1 = 0$ ونرفض الفرضية H_1: $\beta_1 \neq 0$ أي أن المعالم المقدرة لا تختلف معنويا عن الصفر، مما ينبغي الإستغناء عن بعض المتغيرات (المؤشرات) وبناء نموذج جديد يعبر عن العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة وبشكل أفضل.

- **جودة التوفيق** : إن المعادلة المقدرة $y = \beta 0 + \beta 1x1 + \beta 2x2 + \beta 3x3 + \beta 4x4$ تفسر لنا **50.06%** من التغيرات الإجمالية للمتغير التابع **y** للفترة 2009-2012، أما النسبة المتبقية **49.94%** تفسرها متغيرات أخرى غير مقدرة في النموذج أي أنه للنموذج قدرة تفسيرية متوسطة .

إختبار الإرتباط الذاتي بين الأخطاء (DW) : قدرت قيمته ب **2.32** وهي تقع ضمن المجال **[4-d$_u$** و**2]** ويعني ذلك عدم وجود إرتباط ذاتي بين الأخطاء بالإستعانة بالملحق رقم **(11)** وهذا ما يبينه الشكل التالي :

الشكل (3.2) : مناطق القبول والرفض الاختبار (Durbin et Watson)



نستخرج قيمة كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ **d** (d_L ،d_U) حيث :

d$_u$ =1.01؛ **d$_l$** = 1.78.

الفرع الثاني : تحليل نتائج نموذج الإنحدار الخطي الأمثل المختار

بالإستعانة بالبرنامج الإحصائي **Eviews7.0** تم بناء عدة نماذج والمبينة في الجدول رقم **(3.2)** وبإستخدام معياري المفاضلة **Akaike** و**Shwarz** تم إختيار النموذج الأمثل رقم **18** والموضح في الجدول رقم **(4.2)**.

من خلال النتائج المتحصل عليها نجد النموذج الأمثل المقدر والموضح كالتالي :

$$\begin{cases} \gamma = 394.1x2 + 64.53x3 \\ t\ (s) = (3.73)\ (3.46) \\ R^2 = 48\% \\ DW = 2.11 \\ Fc = 6.58 \\ F2،22 = 3.44 \end{cases}$$

حيث :

n = عدد المشاهدات = 24؛

k = عدد المعالم المقدرة =2؛

درجتي حرية = (n-k)، (k) = 2،22؛

$Fc = \left(\frac{R^2}{k-1}\right) \div \left(\frac{1-R^2}{n-k}\right)$.

- **المعنوية الكلية** : من خلال هذه المعطيات نلاحظ أن إحصائية فيشر المحسوبة هي $F_{2،22}$ تساوي **6.58** وهي أكبر تماما من القيمة المجدولة لتوزيع فيشر بدرجتي حرية **2** و**22** والتي تساوي **3.44** أنظر الملحق رقم **(09)** وهذا ما يعني أن النموذج مقبول إحصائيا.

- **المعنوية الجزئية** : من خلال مخرجات برنامج **Eviews** نلاحظ أن القيمة الإحتمالية **(Prob)** للمعالم المقدرة **β3** و**β2** أقل من مستوى معنوية 5% ومنه نرفض الفرضية H_0: β_1 = **0**، ونقبل الفرضية H_1: $\beta_1 \neq$ **0**، أي أن **β3** و**β2** يختلف معنويا عن الصفر بمستوى دلالة 5%، وبالتالي هناك علاقة ذات دلالة إحصائية بين **x2 x3** والمتغير التابع **y**، أي أن القيم المقدرة لديها معنوية إحصائية.

- **جودة التوفيق** : إن المعادلة المقدرة $\gamma = \beta 2x2 + \beta 3x3$ تفسر لنا **48%** من التغيرات الإجمالية للمتغير **y** التابع للفترة 2009-2012، أي هناك عوامل أخرى مؤثرة بنسبة **52%** على هذا النموذج.

- **إختبار الإرتباط الذاتي بين الأخطاء (DW)** : قدرت ب **2.11** وهي تقع ضمن المجال [$4-d_u$ و2] ويعني ذلك عدم وجود إرتباط ذاتي بين الأخطاء وذلك بالإستعانة بالملحق رقم **(11)** والشكل رقم **(3.2)**.

نستخرج قيمة كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ **d** (d_U ،d_L)

حيث :

n = عدد المشاهدات = 24؛

k = عدد المتغيرات =2؛

d_u =1.19 و d_l =1.55.

نستنتج أن هناك علاقة معنوية بالنظر إلى معلمات النموذج المقدر وأن هناك علاقة طردية بين **x2** (العائد على إجمالي الأصول) وسعر السهم وكذا **x3** (إجمالي الديون على إجمالي الأصول) مع سعر السهم وهذا ما تأكده معاملات الإرتباط الخاصة بالنموذج والمبينة في الجدول أسفله :

الجدول رقم (11.2) : معاملات الإرتباط

Correlation

	Y	X2	X3
Y	1.000000	0.570764	0.529388
X2	0.570764	1.000000	0.245934
X3	0.529388	0.245934	1.000000

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن هناك إرتباط بين المتغير المستقل العائد على إجمالي الأصول والمتغير التابع أسعار الأسهم بنسبة 57% وبين إجمالي الديون على إجمالي الأصول وأسعار الأسهم بنسبة 52%، وبين المتغيرين المستقلين العائد على إجمالي الأصول وبين إجمالي الديون على إجمالي الأصول بنسبة 24%.

✓ **من خلال الشكل رقم (1.2) نلاحظ ما يلي :**

من خلال التمثيل البياني للنموذج المقدر يمكننا ملاحظة التطابق بين منحنى الأسعار لبورصة قطر والمنحنى المقدر، وهذا من شأنه أ ن يعطى لنا فكرة على مدى أهمية تعبير النموذج المقدر للأسعار للمتغيرات (المؤشرات) المستقلة المدرجة في النموذج، كما نلاحظ أيضا وجود حالات شاذة تكون فيها بواقي الأخطاء خارج مجال الثقة **(بين 40و-40)**.

الفرع الثالث : تحليل نتائج إختبار جودة النموذج

1- نتائج إختبار "بروش قود فراي" : من خلال النتائج والجدول رقم **(5.2)** نلاحظ أن إحصائية مضاعف لاغرونج المحسوبة والتي تساوي **0.26** $LM = n \times R^2$ فهي أقل تماما من القيمة المجدولة لتوزيع "**كاي دوا**" أي x^2 بدرجة حرية 2 ونسبة معنوية **5%** أنظر الملحق رقم **(10)**؛ $X^2_{0.05}\ (2) = 5.99$ وبالتالي نرفض الفرضية البديلة H_1 ونقبل فرضية العدم H_0 والتي تقرر أنه ليس هناك إرتباط ذاتي بين الأخطاء من الدرجة الثانية.

2- نتائج إختبار "ARCH" : من خلال النتائج والجدول رقم **(6.2)** لدينا القيمة المحسوبة للمضاعف لاغرونج: $LM=n \times R^2=0.0028$ فهي أقل تماما من القيمة المجدولة لتوزيع "**كاي دوا**" أي x^2 : $x^2\ (1)= 3.84$ في حدود درجة معنوية **5%** أنظر الملحق رقم **(10)**، وعليه فأنه لا يوجد أثر لعدم تجانس الأخطاء أي هناك تجانس في التباين.

3- نتائج التوزيع الطبيعي للبواقي : من خلال الشكل رقم **(2.2)** نلاحظ ما يلي :

يوضح هذا الشكل هل السلسلة المدروسة تتبع التوزيع الطبيعي أم لا، ومن خلال الإحصائية المحسوبة لإختبار " **jarque – Bera**" **S= 0.61** فهي أقل تماما من توزيع "**كاي دوا**" أي x^2 والتي توافق $x^2_{0.05}\ (2) = 5.99$ أنظر الملحق رقم **(10)**، إذن نقبل H_1 ونرفض H_0 وعليه **فأن سلسلة النموذج تتمتع بخصائص التوزيع الطبيعي.**

حيث :

S = jarque – Bera؛ $S = \frac{n}{6} \times \beta 1 + \frac{n}{24} \times (\beta 2 - 3)^2$؛ $\beta 1$ = Skewness؛ $\beta 2$ = kurtosis.

الفرع الرابع : تحليل نتائج الإنحدار البسيط

✓ **النموذج الأول : علاقة العائد على حقوق المساهمين بأسعار الأسهم**

من خلال الجدول رقم (7.2) نتحصل على :

- **إختبار المعنوية للنموذج** :

1- المعنوية الجزئية "معنوية المعالم المقدرة" : من خلال مخرجات برنامج **Eviews** نلاحظ أن القيمة الإحتمالية **(Prob)** تساوي $0.0087 \geq 0,05$ ومنه نرفض الفرضية $H_0: \beta_1 = 0$، ونقبل الفرضية $H_1: \beta_1 \neq 0$، أي أن $\beta 1$ يختلف معنويا عن الصفر بمستوى دلالة 5%، وبالتالي هناك علاقة ذات دلالة إحصائية بين **x1** والمتغير التابع **y**، أي أن القيم المقدرة لديها معنوية إحصائية.

2- المعنوية الكلية : يمكن إختبار المعنوية الكلية للنموذج من خلال إحصائية فيشر، حيث نلاحظ من النموذج المقدر أن الإحتمالية الإحصائية لفيشر تقدر ب**0.008697** حيث أنها أقل من مستوى المعنوية **5 %** ومنه للنموذج معنوية إحصائية.

- **معامل التحديد "قوة إرتباط النموذج" :**

إن المعادلة المقدرة $\gamma = \beta 0 + \beta 1 x 1$ تفسر لنا **27.38%** من التغيرات الإجمالية للمتغير التابع **y** في الفترة 2009-2012 وهي تعبر عن جودة توفيق ضعيفة لهذا النموذج، أما النسبة المتبقية ترجع إلى المتغيرات المفسرة الأخرى غير الداخلة في المعادلة.

- **إختبار الإرتباط الذاتي للأخطاء "إحصائية (Durbin et Watson)" :**

من خلال مخرجات برنامج **Eviews**، نستخرج قيمة **(DW)** حيث تساوي إلى **2.020145**، وبرجوع إلى الجدول الإحصائي **(DW)** في الملحق رقم **(11)** نستخرج قيمة كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ **d** (d_U ،d_L).

حيث لدينا : n (عدد المشاهدات) = 24؛ K (عدد المتغيرات) = 1؛

و منه : d_{L1} = 1.27، d_{U2} = 1.45.

بالإعتماد على الجدول رقم **(7.2)** يمكن أن نستخرج نتيجة إختبار **(DW)** ومن خلال الشكل رقم **(3.2)** الذي يوضح قيم **d** (القيم الجدولية الإختبارية)، والتي تشير إلى وجود أو عدم وجود إرتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى، نلاحظ أن قيمة **(DW)** تقع ضمن مجال **]** 2، $4 - du$ **[**، أي عدم وجود إرتباط ذاتي للأخطاء وهذا يدل على أن النموذج جيد.

ومن خلال الإختبارات الإحصائية التي أجريت على النموذج يمكن القول أن النموذج المقدر مقبول من الناحية الإحصائية.

✓ **النموذج الثاني : علاقة العائد على إجمالي الأصول بأسعار الأسهم**

من خلال الجدول رقم (8.2) نتحصل على :

- **إختبار المعنوية للنموذج :**

1- المعنوية الجزئية "معنوية المعالم المقدرة" : من خلال مخرجات برنامج **Eviews** نلاحظ أن القيمة الاحتمالية **(Prob)** تساوي **0.0036 ≤ 0,05** ومنه نرفض الفرضية H_0: $\beta_1 = 0$، ونقبل الفرضية H_1: $\beta_1 \neq 0$، أي أن $\beta 1$ يختلف معنويا عن الصفر بمستوى دلالة **5%**، وبالتالي هناك علاقة ذات دلالة إحصائية بين**x2** والمتغير التابع **y**، أي أن القيم المقدرة لديها معنوية إحصائية.

2- المعنوية الكلية : يمكن إختبار المعنوية الكلية للنموذج من خلال إحصائية فيشر، ونلاحظ من النموذج المقدر أن الإحتمالية الإحصائية لفيشر تقدر ب **0.003583** وهي أقل من مستوى المعنوية **5 %** ومنه للنموذج معنوية إحصائية.

- **معامل التحديد "قوة إرتباط النموذج"** :

إن المعادلة المقدرة $\gamma = \beta0 + \beta2x2$ تفسر لنا **32.57%** من التغيرات الإجمالية للمتغير التابع **y** في الفترة 2009-2012 وهي تعبر عن جودة توفيق ضعيفة لهذا النموذج، أما النسبة المتبقية ترجع إلى المتغيرات المفسرة الأخرى غير الداخلة في المعادلة.

- **إختبار الإرتباط الذاتي للأخطاء "إحصائية (Durbin et Watson)"** :

من خلال مخرجات برنامج **Eviews**، نستخرج قيمة **(DW)** حيث تقدر ب **2.157339**، وبرجوع إلى الجدول الإحصائي **(DW)** في الملحق رقم **(11)** لنستخرج قيمة كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ **d** (d_U ،d_L).

حيث لدينا : n (عدد المشاهدات) = 24؛ K (عدد المتغيرات) = 1؛

و منه : d_{L1} = 1.27، d_{U2} = 1.45.

بالإعتماد على الجدول رقم **(8.2)** يمكن أن نستخرج نتيجة إختبار(**DW**)، وبالإستعانة بالشكل رقم **(3.2)** الذي يوضح قيم **d** (القيم الجدولية الإختبارية)، ونلاحظ أن قيمة(**DW**) تقع ضمن مجال $]4 - du$ ، $2[$، أي عدم وجود إرتباط ذاتي للأخطاء وهذا يدل على أن النموذج جيد.

ومن خلال الإختبارات الإحصائية التي أجريت على النموذج يمكن القول أن النموذج المقدر مقبول من الناحية الإحصائية.

- ✓ **النموذج الثالث : علاقة إجمالي الديون على إجمالي الأصول بأسعار الأسهم**

من خلال الجدول رقم (9.2) نتحصل على :

- **إختبار المعنوية للنموذج** :

1- **المعنوية الجزئية "معنوية المعالم المقدرة"** : من خلال مخرجات برنامج **Eviews** نلاحظ أن القيمة الاحتمالية **(Prob)** تساوي **0.0078 ≥ 0,05** ومنه نرفض الفرضية H_0: β_1 = **0**، ونقبل الفرضية H_1: $\beta_1 \neq$ **0**، أي أن $\beta1$ يختلف معنويا عن الصفر بمستوى دلالة **5%**، وبالتالي هناك علاقة ذات دلالة إحصائية بين**x3** والمتغير التابع **y**، أي أن القيم المقدرة لديها معنوية إحصائية.

2- **المعنوية الكلية** : يمكن إختبار المعنوية الكلية للنموذج من خلال إحصائية فيشر، ونلاحظ من النموذج المقدر أن الإحتمالية الإحصائية لفيشر تقدر ب**0.007809** وهي أقل من مستوى المعنوية **5 %** ومنه للنموذج معنوية إحصائية.

- **معامل التحديد "قوة إرتباط النموذج"** :

إن المعادلة المقدرة $\gamma = \beta 0 + \beta 3x3$ تفسر لنا **28.02%** من التغيرات الإجمالية للمتغير التابع **y** في الفترة 2009-2012 وهي تعبر عن جودة توفيق ضعيفة لهذا النموذج، أما النسبة المتبقية ترجع إلى المتغيرات المفسرة الأخرى غير الداخلة في المعادلة.

- **إختبار الإرتباط الذاتي للأخطاء "إحصائية (Durbin et Watson)"** :

من خلال مخرجات برنامج **Eviews**، نستخرج قيمة **(DW)** حيث تقدر ب **2.178221**، وبرجوع إلى الجدول الإحصائي **(DW)** في الملحق رقم **(11)** لنستخرج قيمة كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ **d** $(d_U \cdot d_L)$.

حيث لدينا : n (عدد المشاهدات) = 24؛ K (عدد المتغيرات) = 1؛

و منه : d_{L1} = 1.27، d_{U2} = 1.45.

بالإعتماد على الجدول رقم **(9.2)** يمكن أن نستخرج نتيجة إختبار(**DW**)، وبالإستعانة بالشكل رقم **(3.2)** الذي يوضح قيم d (القيم الجدولية الإختبارية)، ونلاحظ أن قيمة(**DW**) تقع ضمن مجال $[4 - du \text{، } 2]$، أي عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء وهذا يدل على أن النموذج جيد.

ومن خلال الإختبارات الإحصائية التي أجريت على النموذج يمكن القول أن النموذج المقدر مقبول من الناحية الإحصائية.

✓ **النموذج الرابع : علاقة نصيب السهم من صافي الأرباح بأسعار الأسهم**

من خلال الجدول رقم **(10.2)** نتحصل على :

- **إختبار المعنوية للنموذج** :

1- **المعنوية الجزئية "معنوية المعالم المقدرة"** : من خلال مخرجات برنامج Eviews نلاحظ أن القيمة الاحتمالية **(Prob)** تساوي **0.0184 ≥ 0,05** ومنه نرفض الفرضية H_0: β_1 = **0**، ونقبل الفرضية H_1: $\beta_1 \neq$ **0**، أي أن $\beta 1$ يختلف معنويا عن الصفر بمستوى دلالة **5%**، وبالتالي هناك علاقة ذات دلالة إحصائية بين**x4** والمتغير التابع **y**، أي أن القيم المقدرة لديها معنوية إحصائية.

2- **المعنوية الكلية** : يمكن إختبار المعنوية الكلية للنموذج من خلال إحصائية فيشر، ونلاحظ من النموذج المقدر أن الإحتمالية الإحصائية لفيشر تقدر ب**0.018376** وهي أقل من مستوى المعنوية **5 %** ومنه للنموذج معنوية إحصائية.

- **معامل التحديد "قوة إرتباط النموذج"** :

إن المعادلة المقدرة $\mathbf{Y = \beta0 + \beta4x4}$ تفسر لنا **22.77%** من التغيرات الإجمالية للمتغير التابع **y** في الفترة 2009-2012 وهي تعبر عن جودة توفيق ضعيفة لهذا النموذج، أما النسبة المتبقية ترجع إلى المتغيرات المفسرة الأخرى غير الداخلة في المعادلة.

- **إختبار الإرتباط الذاتي للأخطاء "إحصائية (Durbin et Watson)"** :

من خلال مخرجات برنامج **Eviews**، نستخرج قيمة **(DW)** حيث تقدر ب **2.546848**، وبرجوع إلى الجدول الإحصائي **(DW)** في الملحق رقم **(11)** لنستخرج قيمة كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ **d** (d_L ،d_U).

حيث لدينا : n (عدد المشاهدات) = 24؛ K (عدد المتغيرات) = 1؛

ومنه : d_{L1} = 1.27، d_{U2} = 1.45.

بالإعتماد على الجدول رقم **(10.2)** يمكن أن نستخرج نتيجة إختبار**(DW)**، وبالإستعانة بالشكل رقم **(3.2)** الذي يوضح قيم **d** (القيم الجدولية الإختبارية)، ونلاحظ أن قيمة**(DW)** تقع ضمن مجال **]** $\mathbf{4 - du}$ ، $\mathbf{2}$ **[**، أي عدم وجود إرتباط ذاتي للأخطاء وهذا يدل على أن النموذج جيد، ومن خلال الإختبارات الإحصائية التي أجريت على النموذج يمكن القول أن النموذج المقدر مقبول من الناحية الإحصائية.

ملاحظة : تشير المعلمة التقاطعية $\mathbf{\beta0}$ في معادلة الإنحدار الخطي البسيط إلى أثر العوامل الأخرى المؤثرة على السعر والمستبعدة من علاقة الإنحدار وهذا ما يفسره معامل التحديد، وما يعني أنه بالرغم من تأثير **Xi** في السعر إلا أنه هناك عوامل أخرى تؤثر فيه.

3- نماذج الانحدار الذاتي للظواهر المالية

3-1- مفهوم الانحدار الذاتي وشروط تطبيقها على الظواهر المالية

3-2- ألية تطبيق نماذج الانحدار الذاتي

3-3- قراءة وتكوين نماذج الانحدار الذاتي بالبرامج المتخصصة EVIEWS

3- نماذج الانحدار الذاتي للظواهر المالية

3-1- مفهوم الانحدار الذاتي وشروط تطبيقها على الظواهر المالية

3-1-1- نماذج الانحدار الذاتي (AR):

- **نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى** $AR(1)$:

- **تعريف نموذج** $AR(1)$: تكتب الصيغة الرياضية لهذا النموذج على الشكل التالي:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث: ϕ_1: معامل الارتباط الذاتي.

أي أن القيمة الحالية هي عبارة عن مجموع القيمة السابقة لها والمتغير العشوائي.

- **شروط استقرارية نموذج** $AR(1)$:

باستخدام الصيغة الرياضية لنموذج $AR(1)$ وإدخال معامل التأخير نتحصل على:

$$(1-\phi_1 L)Y_t = \mu + \varepsilon_t$$

وعليه حتى يكون هذا النموذج مستقرا يجب أن تكون جذور كثير الحدود $(1-\phi_1 L)$ أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة.

أي أن شرط الاستقرارية يتمثل فيما يلي:

$$-1 < \phi_1 < 1$$

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج** $AR(1)$:

تكتب دالة الارتباط الذاتي لنموذج $AR(1)$ على الشكل التالي:

$$P_k = \phi_1 P_{k-1} \Leftrightarrow P_k - \phi_1 P_{k-1} = 0$$

إن المعادلة السابقة تمثل معادلة Yule-Walker التي تعطى حلولها على الشكل التالي:

$$P_k = A_1 \lambda_1^k$$

حيث:

$\frac{1}{\lambda_1}$: يمثل جذر $\Phi_1(L) = 0$.

A_1 : ثوابت محددة بالشروط الابتدائية.

أين:

$$\frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{\phi_1}\Leftrightarrow \lambda_1=\phi_1$$

وإذا كان لدينا:

$$\mathrm{P}_k=\mathrm{A}_1\phi_1^k$$

من أجل $k=0$ تتحصل على:

$$\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_1\phi_1^0=1=\mathrm{P}_0$$
$$\mathrm{P}_k=\phi_1^k$$

ومنه يمكن التمييز بين حالتين هما:

- إذا كان $0<\phi_1<1$ فإن دالة الارتباط الذاتي تتناقص بشكل أسي.
- إذا كان $-1<\phi_1<0$ فإن دالة الارتباط الذاتي تتناقص بشكل جيبي.

- **دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج** AR(1):

من أجل $\phi>1$ لدينا:

$$\phi_k=0$$

$$\phi_1\neq 0$$

ومنه يمكن القول أن دالة الارتباط الذاتي للنموذج AR(1) تنعدم بعد التأخر الأول.

- **نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية** AR(2):

- **تعريف نموذج** AR(2): إن الصيغة الرياضية لهذا النموذج تكتب على الشكل التالي:

$$Y_t=\mu+\phi_1Y_{t-1}+\phi_2Y_{t-2}+\varepsilon_t$$

أي أن المشاهدة الحالية Y_t هي عبارة عن المجموع المرجح للقيمتين السابقتين Y_{t-1} و Y_{t-2} مضاف إليه العنصر العشوائي ε_t.

- **شروط استقرارية نموذج** AR(2):

إذا كانت لدينا السلسلة الزمنية المستقرة المركزة Y_t المعرفة بالصيغة التالية:

$$Y_t=\phi_1Y_{t-1}+\phi_2Y_{t-2}+\varepsilon_t\Leftrightarrow\left(1-\phi_1L-\phi_2L^2\right)Y_t=\varepsilon_t\Leftrightarrow(1-\mu_1L)(1-\mu_2L)Y_t=\varepsilon_t$$

حيث:

μ_1 و μ_2: هما جذرا المعادلة $f(Z)=Z^2-\phi_1Z-\phi_2$.

ويكون حل المعادلة $\varepsilon_t=(1-\mu_1L)(1-\mu_2L)Y_t$ كما يلي:

$$Y_t = \left[\frac{1}{(1-\mu_1 L)(1-\mu_2 L)}\right]\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\mu_1^{j+1}-\mu_2^{j+2}}{\mu_1-\mu_2}\right)\varepsilon_{t-j}$$

أي أنه حتى تكون السلسلة مستقرة لابد من تحقق الشروط التالية:

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$\phi_2 + \phi_1 < 1$$

$$|\phi_2| < 1$$

- دالة الارتباط الذاتي لنموذج AR(2):

إذا كانت لدينا جملة معادلات Yule-Walker التالية:

$$\begin{cases} \sigma_Y^2(1-\phi_1 P_1 - \phi_2 P_2) = \sigma_\varepsilon^2 & k=0 \\ (P_1 - \phi_1 P_0 - \phi_2 P_1) = 0 & k=1 \\ (P_2 - \phi_1 P_1 - \phi_2 P_0) = 0 & k=2 \\ (P_k - \phi_1 P_{k-1} - \phi_2 P_{k-2}) = 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

بحل جملة المعادلات السابقة نحصل على الحلول التالية:

$$P_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

$$P_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2$$

$$P_k = 0 \quad k > 2$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي لنموذج AR(2) تنعدم بعد التأخر الثاني.

- دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج AR(2):

تأخذ دالة الارتباط الذاتي الجزئية لهذا النموذج القيم التالية:

$$\Psi_{11} = P_1$$

$$\Psi_{22} = \frac{P_1 - \Psi_{11}P_1}{1-\Psi_{11}P_1} = \frac{P_2 - P_1^2}{1-P_1^2}$$

$$\Psi_{21} = P_1 - \Psi_{22}P_1 = \frac{P_1(1-P_2)}{1-P_1^2}$$

$$\Psi_{33} = 0$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج AR(2) تنعدم بعد الفجوة الزمنية الثانية.

3- نماذج الانحدار الذاتي للظواهر المالية

- **نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة** p AR(p):

- **تعريف نماذج** AR(p): نقول عن سلسلة من المتغيرات العشوائية المتتابعة أنها تشكل نموذج انحدار ذاتي من الرتبة p إذا وجدت ثوابت $\phi_1,\phi_2,\phi_3..........\phi_P$. ويكتب هذا النموذج على الشكل:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + ... + \phi_p Y_{t-P} + \varepsilon_t$$

حيث:

Y_t : تمثل قيم المتغير Y المتنبأ بها.

$Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, ..., Y_{t-P}$: تمثل قيم المتغير Y_t المتأخرة زمنيا خلال الفترة t.

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_P$: معاملات الارتباط الذاتي.

ε_t : الضجة البيضاء.

كما يمكن كتابة هذا النموذج باستعمال معامل التأخير كما يلي:

$$\Phi(L)Y_t = \mu + \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = \Phi^{-1}(L)\mu + \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t$$

بعبارة أخرى:

$$\left(1 - \phi_1 L^1 - \phi_2 L^2 - .... - \phi_P L^P\right)Y_t = \mu + \varepsilon_t$$

حيث:

$\Phi^{-1}(L)$: مقلوب كثير الحدود $\Phi(L)$.

- **شروط استقرارية نماذج** AR(p):

انطلاقا من العبارة التالية:

$$Y_t = \Phi^{-1}(L)\mu + \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t$$

نقول عن السياق العشوائي Y_t أنه مستقر إذا كانت قيم العبارة $\Phi^{-1}(L)\varepsilon_t$ تؤول إلى الصفر كلما زادت قيمة t أو إذا كانت قيم جذور كثير الحدود $\Phi(L)$ أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة.

- **دالة الارتباط الذاتي لنماذج** AR(p):

باستخدام علاقة الانحدار الذاتي يمكن إيجاد عبارة التغاير الذاتي التالية:

$$\gamma_k = \mathrm{E}(Y_t Y_{k-1}) = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + ... + \phi_P\gamma_{k-P} + \mathrm{E}(\varepsilon_t Y_{t-k})$$

بقسمة العبارة السابقة على γ_0 نتحصل على صيغة الارتباط الذاتي الآتية:

$$P_k = \phi_1 P_{k-1} + \phi_2 \mathrm{P}_{k-2} + ... + \phi_{\mathrm{P}} \mathrm{P}_{k-\mathrm{P}} + \mathrm{E}(\varepsilon_t Y_{t-k})$$

أي أن:

$$P_k - \phi_1 P_{k-1} - \phi_2 \mathrm{P}_{k-2} - \dots\dots\dots - \phi_\mathrm{P} \mathrm{P}_{k-\mathrm{P}} = 0$$

ومنه:

$$P_k \left(1 - \phi_1 L_1 - \dots\dots - \phi_\mathrm{P} L^\mathrm{P}\right) = 0$$

إن المعادلة السابقة تمثل معادلة Yule–Walker التي تعطى حلولها على الشكل التالي:

$$\mathrm{P}_k = \mathrm{A}_1 \lambda_1^k + \dots\dots + \mathrm{A}_p \lambda_p^k$$

حيث:

$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots\dots\dots, \frac{1}{\lambda_\mathrm{P}}$: جذور العبارة الجبرية $\Phi_\mathrm{P}(L) = 0$.

$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots\dots, \mathrm{A}_\mathrm{P}$: ثوابت محددة بالشروط الابتدائية.

وعليه يمكن القول أن دالة الارتباط الذاتي لنموذج $AR(p)$ تتناقص أسيا أو جيبيا.

- دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنماذج AR(p):

تحسب دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنماذج $AR(p)$ انطلاقا من جملة Yule–Walker التالية:

$$\begin{cases} P_1 = \phi_1 + \phi_2 P_1 + \dots\dots\dots\dots\dots + \phi_p P_{p-1} \\ P_2 = \phi_1 P_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \phi_p P_{p-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ P_p = \phi_1 P_{p-1} + \phi_2 P_{p-2} + \dots\dots + \phi_p \end{cases}$$

حيث تمثل حلول هذه الجملة والمتمثلة في قيم المعالم $\phi_1, \phi_2, \dots\dots\dots \phi_p$ ما يسمى بدالة الارتباط الذاتي الجزئية لهذه النماذج، والتي يمكن إثبات أنها تنعدم بعد الفجوة الزمنية p.

3-1-2- نماذج المتوسطات المتحركة (MA):

- نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى(1)MA:

- تعريف نموذج MA(1): إن نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى $MA(1)$ يكتب على الشكل التالي:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

كما يمكن كتابة هذا النموذج باستعمال معامل التأخير كما يلي:

$$Y_t = \mu + (1 - \theta_1 L)\varepsilon_t$$

حيث: Y_t : قيم المتغير Y المتنبأ بها. θ_1 : معامل المتوسط المتحرك. μ : الثابت.

ε_t : تمثل القيمة المتأخرة للبواقي من تقدير Y_t والتي تحقق الشروط التالية:

$$E(\varepsilon_t)=0$$
$$V(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2$$
$$Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-k})=0$$

- **شروط استقرارية وانعكاسية نموذج** MA(1):

لدينا:

$$Y_t=\mu+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}$$

ومنه:

$$E(Y_t)=\mu$$
$$Var(Y_t)=E(Y_t-\mu)^2=E(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1})=\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)$$
$$\gamma_1=(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1}-\theta_1\varepsilon_{t-2})=-\theta_1\sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma_2=(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2}-\theta_2\varepsilon_{t-3})=0$$

وعلى العموم:

$$\gamma_k=0 \qquad \forall k>1$$

من خلال النتائج المتحصل عليها يظهر أن شروط استقرارية نموذج $MA(1)$ لا تفرض قيد على المعلمة θ_1، أما شرط انعكاسية نموذج $MA(1)$ فهو يتمثل فيما يلي:

$$|\theta_1|<1$$

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج** MA(1): إن دالة الارتباط الذاتي لنموذج MA(1) تكتب على الشكل الآتي:

$$\begin{cases} P_k=\dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} & k=1 \\ P_k=0 & k\geq 2 \end{cases}$$

وهذا يعني أن دالة الارتباط الذاتي لنموذج MA(1) تنعدم بعد فجوة زمنية واحدة.

- **دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج** MA(1): يتميز تحليل دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج MA(1) بالتعقد، وتعطى الصيغة الرياضية لهذه الدالة على الشكل التالي:

$$\Psi_{kk} = \frac{-\theta_1^k\left(1-\theta_1^2\right)}{\left(1-\theta_1^{2(k+1)}\right)}$$

أما القيمة الابتدائية لهذه الدالة فهي تتمثل فيما يلي:

$$\Psi_{11} = \mathrm{P}_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي الجزئية تنعدم بعد فجوة زمنية واحدة إذا كانت المعلمة θ_1 موجبة.

- نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانيةMA(2):

- **تعريف نموذج** MA(2): يمكن تعريف نماذج المتوسطات المتحركة $MA(2)$ بالعلاقة التالية:

$$Y_t = u + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

كما يمكن كتابة هذا النموذج باستعمال معامل التأخير كما يلي:

$$Y_t = \mu + \left(1-\theta_1 L - \theta_2 L^2\right)\varepsilon_t$$

- **شروط استقرارية وانعكاسية نموذج** MA(2):

إن شروط استقرارية نموذج $MA(2)$ لا تفرض أي قيد على المعلمتين θ_1 و θ_2. أما شروط الانعكاس فهي تتمثل فيما يلي:

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$
$$\theta_2 + \theta_1 < 1$$
$$-1 < \theta_2 < 1$$

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج** MA(2):

إن دالة الارتباط الذاتي لنموذج $MA(2)$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{P}_1 = \frac{\theta_1(\theta_2-1)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\mathrm{P}_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\mathrm{P}_k = 0 \qquad k \geq 3$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي لهذا النموذج تنعدم بعد الفجوة الزمنية الثانية.

- **دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج** MA(2): يتميز تحليل دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج $MA(2)$ بالتعقد وتتمثل القيمة الابتدائية لهذه الدالة فيما يلي:

$$\Psi_{11} = P_1$$

أما القيم الموالية فلا يمكن تحديدها من الصيغة العامة.

- **نماذج المتوسطات المتحركة من الرتبة q** MA(q):

- **تعريف نماذج** MA(q): يمكن تعريف نماذج المتوسطات المتحركة MA(q) بالعلاقة التالية:

$$Y_t = u + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - ..... - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

كما يمكن كتابة هذا النموذج باستعمال معامل التأخير كما يلي:

$$Y_t = \mu + \left(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - .... - \theta_q L^q\right)\varepsilon_t$$

- **شروط استقرارية نماذج** MA(q): من خلال شروط استقرارية النموذجين $MA(1)$ و $MA(2)$ نستنتج أن نماذج المتوسطات المتحركة $MA(q)$ هي نماذج مستقرة، وبالتالي شروط الاستقرارية لا تفرض أي قيد على المعالم $\theta_1, \theta_2, ...\theta_q$. غير أنه لا يكون لهذه النماذج أي معنى إلا إذا كانت قابلة للانعكاس.

- **شروط انعكاسية نماذج** MA(q): لدينا:

$$Y_t = u + \Theta(L)\varepsilon_t$$

$$Y_t - u = \Theta(L)\varepsilon_t$$

حيث:

$$\Theta(L) = \left(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - .... - \theta_q L^q\right)$$

ومنه:

$$\varepsilon_t = \Theta^{-1}(L)[Y_t - \mu]$$

وبالتالي حتى تكون نماذج MA(q) قابلة للانعكاس يجب أن تكون جذور المعادلة المتجانسة $\Theta(L)\varepsilon_t = 0$ أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة.

- **دالة الارتباط الذاتي لنماذج** MA(q): يعرف التغاير الذاتي بالصيغة الرياضية التالية:

$$\begin{cases} \gamma_k = E(Y_t Y_{t-1}) & k > 0 \\ \gamma_k = \left(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + ... + \theta_{q-k}\theta_q\right)\sigma_\varepsilon^2 & 1 < k \le q \\ \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2\left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2\right) & k = 0 \\ \gamma_k = 0 & k > q \end{cases}$$

ومنه تكتب دالة الارتباط الذاتي لهذه النماذج على الشكل الآتي:

$$P_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + ... + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2} \qquad 0 < k \le q$$

$$P_k = 0 \qquad\qquad k > q$$

وهذا يعني أن دالة الارتباط لنموذج $MA(q)$ تنعدم بعد فجوة زمنية q.

- **دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنماذج MA(q)**: يتميز تحليل دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنماذج $MA(q)$ بالتعقد الأمر الذي يتطلب القيام بعملية المقاربة، وذلك بتعميم النتائج المحصل عليها انطلاقا من الحالة الخاصة بنموذج $MA(1)$ فنحصل على:

3-1-3- النماذج المختلطة:

- **النموذج المختلط** ARMA$(1,1)$:

- **تعريف نموذج** ARMA$(1,1)$: تكتب الصيغة الرياضية لهذا النموذج على الشكل:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

أي أن هذا النموذج هو مزيج بين نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى ونموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى.

- **شروط استقرارية وانعكاسية نموذج** ARMA$(1,1)$: لدينا :

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

أما عبارة التغاير الذاتي فتعطى على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \mathrm{E}\left[\left(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}\right) Y_t\right] \\
&= \mathrm{E}\left(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}\right)^2 \\
&= \phi_1^2\, \gamma_0 - 2\phi_1 \theta_1 + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2 \left(1 - 2\theta_1 \phi_1 + \theta^2{}_1\right)}{\left(1 - \phi_1^2\right)}
\end{aligned}$$

وحتى تكون قيمة γ_0 موجبة لابد أن تكون قيمة $|\phi_1| < 1$ وهو شرط استقرارية نموذج $ARMA(1,1)$، أما شرط الانعكاس فهو

$|\theta_1| < 1$.

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج** ARMA$(1,1)$: يعرف التغاير الذاتي لهذا النموذج على الشكل التالي:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \left(1 - 2\theta_1 \phi + \theta^2{}_1\right)}{\left(1 - \phi_1^2\right)}$$

$$\gamma_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \left(\phi_1 - \theta_1\right)\left(1 - \phi_1 \theta_1\right)}{\left(1 - \phi_1^2\right)}$$

ولما تكون $k > 1$ فإن:

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}$$

ومنه يكون شكل دالة الارتباط الذاتي لهذا النموذج كما يلي:

$$P_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$

$$\mathbf{P_2 = \frac{\phi_1 P_1}{1}}$$

$$P_k = \Phi_1^{K-1} P_1$$

من خلال الصيغة الرياضية لدالة الارتباط الذاتي يظهر أن قيمتها وشكلها يعتمدان على قيمة المعلمة ϕ_1، ويمكن التمييز بين حالتين:

- إذا كانت قيمة المعلمة ϕ_1 موجبة فإن دالة الارتباط الذاتي لهذا النموذج تتناقص أسيا.
- أما إذا كانت قيمة المعلمة ϕ_1 سالبة فإن دالة الارتباط الذاتي لهذا النموذج تتناقص جيبيا.

– **دالة الارتباط الجزئية لنموذج** ARMA(1,1): من الصعب تحديد الصيغة الإجمالية لدالة الارتباط الذاتي الجزئية لهذا النموذج وعليه يمكن إعطائها القيم الابتدائية التالية:

$$\Psi_{11} = P_1$$

$$\Psi_{22} = \frac{\theta_1(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{(1-\phi_1\theta_1)(1-\phi_1\theta_1+\theta_1^2)-\theta_1^3(\phi_1-\theta_1)}$$

وهذا يعني أن دالة الارتباط الجزئي تتناقص أسيا أو جيبيا.

– **النموذج المختلط** ARMA(p,q):

– **تعريف نموذج** ARMA(p,q): يمكن كتابة هذا النموذج على الشكل التالي:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots + \phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots\ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

أي:

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

حيث: Y_t : قيمة ممركزة.

– **شروط استقرارية نموذج** ARMA(p,q): يكون السياق العشوائيARMA(p,q) مستقرا إذا كانت كل جذور المعادلة المتجانسة $\Phi(L)Y_t = 0$ أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة.

أما شرط الانعكاس فيتحقق إذا كانت كل جذور المعادلة المتجانسة $\Theta(L)\varepsilon_t = 0$ أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة.

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج** ARMA(p,q): إن التغاير الذاتي لهذا النموذج يعرف بالصيغة الرياضية التالية:

$$\gamma_k = \mathrm{E}(Y_t Y_{t-k}) \qquad k > 0$$

وبقسمة العبارة السابقة على γ_0 نتحصل على صيغة الارتباط الذاتي التالية:

$$P_K = \phi_1 P_{k-1} + \phi_2 \mathrm{P}_{k-2} + \ldots\ldots\ldots + \phi_\mathrm{P} \mathrm{P}_{k-\mathrm{P}}$$

من أجل تحديد شكل دالة الارتباط الذاتي يمكن التمييز بين حالتين:

- إذا كانت رتبة المتوسطات المتحركة (MA) أقل من رتبة الانحدار الذاتي (AR) تتناقص دالة الارتباط بشكل أسي وجيبي وذلك حسب القيم الابتدائية للمعاملات $\mathrm{P}_q, \mathrm{P}_{q-1}\cdots\cdots$ وحلول المعادلة $\Phi_p(L)\mathrm{P}_k = 0$.

- أما إذا كانت رتبة المتوسطات المتحركة (MA) أكبر من رتبة الانحدار الذاتي (AR) تتناقص دالة الارتباط بشكل أسي وجيبي ما عدا القيم الأولية $(q+p-1)$ وتتجه دالة الارتباط نحو الصفر كلما زادت قيمة k.

- **دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج** ARMA(p,q) : إن دالة الارتباط الذاتي الجزئية للنموذج المختلط ARMA(p,q) تأخذ شكل دالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج المتوسطات المتحركة بعد الفجوة الزمنية p أي أن هذه الدالة تتناقص بشكل أسي انطلاقا من $k > p$.

3-1-4- النماذج غير المستقرة:

- **النماذج المختلطة المركبة** ARIMA(p,d,q): يسمى هذا النوع من النماذج بالنماذج المتجانسة غير المستقرة أو المختلطة المركبة من الدرجة d، تتميز هذه النماذج بعدم الاستقرار، ولإزالته يجب استعمال طريقة مناسبة لمصدر عدم الاستقرار فتطبق طريقة الفروقات من درجة مناسبة لإزالة المركبة الموسمية أو مركبة الاتجاه العام. وتكتب هذه النماذج على الشكل التالي:

$$\Phi(L)(1-L)^d Y_t = \mu + \Theta(L)\varepsilon_t$$

- **النماذج الموسمية:** إن المعطيات السنوية في الغالب ما تكون ذات مركبة موسمية، ويمكن نمذجة هذه المعطيات كما يلي:

-نماذج الانحدار الذاتي الموسمي SAR(p) .

-نماذج المتوسطات المتحركة الموسمية SMA(q).

-النماذج الموسمية المختلطة SARMA (p,q).

-النماذج التكاملية الموسمية SARIMA تسمح هذه النماذج بالقيام بعدد من التكاملات نظرا لوجود المركبة الموسمية، وذلك باستعمال العلاقة التالية:

$$(1-L^S)Y_t = Y_t - Y_{t-S}$$

حيث: S: الدورية.

3-2- ألية تطبيق نماذج الانحدار الذاتي

- **طريقة بوكس . جنكيز لتحليل السلاسل الزمنية العشوائية:** لقد اقترح الباحثان بوكس وجنكيز عام 1970 طريقة جديدة في تحليل نماذج السلاسل الزمنية عن طريق الاهتمام بجمع بعض التقنيات المستعملة للمساعدة على تخصيص مراتب النموذج وتقدير معالمه ثم اقتراح بعض الطرق للتأكد من صلاحية النموذج لأخذ شكله النهائي.

إن السلاسل الزمنية غير المستقرة والمتجانسة يمكن أن تنمذج على شكل نماذج $ARIMA(p,d,q)$. ويكون المشكل التطبيقي هو كيفية اختيار القيم الثلاثة (p,d,q) ولهذا تستعمل طريقة بوكس . جنكنز من أجل:

- تحديد أحسن نموذج من النمط ARIMA الذي يصف السياق العشوائي لسلسلة المشاهدات أو السلسلة الناتجة عن تحويل السلسلة الزمنية الأصلية.
- تقدير النموذج.
- استعمال النموذج من أجل التنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة.

أي أن هذه الطريقة تستعمل من أجل الحصول على نموذج يصف ويشرح تذبذبات السلسلة الزمنية عن طريق قيمها السابقة.

إن تكوين نماذج ARIMA يعتمد على أربعة مراحل أساسية، وهي:

- مرحلة التمييز أو التعرف.
- مرحلة التقدير.
- مرحلة التشخيص.
- مرحلة التنبؤ.

3- نماذج الانحدار الذاتي للظواهر المالية

ففي مرحلة التعرف، يتم اختيار رتبة الفروق اللازمة لتحقيق استقرارية السلسلة الزمنية المدروسة، كما يتم تحديد درجة كثير الحدود المناظرة لنماذج الانحدار الذاتي ونماذج المتوسطات المتحركة اللازمة لتمثيل نموذجها تمثيلا صحيحا.

أما في مرحلة التقدير، يتم تقدير معالم النموذج باستعمال تقنيات إحصائية كفئة، والحصول على الأخطاء المعيارية للمعالم المقدرة، ثم إجراء اختبار الفرضيات.

في الأخير، يتم تشخيص النماذج المقترحة للتأكد من مدى ملائمة النموذج المختار للبيانات المدروسة، واختبار قوته الإحصائية، ثم استعماله في التنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة المدروسة أو استبدال النموذج في حالة عدم ملائمته ودراسة النموذج البديل للوصول إلى النموذج الصحيح.

- **مرحلة التعرف:** إن أصعب مرحلة في مراحل بناء نماذج السلاسل الزمنية هي مرحلة التعرف حيث يتم فيها الحكم على استقرارية السلسلة الزمنية وتحديد النماذج الممكنة وذلك بإتباع الخطوات التالية:

- **الحكم على استقرارية السلسلة الزمنية:** يتم التأكد من استقرارية السلسلة الزمنية من خلال دراسة دالة الارتباط الذاتي التي يوضح منحناها البياني وجود مركبة الاتجاه العام أو وجود المركبة الموسمية أو كليهما، والقيام بمختلف الاختبارات الإحصائية.

- **تحليل دالة الارتباط الذاتي:** تعتبر دالة الارتباط الذاتي مؤشرا مهما لكشف عدم استقرارية السلسلة الزمنية، وهذا عندما لا تنعدم هذه الدالة قبل فترة زمنية تعادل ربع عدد المشاهدات، كما أنها تعتبر كاشف مهم للمركبة الموسمية من خلال القمم والانخفاضات التي تظهر بشكل منتظم.

وللتأكد من استقرارية السلسلة الزمنية نقوم بإجراء الاختبار الموالي على قيم معاملات دالة الارتباط الذاتي P_k:

$$\begin{cases} H_0 : P_k = 0 \\ H_1 : P_k \neq 0 \end{cases}$$

يعتمد هذا الاختبار على مقارنة قيمة إحصاءة t الجدولية والمحسوبة، ولقد بين Quenouille أنه إذا كان حجم العينة كبيرا $n > 30$ فإن المعامل P_k يتبع بالتقريب التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم وانحراف معياري $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ويعرف مجال ثقة المعامل P_k كما يلي:

$$P_k = \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

فإذا كانت قيمة المعامل $\hat{P}_k$ تقع خارج مجال الثقة فهذا يعني أن قيمته تختلف عن الصفر عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

- **اختبار** Dickey–Fuller: يسمح هذا الاختبار بالكشف عن مركبة الاتجاه العام وتحديد أحسن طريقة لتحويل السلاسل الزمنية غير المستقرة إلى سلاسل مستقرة. يعتمد هذا الاختبار على ثلاثة نماذج، وهي:

النموذج الأول: $$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

النموذج الثاني: $$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \mu$$

النموذج الثالث: $$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta t + \mu$$

يتمثل مبدأ هذا الاختبار في اختبار الفرضية التالية:

$$H_0 : \phi_1 = 1$$

وهذا يعني أن السلسلة غير مستقرة.

فالنسبة لهذه الفرضية لا يمكن تطبيق القواعد المعروفة للاستدلال الإحصائي من أجل اختبارها وخاصة توزيع Student للمعلمة ϕ_1 لذلك قام Dickey–Fuller بدراسة التوزيع التقريبي لمقدر المعلمة ϕ_1 ووضع جدول للقيم الحرجة لعينات من أحجام مختلفة مشابه لجدول Student وفي هذه الحالة يصبح النموذج كما يلي:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow Y_t - Y_{t-1} = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t - Y_{t-1} \Rightarrow \Delta Y_t = (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ولهذا يفضل اختبار قيمة $(\phi_1 - 1)$ عوضا عن ϕ_1 وتصبح الفرضية H_0 كما يلي:

$$H_0 : \phi_1 - 1 = 0$$

إن المبادئ العامة للاختبار تتمثل فيما يلي:

- تقدير المعلمة ϕ_1 باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية للنماذج الثلاثة.
- تقدير المعالم والانحراف المعياري للنموذج باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية وهو ما يشكل احصاءة $t_{\hat{\phi}_1}$ المماثلة لإحصاءة Student ثم مقارنتها بالقيمة الجدولية واتخاذ القرار على الشكل التالي:

إذا كانت $t_{\hat{\phi}_1} > t$ تقبل الفرضية H_0 والسلسلة الزمنية غير مستقرة.

- **اختبار** Dickey-Fuller **المطور**(Augmenté): يختلف هذا النموذج عن النموذج السابق في كون أن النموذج الأول يفترض أن السياق ε_t هو عبارة عن ضجة بيضاء وفي الحقيقة لا يوجد أي سبب حتى يفترض عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء. ينص مبدأ هذا الاختبار على اختبار الفرضية التالية:

$$H_1 : |\phi_1| < 1$$

يتم تقدير النماذج الثلاثة السابقة باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية ويصبح لدينا النماذج التالية:

النموذج الرابع:
$$\Delta Y_t = pY_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

النموذج الخامس:
$$\Delta Y_t = pY_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t + \mu$$

النموذج السادس:
$$\Delta Y_t = pY_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t + \mu + bt$$

إن هذا الاختبار يتم بنفس طريقة الاختبار السابق مع وجود اختلاف في الجداول الإحصائية المستعملة ويمكن تحديد قيمة p حسب معيار $Akaike$ ويقدر النموذج بـ $p-1$ تأخر ثم $p-2$ تأخر حتى الوصول إلى المعامل المعنوي p.

- **تحديد النموذج المناسب:** في هذه المرحلة يتم تحديد النموذج الذي تخضع له السلسلة الزمنية المدروسة، وذلك من خلال دراسة دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئية. والجدول الموالي يلخص خصائص دالة الارتباط الذاتي الجزئية ودالة الارتباط الذاتي.

جدول: خصائص دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الجزئية لنماذج بوكس . جنكنز.

السياق العشوائي	دالة الارتباط الذاتي	دالة الارتباط الذاتي الجزئية
AR(1)	تتناقص أسيا أو جيبيا	تنعدم بعد التأخر الأول
AR(2)	تتناقص أسيا أو جيبيا	تنعدم بعد التأخر الثاني
AR(p)	تتناقص أسيا أو جيبيا	تنعدم بعد التأخر P
MA(1)	تنعدم بعد التأخر الأول	تتناقص أسيا أو جيبيا
MA(2)	تنعدم بعد التأخر الثاني	تتناقص أسيا أو جيبيا أو كليهما

MA(q)	تنعدم بعد التأخر q	تتناقص أسيا أو جيبيا
ARMA(1,1)	تتناقص ابتداءا من التأخر الأول	تتناقص أسيا أو جيبيا
ARMA(p,q)	تتناقص جيبيا أو أسيا بعد (q - p) تأخر	تتناقص جيبيا أو أسيا بعد (p - q) تأخر

- **مرحلة التقدير:** بعد الانتهاء من مرحلة التعرف، وتحديد النماذج الممكنة يتم الانتقال إلى مرحلة تقدير معالم النماذج كما يلي:

- **تقدير معالم نماذج الانحدار الذاتي:** في هذا النوع من النماذج، وبعد تحديد الرتبة p، يكون من السهل تقدير المعالم $\phi_1,\phi_2,.........,\phi_p$ وذلك باستعمال إحدى الطرق التالية:

- **طريقة معادلات Yule-Walker:** حسب هذه الطريقة يتم استعمال معاملات دالة الارتباط الذاتي لتقدير معالم نماذج الانحدار الذاتي من خلال إتباع الخطوات التالية:

إذا كانت لدينا جملة معادلات Yule-Walker التالية:

$$\begin{cases} P_1 = \phi_1 + \phi_2 P_1 + ... + \phi_p P_{p-1} \\ P_2 = \phi_1 P_1 + \phi_2 + ... + \phi_P P_{p-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ P_p = \phi_1 P_{p-1} + \phi_2 P_{p-2} + ... + \phi_p \end{cases}$$

وبتعويض معاملات الارتباط الذاتي للمجتمع P بمعاملات الارتباط الذاتي للعينة Γ_p نتحصل على الحل التالي:

$$\hat{\Phi} = A^{-1}\Gamma_p$$

- **الطريقة الانحدارية:** تستعمل هذه الطريقة لتقدير معالم نماذج الانحدار الذاتي المركزة المعرفة بالصيغة الرياضية التالية:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

وبسبب مشكل الانطلاق، تتم مرحلة التقدير ابتداءا من الفترة $t = p+1$. بالتعويض نجد:

$$\begin{cases} Y_{p+1} = \phi_1 Y_p + \phi_2 Y_{p-1} + \dots\dots\dots + \phi_p Y_1 + \varepsilon_{p+1} \\ Y_{p+2} = \phi_1 Y_{p+1} + \phi_2 Y_p + \dots\dots\dots\dots + \phi_p Y_2 + \varepsilon_{p+2} \\ Y_{p+3} = \phi_1 Y_{p+2} + \phi_2 Y_{p+1} + \dots\dots\dots\dots + \phi_p Y_3 + \varepsilon_{p+3} \\ \vdots \\ Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots\dots\dots\dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \end{cases}$$

وباستعمال طريقة المصفوفات نجد الحل التالي:

$$\hat{\Phi} = (Y'Y)^{-1} Y'X$$

حيث:

$$X = \begin{bmatrix} Y_{P+1} \\ Y_{P+2} \\ Y_{P+3} \\ \vdots \\ Y_t \end{bmatrix}$$

- تقدير معالم نماذج المتوسطات المتحركة والمختلطة:

إن تقدير نماذج MA(q) و $ARMA(p,q)$ أعقد بكثير من حيث التقدير من النماذج الانحدارية، كونها غير خطية في المعالم من جهة وعدم مشاهدة متغير الأخطاء من جهة أخرى. فيتم تحديد معالم القسم الانحداري وقسم المتوسطات المتحركة $ARMA(p,q)$ معا، أو معالم قسم المتوسطات المتحركة لوحدها في نموذج $MA(q)$.

ففي حالة النموذج المختلط العام التالي:

$$Y_t -_t \phi_1 Y_{t-1} - \dots\dots\dots - \phi_p Y_{t-P} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots\dots\dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

كما يمكن كتابته على الشكل الموالي:

$$\Phi(L) Y_t = \Theta(L) \varepsilon_t$$

وبافتراض إمكانية قلب المعامل $\theta(L)$ فإن:

$$\varepsilon_t = \Phi(L) Y_t \Theta^{-1}(L)$$

إن هذه العبارة غير خطية المعالم، و بالتالي يتطلب تقديرها تطبيق إحدى طرق التقدير غير الخطي الموالية:

- **طريقة البحث التشابكي:** لتوضيح هذه الطريقة ندرج المثال التالي لنموذج $ARMA(1,1)$ الذي يكتب على الشكل التالي:

$$(1-\phi_1 L)Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

ومنه:

$$Y_t = \frac{1}{(1-\phi_1 L)}(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})$$

$$= \frac{1}{(1-\phi_1 L)}\varepsilon_t - \frac{\theta_1}{(1-\phi_1 L)}\varepsilon_{t-1}$$

ومنه يصبح لدينا:

$$Y_t = V_t - \theta_1 V_{t-1}$$

حيث:

$$V_t = \frac{1}{(1-\phi_1 L)}\varepsilon_t$$

ومن هذه المعادلة وبتعويض θ_1 بقيمتها التي تقع ضمن المجال $|\theta_1| < 1$ من أجل تحقيق شرط الانعكاس، وبتوفير القيم الابتدائية لـ V_t وباستعمال طريقة المربعات الصغرى يمكن تقدير المعلمة ϕ_1 كما يلي:

$$\hat{\phi}_1^{(1)} = \frac{\sum_t V_t^{(1)} V_{t-1}^{(1)}}{\sum_t \left(V_{t-1}^{(1)}\right)^2}$$

حيث:

$V^{(1)}$: مابين قوسين يمثل دليل التكرار، وفي هذه الحالة معناه التكرار الأول.

ثم نعيد تكرار كل الخطوات السابقة على كل القيم التي تنتمي إلى المجال التعويض لـ θ ثم نختار المقدرات $\left(\hat{\theta}^{(i)}, \hat{\phi}^{(i)}\right)$ التي تقابلها أصغر قيمة لمجموع مربعات البواقي.

كما تجدر الإشارة إلى أن هذه الطريقة تصبح غير فعالة إذا كانت قيمة $q > 2$ لصعوبة عملية الحساب.

- **طريقة أعظم احتمال** (Maximum de vraisemblance): فالتقدير بهذه الطريقة يتوقف أساسا على تحقق التوزيع الطبيعي، كما تعتمد مبدأ تدنئة مجموع مربعات البواقي، أي:

$$MinS(\hat{\phi}) = \sum \varepsilon_t^2$$

حيث يتم اختيار مقدرات لشعاعي المعالم الخاصة بالقسمين الانحداري أو المتوسطات المتحركة $\Phi=(\phi_1,\phi_2,........\phi_p)$ و $\Theta=(\theta,\theta_2,.........\theta_q)$، التي تسمح بتدنئة مجموع مربعات البواقي، أي:

$$MinS(\hat{\phi},\hat{\theta})=\sum e_t^2$$

حيث:

$$e_t=\hat{\Phi}(L)Y_t\hat{\Theta}^{-1}(L)$$

نشير إلى أن هذه الطريقة تحتاج إلى توفير قيم ابتدائية خاصة بالمتغير Y_t مثل $Y_0,Y_{-1},..........Y_{-P}$.

- مرحلة الفحص والتشخيص:

بعد الانتهاء من تحديد وتقدير معالم النموذج، يتم في مرحلة التشخيص اختبار القوة الإحصائية للنموذج وذلك بإتباع الخطوات الموالية:

- اختبار معالم النموذج:

نظرا للتوزيع الطبيعي التقاربي لمعالم النموذج العشوائية بوسط معدوم وتباين معين، فإن إحصاءة كل من Student و *Fisher* تصبح غير مبررة الاستعمال، وكبديل لها نستعمل التوزيع الطبيعي وتوزيع χ^2.

وتعطى إحصاءة هذا الاختبار على الشكل التالي:

$$|T_C|=\left|\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sigma(\hat{\beta}_j)}\right|\rightarrow N(0,1)$$

ينص مبدأ هذا الاختبار على اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases}H_0:\beta_j=0\\H_1:\beta_j\neq 0\end{cases}$$

كما أن اختبار مجموعة من المعالم آنيا يتم بواسطة الإحصاءة χ^2 والمعطاة وفق العلاقة التالية:

$$\frac{RRSS-URSS}{URSS/t}\rightarrow \chi_m^2$$

حيث: m: عدد المعالم المراد اختبارها. $RRSS$: مجموع مربعات البواقي تحت الفرضية H_0.

$URSS$: مجموع مربعات البواقي تحت الفرضية H_1.

ويتم اتخاذ على الشكل التالي:

إذا كانت $|T_c|>1.96$ نرفض الفرضية H_0 وهذا يعني أن المعلمة $\hat{\beta}_j$ معنوية.

- تحليل البواقي:

إن تحليل البواقي يتم من خلال:

*** رسم دالة الارتباط الذاتي الكلية والجزئية للبواقي:**

يتم رسم دالة الارتباط الذاتي الكلية والجزئية للتأكد أن معالمها تقع داخل مجال المعنوية المعبر عنه بالصيغة التالية:

$$|\Gamma_k| \le \frac{2}{\sqrt{T}}$$

*** اختبار Box-Pierce:**

يسمح هذا الاختبار بإظهار وجود سياق الضجة البيضاء الذي يتميز بقيم معدومة لـ P_k وتتمثل فرضياته فيما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2 = \ldots\ldots = \mathrm{P}_k \\ H_1 : \exists! \mathrm{P}_k \neq 0 \end{cases}$$

ومن أجل تحقيق هذا الاختبار نستعمل إحصاءة Box-Pierce التي تتبع تقريبا توزيع χ^2 والمعرفة كما يلي:

$$\varphi = T \sum_{k=1}^{h} \Gamma_k^2 (e_t)$$

حيث : k: عدد التأخرات. Γ_k: الارتباط التجريبي من الرتبة k. T: عدد المشاهدات.

ويتم اتخاذ القرار على الشكل التالي: إذا كانت $\varphi > \chi^2_{(1-\alpha)}$ نرفض فرضية الضجة البيضاء.

*** اختبار Ljung-Box:**

يسمح هذا الاختبار بإظهار وجود سياق الضجة البيضاء، وتعطى إحصائيته في الشكل الرياضي التالي:

$$\varphi' = T(T+2) \sum_{k=1}^{h} \frac{\Gamma_k^2 (e_t)}{T-k}$$

ويتم اتخاذ القرار على الشكل التالي:

تقارن قيمة إحصاءة Ljung-Box مع قيمة χ^2 الجدولية وإذا كانت $\varphi' > \chi^2_{(1-\alpha)}$ نرفض فرضية الضجة البيضاء.

- **مقارنة النماذج:** إن النماذج غير المرفوضة بواسطة الأدوات الإحصائية تتم المفاضلة بينها بواسطة المعايير التالية:

- **معيار** AKAIKE: تعطى علاقة هذا المعيار على الشكل التالي:

$$AIC = \hat{\sigma}^2 \exp\left(2\left(\frac{p+q}{T}\right)\right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_t^{\,2}}{T}$$

كما يمكن كتابة هذا المعيار في شكله أللوغاريتمي كما يلي:

$$AIC = Ln\left(\hat{\sigma}^2\right) + \left(2\left(\frac{p+q}{T}\right)\right)$$

وبسبب إعطائه وزن أكبر للنماذج المستعملة لأكبر عدد من المشاهدات عدلت صيغته الرياضية على النحو التالي:

$$NAIC = \frac{AIC}{T}$$

ويتم اختيار النموذج الذي يحقق أصغر قيمة للمعيار AIC.

- **معيار** Shwarz: رغبة في تحقيق خصائص تقاربية قام Shwarz بتعديل المعيار السابق كما يلي:

$$BIC = Ln\hat{\sigma}^2 + \frac{(p+q)}{T} Ln(T)$$

ويتم اختيار النموذج الذي يحقق أصغر قيمة لهذا المعيار.

- **مرحلة التنبؤ:** إن الهدف من التنبؤ هو استعمال النموذج المقدر في فترة زمنية معطاة، من أجل تقدير القيم المستقبلية.

  - **التنبؤ بالنقطة:** يمكن استعمال نموذج $ARIMA$ المقدر لحساب التنبؤ $\hat{Y}_t^{(m)}$، حيث نحسب أولا التنبؤ بفترة واحدة في المستقبل ثم نستعمل هذا الأخير لحساب التنبؤ بفترتين ، ونواصل بنفس الطريقة حتى نصل إلى التنبؤ بالفترة m.

فإذا كان لدينا نموذج التالي:

$$W_t = \phi_0 W -_t \phi_1 W_{t-1} - \phi_2 W_{t-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots + \phi_p W_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots\ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \mu$$

كما يمكن كتابة هذا النموذج بإدخال معامل التأخير كما يلي:

$$W_t = (1-L)^d Y_t$$

فإذا كانت $m > q$ و $m > p$ فإن التنبؤ يصبح:

$$\hat{W}_t^{(m)} = Y_t + \hat{W}_t^{(1)} + \hat{W}_t^{(2)} + ...+ \hat{W}_t^{(m)}$$

حيث:

$$\hat{W}_t^{(1)} = \mathrm{E}[W_{t+1} / W_t ,......, W_1] = \phi_1 W_t + ...\phi_p W_{t-p+1} - \theta_1 e_t - ..... - \theta_q e_{t-q+1} + \mu$$

$$\hat{W}_t^{(2)} = \mathrm{E}[W_{t+2} / W_t ,......, W_1] = \phi_1 W_t^{(1)} + \phi_2 W_t + ...\phi_p W_{t-p+2} - \theta_1 e_t - ..... - \theta_q e_{t-q+2} + \mu$$

ثم نعود للسلسلة الأصلية Y_t بواسطة تطبيق القانون:

$$W_t = (1-L)^d Y_t \Rightarrow Y_t = (1-L)^{-d} W_t$$

حيث يتم تعويض القيم الحالية والسابقة للمشاهدات بقيمها الفعلية والقيم اللاحقة بقيمها المتوقعة. أما فيما يخص الصدمات العشوائية فتعوض القيم السابقة والحالية بالقيم الفعلية للبواقي

وتعوض القيم المتوقعة بالصفر.

○ **التنبؤ بمجال:** بالإضافة إلى الحصول على نقطة التنبؤ، فقد نرغب في كثير من الحالات في قياس عدم التأكد حول هذه النقطة، فإذا كان النموذج العام هو $ARMA(p,q)$:

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t \Leftrightarrow Y_t = \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}\varepsilon_t$$

ومنه:

$$Y_t = \psi(L)\varepsilon_t$$

$$\psi(L) = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + ...)$$

في هذه الحالة وباعتماد مستوى الثقة $1-\alpha = 0.95$ فإن مجال التنبؤ يعطى بالشكل:

$$\hat{Y}_t(h) \pm 1.96 \hat{\sigma}_{\varepsilon_t} \left(1 + \sum_{j=1}^{h-1} \psi_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_t} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e_t^{\ 2}}$$

3-3- قراءة وتكوين نماذج الانحدار الذاتي بالبرامج المتخصصة EVIEWS

إذا أردنا بيان أثر عرض النقد M_1 على مستوى الأسعار CPI في الأردن سوف نستخدم المعادلة التالية:

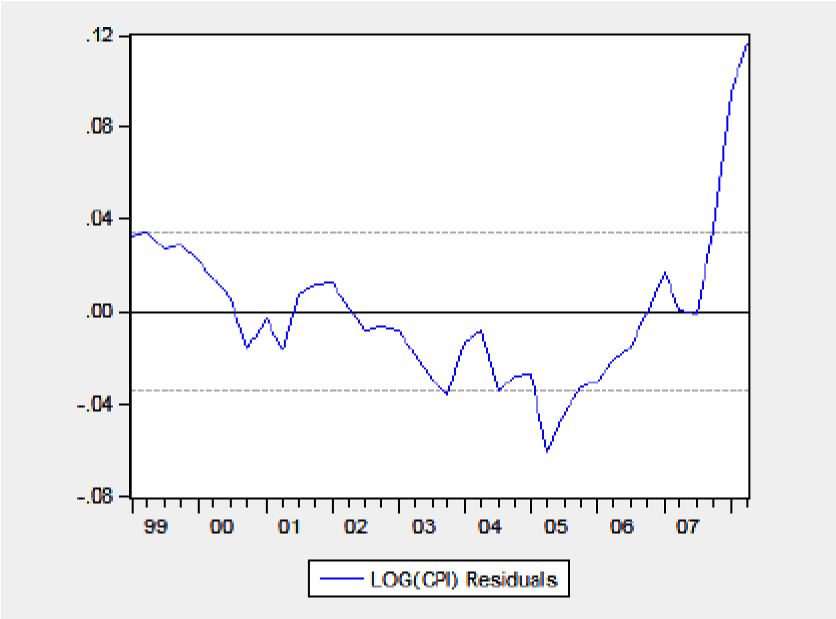
$$ln(CPI_t) = \beta_1 + \beta_2 ln(M1_t) + e_t$$

واستخدمنا t في هذا المثال للإشارة إلى مشاهدات السلاسل الزمنية، وبعد تقدير هذه المعادلة سينصب اهتمامنا على اختبار بواقيها residuals الناتجة من تقديرها، ونستخدم الأمر **series ehat = resid** لتخزين البواقي في **ehat**، ولعرضها انقر نقرتين على **ehat** واختر **View/spreadsheet** فتظهر القيم كما يلي:

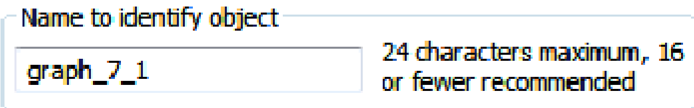
	EHAT
1999Q1	0.032576
1999Q2	0.034500
1999Q3	0.027181
1999Q4	0.028333
2000Q1	0.021671
2000Q2	0.014526
2000Q3	0.005574
2000Q4	-0.015303
2001Q1	-0.003306
2001Q2	-0.016803
2001Q3	0.007448
2001Q4	0.011393

2005Q2	-0.060782
2005Q3	-0.043561
2005Q4	-0.033144
2006Q1	-0.030097
2006Q2	-0.021726
2006Q3	-0.015413
2006Q4	-0.001056
2007Q1	0.016921
2007Q2	0.000991
2007Q3	-0.000515
2007Q4	0.035267
2008Q1	0.095192

ونرسم البواقي خلال الزمن، ويظهر أن البواقي الموجبة تميل إلى إتباع البواقي الموجبة وتميل البواقي السالبة إلى إتباع البواقي السالبة، وتشير الإشارة (-) إلى ارتباط ذاتي موجب، وللحصول على الرسم نجري التالي: **View/Actual, Fitted, Residual/ Residual Graph** سيظهر الشكل:



ولتخزين هذا الشكل انقر على Freeze ثم Name وادخل الاسم المناسب:



وتستطيع الحصول على نفس الرسم بفتح السلسلة ehat واختر **View/Graph/Basic Graph/Line & Symbol** ثم أنقر OK.

- **الارتباط بين بواقي المربعات الصغرى وقيم ابطائها**

إن الارتباط بين بواقي المربعات الصغرى $\hat{e}_t$ وقيم إبطائها (Lagged) $\hat{e}_{t-1}$ مهم لتقييم أخطاء المعادلة وبيان هل هي مرتبطة ذاتياً أم لا؟ ولحساب هذه القيم نبدأ بإنشاء المتغير $\hat{e}_{t-1}$ ونسميه ehat_1 باستخدام الأمر:

series ehat_1 = ehat(-1)

وهذا يؤخر المشاهدات فترة واحدة للخلف، ولحساب الارتباط من الدرجة الأولى نقدر المعادلة التالية:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_{t-1}^2}$$

يمكن حساب البسط numerator والمقام denominator باستخدام الأوامر التالية:

series ee1 = ehat*ehat_1

scalar sum_ee1 = @sum(ee1) $\left(= \sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} \right)$

series e1e1 = ehat_1*ehat_1

scalar sum_e1e1 = @sum(e1e1) $\left(= \sum_{t=2}^{T} \hat{e}_{t-1}^2 \right)$

قمنا بإنشاء سلسلتين جديدتين هما $\hat{e}_t \hat{e}_{t-1}$ و $\hat{e}_{t-1}^2$ وأوجدنا مجموع كل منهما، مع أن المشاهدة الأولى لكليهما غير متوفرة **NA**، والحصول على مجموعهما $\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} = 0.03064$ و $\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_{t-1}^2 = 0.02997$ يؤدي إلى القيمة r_1:

$$r_1 = \frac{0.030}{0.030} = 1.0$$

أو نستخدم الأمر التالي:

```
scalar r1 = @cor(ehat, ehat_1)
```

وقد تختلف القيمة عن قيمة المعادلة أعلاه، والسبب في ذلك حذف المشاهدات الأولى أو المشاهدات الأخيرة وبذلك يكون المتوسط الحسابي لعينة $\hat{e}_t$ لا يساوي صفر وهي العينة التي تستخدمها الدالة @cor:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T}\left(\hat{e}_t - \bar{\hat{e}}_{-1}\right)\left(\hat{e}_{t-1} - \bar{\hat{e}}_{-T}\right)}{\sum_{t=2}^{T}\left(\hat{e}_{t-1} - \bar{\hat{e}}_{-T}\right)^2}$$

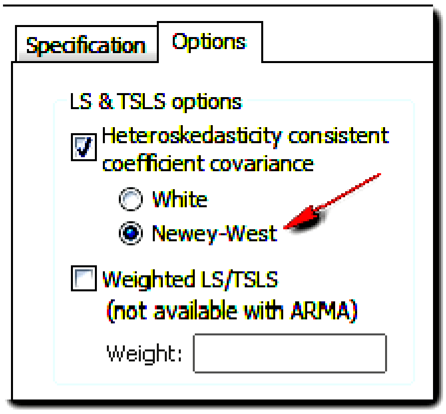
حيث أن $\bar{\hat{e}}_{-1}$ الوسط الحسابي لـ $\hat{e}_{-1}$ الذي يستثني المشاهدة الأولى وكذلك $\hat{e}_{-T}$

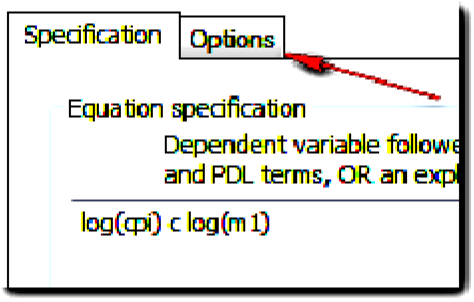
ولحساب r_1 نتبع ما يلي:

```
series ee = ehat*ehat
scalar sum_ee = @sum(ee)
scalar r1_c = sum_ee1/sum_ee
```

- **الأخطاء المعيارية:**

عندما اخترنا Heteroskedasticity استخدمنا اختبار White، بالإضافة لذلك فإن هذا الاختبار يتضمن خياراً لاختبار الارتباط الذاتي لنموذج الانحدار، وفي هذه الحالة يسمى الخطأ المعياري Newey-West أو الخطأ المعياري HAC، ولحساب الخطأ المعياري Newey-west لمثال التضخم، اختر **Options** من نافذة **Estimation Equation** ثم اختر **Options** **LS&TSLS**، ثم اختر **heteroskedasticity-consistent coefficient covariance** واختر **Newey-West**





ستصحح نتائج المربعات الصغرى الخطأ المعياري:

- نتائج المربعات الصغرى قبل التصحيح:

Dependent Variable: LOG(CPI)
Method: Least Squares
Date: 02/06/10 Time: 08:37
Sample: 1999Q1 2008Q2
Included observations: 38

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.735015	0.120834	22.63443	0.0000
LOG(M1)	0.246650	0.015161	16.26917	0.0000

- بعد التصحيح:

Dependent Variable: LOG(CPI)
Method: Least Squares
Date: 02/08/10 Time: 20:21
Sample: 1999Q1 2008Q2
Included observations: 38
Newey-West HAC Standard Errors & Covariance (lag truncation=3)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.735015	0.237617	11.51020	0.0000
LOG(M1)	0.246650	0.030523	8.080650	0.0000

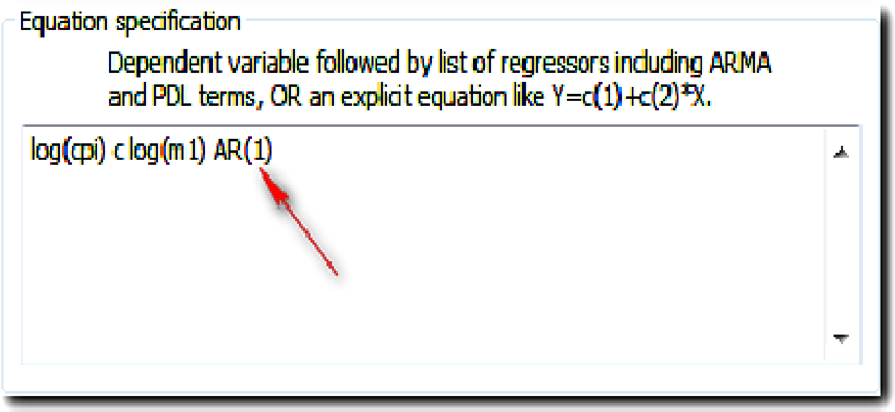
- تقدير نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى

نستمر مع مثال التضخم على فرض أن الأخطاء (البواقي) تتبع نموذج $AR(1)$، وحسب النموذج التالي:

$$\ln(CPI_t) = \beta_1 + \beta_2 \ln(M1_t) + e_t, \qquad e_t = \rho e_{t-1} + \upsilon_t \square$$

المعلمات الأساسية المراد تقديرها هي: β_1 و β_2 و ρ وتباين الخطأ σ_υ^2 و σ_e^2، ونصف الإجراءات التي تؤدي إلى تقدير التباين σ_υ^2، وتحتاج إلى تقدير ρ و σ_υ^2 ونستطيع تقدير σ_e^2 من العلاقة $\sigma_e^2 = \sigma_\upsilon^2/(1-\rho^2)$.

لتقدير نموذج $AR(1)$ للخطأ اختر **Object/New Object/Equation** وانقر OK، سيظهر مستطيل **Equation Estimation** وادخل أسماء السلاسل المراد تضمينها في المعادلة ثم أضف $AR(1)$ إلى المعادلة لتخبر EViews أن الأخطاء تتبع نموذج $AR(1)$



عليك ملاحظة ما يلي:

١- تقدير $\hat{\rho} = 1.102648$ يظهر بجانب اسم $AR(1)$

٢- الخطأ المعياري للانحدار S.E. of regression هو تقدير للخطأ المعياري

$$\hat{\sigma}_\upsilon = 0.012189$$

Dependent Variable: LOG(CPI)
Method: Least Squares
Date: 02/06/10 Time: 09:05
Sample (adjusted): 1999Q2 2008Q2 ☐الإبطاء أدى إلى فقدان مشاهدة واحدة
Included observations: 37 after adjustments تكرارات تقدير المقدر غير الخطي
Convergence achieved after 7 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4.558856	0.351815	12.95809	0.0000
LOG(M1)	0.004146	0.04824	0.085946	0.9320
AR(1) $(\hat{\rho})$	1.102648	0.029236	37.71503	0.0000

R-squared	0.985606	Mean dependent var	4.701671
Adjusted R-squared	0.984759	S.D. dependent var	0.098737
S.E. of regression $(\hat{\sigma}_v)$	0.012189	Akaike info criterion	-5.89888
Sum squared resid	0.005052	Schwarz criterion	-5.76827
Log likelihood	112.1293	Hannan-Quinn criter.	-5.85283
F-statistic	1164.028	Durbin-Watson stat	1.794578
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots	1.10
	Estimated AR process is nonstationary

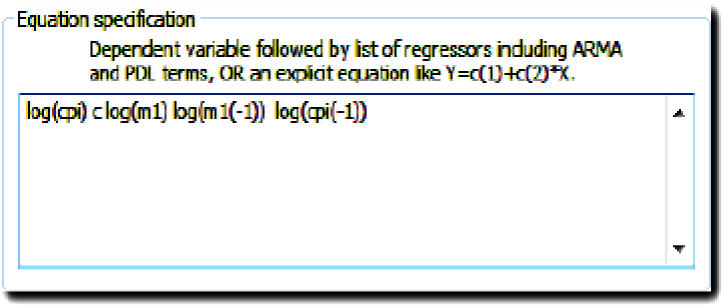
٣- المتغيرات المبطأة في المعادلة تؤدي إلى خسارة مشاهدة واحدة، ويغير EViews العينة **Sample** تلقائياً من 2008Q2 1999Q1 إلى Sample (adjusted): 1999Q2 2008Q2 ويتضمن التقدير ٣٧ مشاهدة.

٤- لاحظ أن التقارب يحصل بعد ٧ محاولات Convergence achieved after 7 iterations لأن طبيعة تقدير المربعات الصغرى غير خطية، وهذا التقدير ليس صيغة لحساب أرقام مطلوبة؛ إنما هو إجراء محاولات منتظمة تختلف فيها قيم المعلمات إلى أن نصل إلى أدنى مجموع لمربع البواقي، وتشير المحاولات السبع إلى ٧ مجموعات مختلفة من المعلمات تمت قبل الوصول إلى أدنى قيمة، فإذا فشلت في الوصول إلى الأدنى ستظهر ملاحظة تقول بأن التقارب لا يتحقق Convergence not achieved

٧_٣_١_ تعميم النموذج

يستخدم EViews CPI(-1) و M1(-1) للإشارة إلى CPI_{t-1} و $M1_{t-1}$ على التوالي، ماذا سيحدث إذا حاولنا تقدير المعادلة باستخدام:

log(CPI) C log(M1) log(M1(-1)) log(CPI(-1))



في هذا النموذج نقدر النموذج:

$$\ln(CPI_t)=\delta+\delta_0\ln(M1_t)+\delta_1\ln(M1_{t-1})+\theta_1\ln(CPI_{t-1})+\upsilon_t$$

المتغيرات في هذا النموذج هي كما في نموذج AR(-1) للأخطاء، لكنه يتضمن ٤ معلمات تشير إلى c و $\log(M1)$ و $\log(CPI(-1))$ و $\log(M1(-1))$، هذا النموذج الأكثر تعميماً يعرف بنموذج ARDL(1,1) الذي يخفض إلى نموذج AR(1) للأخطاء عندما

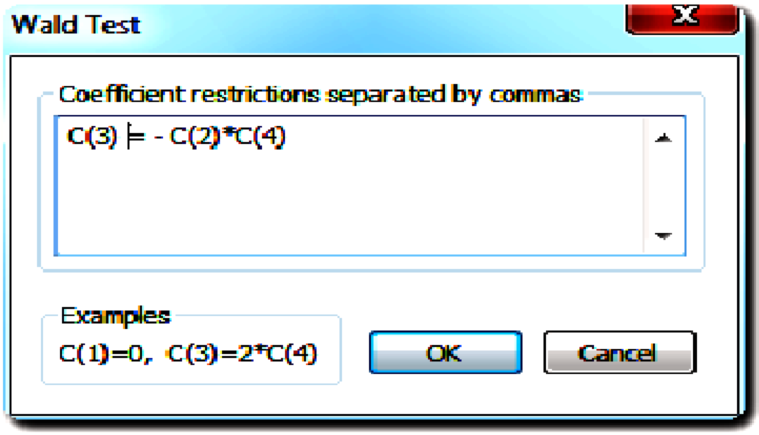
$\delta_1 = -\theta\delta_0$، ونموذج ARDL سيتم شرحه لاحقاً في هذا الفصل، وتظهر النتائج كما يلي:

Dependent Variable: LOG(CPI)
Method: Least Squares
Date: 02/06/10 Time: 11:17
Sample (adjusted): 1999Q2 2008Q2
Included observations: 37 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.582950	0.215846	-2.700768	0.0108
LOG(M1)	-0.009849	0.053403	-0.184438	0.8548
LOG(M1(-1))	-0.001516	0.053952	-0.028100	0.9778
LOG(CPI(-1))	1.145783	0.073898	15.50488	0.0000

- اختبار نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى للأخطاء المقيدة

يمكن اختبار القيد $\delta_1 = -\theta\delta_0$ باستخدام اختبار Wald للفرضية $H_0 : \delta_1 = -\theta\delta_0$ و $H_1 : \delta_1 \neq -\theta\delta_0$ وهو يختلف عن اختبار Wald كما مر في الفصول السابقة؛ لأن الفرضية الحالية هي دالة غير خطية للمعلمات، إلا أننا نستخدم نفس الإجراءات، وبعد تقدير المعادلة اختر **View/Coefficient Test/Wald Coefficient Restriction**، وعلى اعتبار أن $C(2) = \delta_0$ و $C(3) = \delta_1$ و $C(4) = \theta$ تكون الفرضية الأساسية المدخلة إلى اختبار **Wald Test** كما يلي:



أنقر OK نحصل على النتيجة التالية:

Wald Test:
Equation: Untitled

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	0.366691	(1, 33)	0.5490
Chi-square	0.366691	1	0.5448

Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
C(3) + C(2)*C(4)	-0.012801	0.021140

Delta method computed using analytic derivatives.

لأن الفرضية غير خطية فإن صيغة إحصائية F و χ^2 مختلفة، وهذه الصيغة هي مثل delta method التي تستخدم لحساب $se(\hat{\delta}_1+\hat{\theta}_1\hat{\delta}_0)=0.021140$ وبما أن $p-value=0.54>0.05$ لا نستطيع رفض القيد المطبق في نموذج AR(1) للأخطاء. في هذه الحالة فإن **Normalized restriction** هي $\hat{\delta}_1+\hat{\theta}_1\hat{\delta}_0$ = -0.012801

- اختبار الارتباط الذاتي

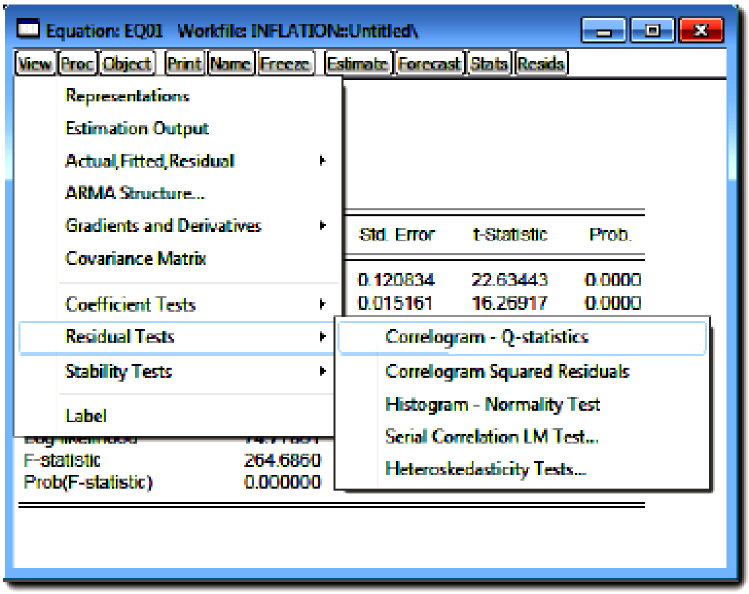
يحدث الارتباط الذاتي عندما ترتبط أخطاء المعادلة e_t مع أي قيم سابقة e_{t-1} أو e_{t-2} أو ... ، أحدى طرق التحري عن إمكانية وجود أي ارتباط حاصل لبواقي المربعات الصغرى e_t واختبار وجود ارتباطات معنوية بين $\hat{e}_t$ و $\hat{e}_{t-1}$ و $\hat{e}_{t-2}$ و ... تختلف عن الصفر، ويسمى تسلسل أو تتابع هذه الارتباطات $r_1, r_2, \ldots$ residual correlogram، على اعتبار الارتباط بإبطاء k $(lag\, k)$ فإن EViews يستخدم لحساب r_k (الارتباط بين $\hat{e}_t$ و $\hat{e}_{t-k}$) الصيغة التالية:

$$r_k=\frac{\sum_{t=k+1}^{T}\hat{e}_t\hat{e}_{t-k}}{\sum_{t=1}^{T}\hat{e}_t^2}$$

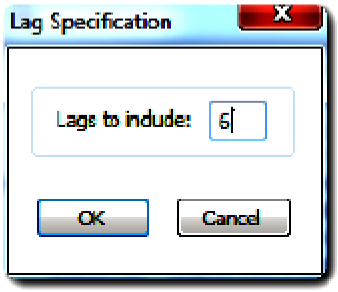
وصيغة أخرى تهمل آخر k في الجمع في المقام وتصبح $\sum_{t=k+1}^{T}\hat{e}_{t-k}^2=\sum_{t=1}^{T-k}\hat{e}_t^2$ والخيار الثالث في EViews هو الدالة $@cor(\hat{e}_t,\hat{e}_{t-1})$ التي تحسب وسط-مصحح للصيغة:

$$r_k=\frac{\sum_{t=k+1}^{T}\left(\hat{e}_t-\bar{\hat{e}}_{[last\ T-k]}\right)\left(\hat{e}_{t-k}-\bar{\hat{e}}_{[first\ T-k]}\right)}{\sum_{t=k+1}^{T}\left(\hat{e}_{t-k}-\bar{\hat{e}}_{[first\ T-k]}\right)^2}$$

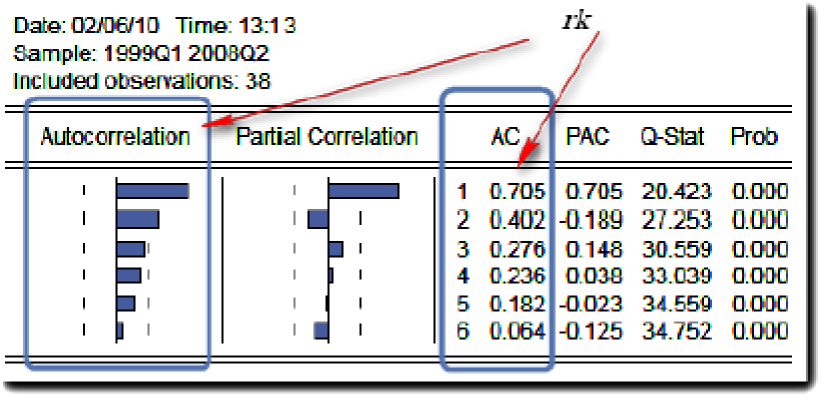
حيث أن $\bar{\hat{e}}_{[last\ T-k]}$ وسط عينة $\hat{e}_t$ للمشاهدة الأخيرة $T-k$ و $\bar{\hat{e}}_{[first\ T-k]}$ وسط عينة $\hat{e}_t$ لأول مشاهدة $T-k$، لذا فإن EViews يزودنا بتقرير عن residual correlogram ويبين كيف نحصل عليه. نعود إلى معادلة المربعات الصغرى ونختار **View/Residual Tests/Correlogram–Q Statistics**



ستظهر شاشة Lag specification، ونحدد عدد فترات الإبطاء في خانة Lags to include وهي عدد الارتباطات $r_1,r_2,\ldots,r_k$ التي ترغب أن يحسبها EViews ونختار ٦ وهو اكبر رقم يمكن اختياره عندما يكون حجم العينة كبيراً.



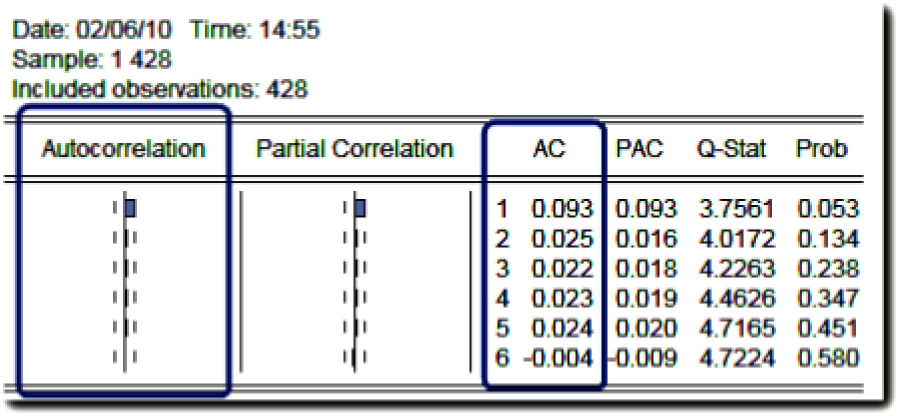
تعرض معلومات r_k بطريقتين: القيم العددية التي تظهر في عمود AC، وشكل الأعمدة يعكس أهمية كل عمود وإشارة كل ارتباط r_k التي يوضحها عمود **Autocorrelation**، والأعمدة الطويلة كثيراً تخفي أحد الخطوط المنقطة مشيراً إلى وجود ارتباط ذاتي وتختلف دلالته عن الصفر عند مستوى معنوية ٥٪؛ أي أن ما بين الخطين المنقطين يدل على عدم وجود ارتباط ذاتي.



Date: 02/06/10 Time: 13:13
Sample: 1999Q1 2008Q2
Included observations: 38

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.705	0.705	20.423	0.000
2	0.402	-0.189	27.253	0.000
3	0.276	0.148	30.559	0.000
4	0.236	0.038	33.039	0.000
5	0.182	-0.023	34.559	0.000
6	0.064	-0.125	34.752	0.000

ارتباط البواقي للإبطاء من ١ إلى ٦ تختلف كثيراً عن الصفر مشيرة إلى وجود ارتباط ذاتي واضح الدلالة عند مستوى معنوية ٥٪.



Date: 02/06/10 Time: 14:55
Sample: 1 428
Included observations: 428

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.093	0.093	3.7561	0.053
2	0.025	0.016	4.0172	0.134
3	0.022	0.018	4.2263	0.238
4	0.023	0.019	4.4626	0.347
5	0.024	0.020	4.7165	0.451
6	-0.004	-0.009	4.7224	0.580

وفي هذا المثال ارتباطات البواقي للإبطاء من ١ إلى ٦ لا تختلف عن الصفر أي لا يوجد ارتباط ذاتي واضح الدلالة عند مستوى معنوية ٥٪.

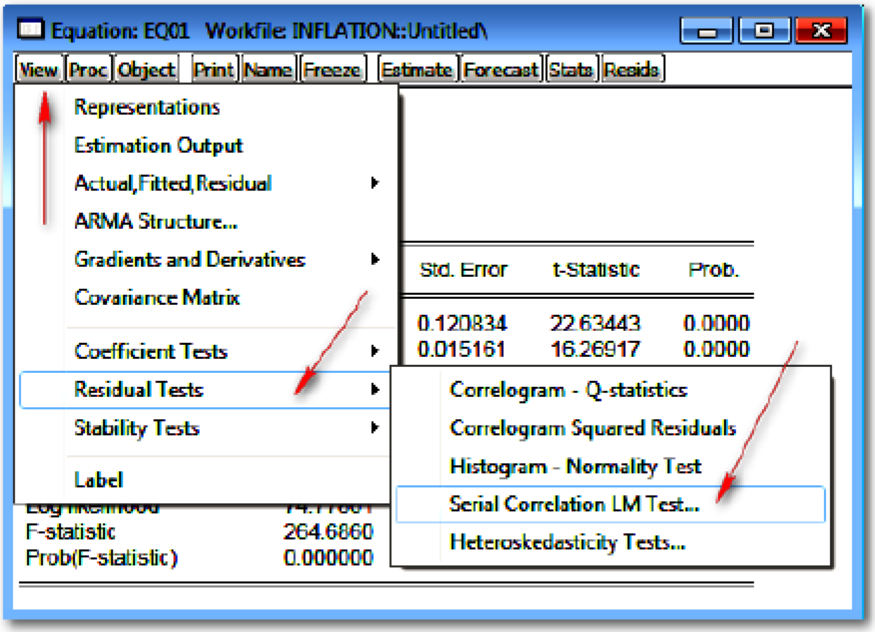
٧-٤-أ-اختبار Lagrange multiplier (LM)

اختبار *Lagrange multiplier* لـ AR(1) للأخطاء هو اختبار لدلالة $\hat{\rho}$، وهو تقدير المربعات الصغرى لأي من المعادلتين:

$$ln(CPI_t) = \beta_1 + \beta_2 ln(M1_t) + \rho \hat{e}_{t-1} + \nu_t$$

$$\hat{e}_t = \gamma_1 + \gamma_2 ln(M1_t) + \rho \hat{e}_{t-1} + \nu_t$$

في كلا الحالتين فإن $\hat{e}_t$ هي بواقي المربعات الصغرى، وسنركز على المعادلة الثانية، وفي كل من المعادلتين فإن نتائج اختبار F و t الناتجة متماثلة لدلالة $\hat{\rho}$، والمعادلة الثانية فيها ميزة إنتاج قيمة الاختبار $LM = T \times R^2$، وللحصول على تلك القيم أعد فتح معادلة المربعات الصغرى المقدرة واختار **View/Residual Test/Serial Correlation LM Test**



سيتم سؤالك عن عدد الابطاءات المراد إدخالها، وفي هذه الحالة نحدد العدد ١ فقط، وينصب اهتمامنا على اختيار AR(1) للأخطاء ولدينا إبطاء واحد للبواقي

$\hat{e}_t$ على الجانب الأيمن للمعادلة، إن correlogram يستخدم للأخذ بعين الاعتبار الخصائص العامة للارتباط الذاتي للبواقي.

Lags to include: 1

تظهر النتائج التالية:

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	107.9563	Prob. F(1,35)	0.0000
Obs*R-squared	28.69646	Prob. Chi-Square(1)	0.0000

107.9563=(10.39020)^2

28.69646=38 * 0.755170

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 02/06/10 Time: 15:37
Sample: 1999Q1 2008Q2
Included observations: 38
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.114854	0.061637	-1.863412	0.0708
LOG(M1)	0.014837	0.007741	1.916751	0.0635
RESID(-1)	1.071043	0.103082	10.39020	0.0000

R-squared	0.755170	Mean dependent var	-2.10E-16

قيم الاختبارين وقيم p-value لها معطاة في أعلى النتائج: قيمة $F = 107.9563$ وهو اختبار لدلالة $\hat{\rho}$، ويظهر معامل البواقي RESID(-1) في منتصف أسفل النتائج، لأن $F = 107.9563 = t^2 = 10.39020^2$، وهذا الاختبار يمكن أن يمثل اختبار t و F و p-value لها 0.0000 هي نفسها في كلا الحالتين، الاختبار الآخر هو اختبار χ^2 بقيمة اختبار معطاة $LM = T \times R^2 = 38 \times 0.755170 = 28.69646$ و p-value=0.0000، في كل من الحالتين فإن الفرضية الأساسية $H_0 = \rho = 0$ ترفض عند مستوى معنوية ٥٪.

- اختبار دارين واتصون

تزودنا نتائج المربعات الصغرى بقيمة دوربن-واتسون بشكل تلقائي، إن اختبار دوربن-واتسون هو اختبار لنموذج AR(1) للأخطاء، وحساب قيمتها الحرجة أو قيمة p-value ليس سهلاً

وشعبيته كاختبار تتناقص، ولا يوجد في EViews أمر لحساب قيمة إحصائية اختبار دوربن-واتسون وللقيمة الحرجة أو p-value، كدليل لروه $rough(\rho)$ فإن قيمة إحصائية داربن-واتسون إذا كانت ١,٣ أو أقل توضح وجود ارتباط ذاتي، وكانت القيمة من تقدير المربعات الصغرى لمعادلة التضخم هي 0.255092

Log likelihood	74.77861	Hannan-Quinn criter.	-3.799788
F-statistic	264.6860	Durbin-Watson stat	$\boxed{0.255092}$
Prob(F-statistic)	0.000000		

- نماذج الانحدار الذاتي

لا تقدر نماذج الانحدار الذاتي لأخطاء أي معادلة فقط؛ إنما يتم تقديرها كذلك لمشاهدات متغيرات تتضمن أكثر من إبطاء يزيد عن ١، فقد نأخذ بعين الاعتبار نموذج AR(3) لمعدل التضخم التالي:

$$infln_t = \delta + \theta_1 infln_{t-1} + \theta_2 infln_{t-2} + \theta_3 infln_{t-3} + v_t$$

دعنا نختبر بعض الخصائص الخاصة لمشاهدات *CPI* و *i n f* في ملف inflation.wf1

٧_٥ تقدير نماذج الانحدار الذاتي AR

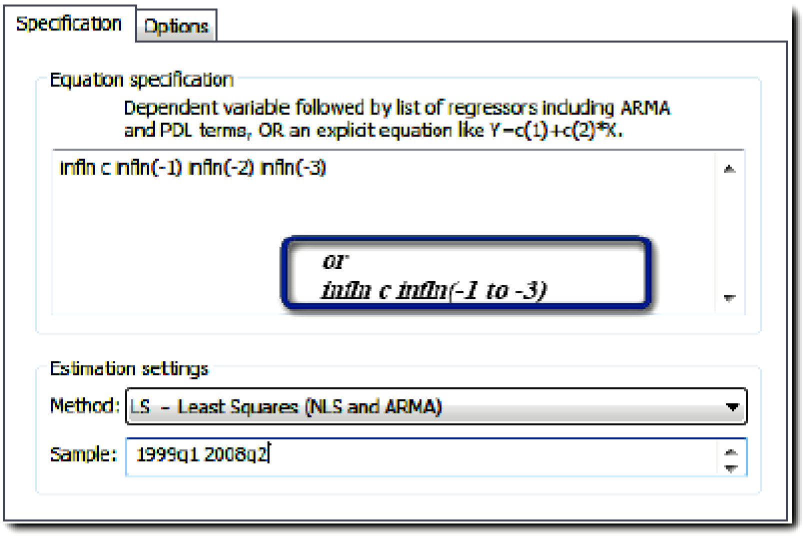
يحتوى ملف inflation.wf1 متغير CPI ويتضمن ٣٨ مشاهدة، ولإنشاء سلسلة *infln* نستخدم الأمر التالي:

series infln = (log(CPI) – log(CPI(-1)))*100

لأننا نحتاج CPI(-1) لحساب infln فإن السطر الأول في الربع الأول من عام ١٩٩٩ لا يتوفر فيه أي مشاهدة ويسجله EViews على أنه NA، وهذا هذا يبقي

٣٧ مشاهدة لتقدير النموذج، ولتقدير النموذج السابق AR(3) نحتاج القيم $infln_{t-1}$ و $infln_{t-2}$ و $infln_{t-3}$ في عملية التقدير وهذا يخفض حجم العينة في التقدير بثلاث مشاهدات إضافية لتصل العينة إلى ٣٤ مشاهدة.

يمكن تقدير نموذج AR باستخدام المربعات الصغرى من خلال نافذة **Equation Estimation**، لكن كيف نستطيع تحديد إبطاء المتغيرات **$infln_{t-1}$** و **$infln_{t-2}$** و **$infln_{t-3}$** كمتغيرات تفسيرية؟ سوف نستخدم الملاحظات التالية: **infln(-1)** و **infln(-2)** و **infln(-3)** وهذه طريقة مختصرة لكتابة هذه المتغيرات الثلاث، أما إذا كان عدد المتغيرات كبيراً فإنه يفضل استخدام الأمر التالي: **infln(-1 to -3)**

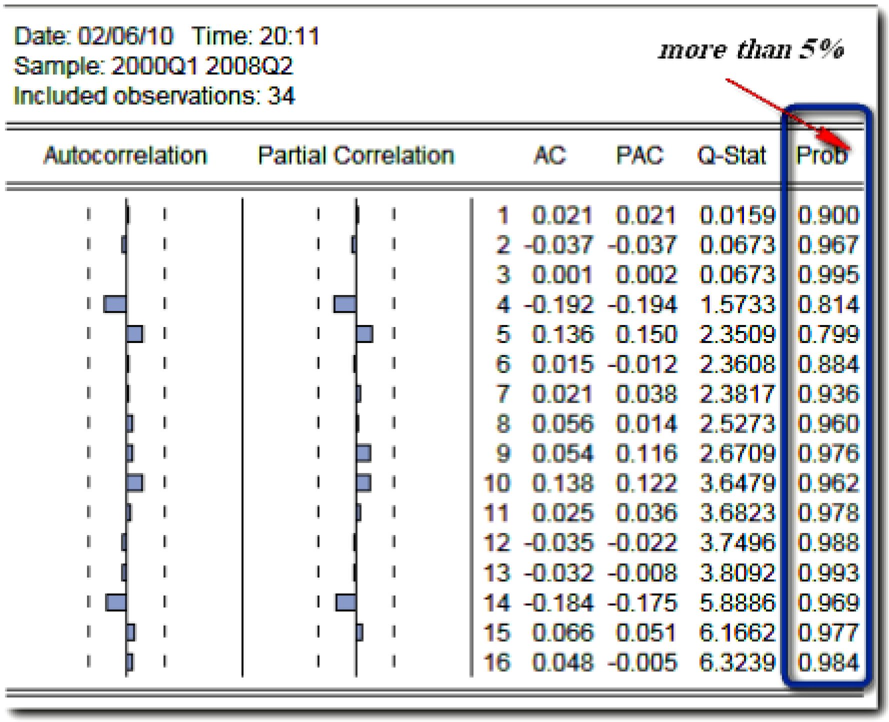


ستظهر النتيجة كما يلي:

Dependent Variable: INFLN
Method: Least Squares
Date: 02/06/10 Time: 19:56
Sample (adjusted): 2000Q1 2008Q2
Included observations: 34 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.490044	0.387947	1.263173	0.2163
INFLN(-1)	0.472852	0.181520	2.604958	0.0142
INFLN(-2)	0.065320	0.259872	0.251353	0.8033
INFLN(-3)	0.092489	0.274626	0.336780	0.7386

بواقي تقدير نموذج AR يجب أن لا تحمل أي ارتباط ذاتي، هذه الحقيقة يمكن فحصها باختبار correlogram البواقي، بعد فتح المعادلة اختر **View/Residual Tests/Correlogram–Q Statistics** سيسألك EViews عن عدد الابطاءات المراد تضمينها، أكتب الرقم ١٦ سيظهر تصوير الارتباط correlogram حيث يكون إبطاء على المحور الصادي والارتباطات على المحور السيني، وبذلك نرى أن الارتباطات جميعها صغيرة جداً وغير ذات دلالة.



Date: 02/06/10 Time: 20:11
Sample: 2000Q1 2008Q2
Included observations: 34

more than 5%

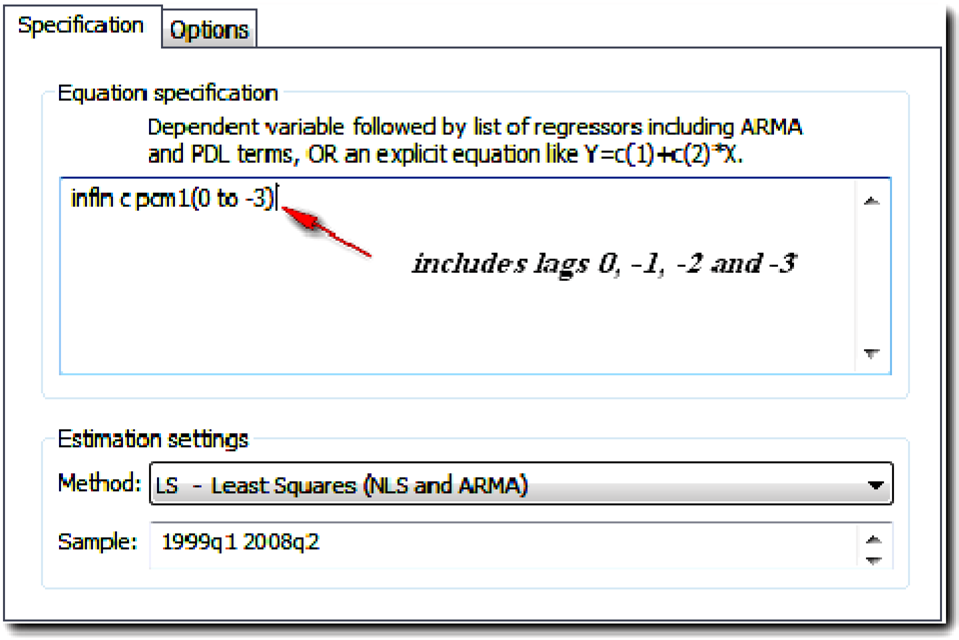
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.021	0.021	0.0159	0.900
2	-0.037	-0.037	0.0673	0.967
3	0.001	0.002	0.0673	0.995
4	-0.192	-0.194	1.5733	0.814
5	0.136	0.150	2.3509	0.799
6	0.015	-0.012	2.3608	0.884
7	0.021	0.038	2.3817	0.936
8	0.056	0.014	2.5273	0.960
9	0.054	0.116	2.6709	0.976
10	0.138	0.122	3.6479	0.962
11	0.025	0.036	3.6823	0.978
12	-0.035	-0.022	3.7496	0.988
13	-0.032	-0.008	3.8092	0.993
14	-0.184	-0.175	5.8886	0.969
15	0.066	0.051	6.1662	0.977
16	0.048	-0.005	6.3239	0.984

- **الابطاء الموزع المحدود**

باستخدام بيانات ملف inflation نقدر نموذج الإبطاء الموزع المحدود المتعلق بمعدل التضخم والتغيرات السابقة في معدلات عرض النقد التالي:

$$infln_t = \alpha + \beta_0\, PCM1_t + \beta_1\, PCM1_{t-1} + \beta_2\, PCM1_{t-2} + \beta_3\, PCM1_{t-3} + v_t$$

حيث تشير PCM1 إلى نسبة التغير في عرض النقد ونكتب النموذج في **Equation Estimation** وذلك لتقدير النموذج:



ستظهر النتيجة كما يلي:

Dependent Variable: INFLN
Method: Least Squares
Date: 02/06/10 Time: 20:30
Sample (adjusted): 2000Q1 2008Q2
Included observations: 34 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.097751	0.736645	1.490205	0.1470
PCM1	0.333605	7.462161	0.044706	0.9646
PCM1(-1)	-5.944889	7.855329	-0.756797	0.4553
PCM1(-2)	4.295207	7.936135	0.541222	0.5925
PCM1(-3)	0.595346	7.787722	0.076447	0.9396

ثم نختبر correlogram للبواقي لاختبار الارتباط الذاتي للبواقي، اختر View/Residual Tests/Correlogram–Q Statistics، فيتم عرض الارتباط في نتائج correlogram في الشكل أدناه، وهناك ارتباط ذاتي ذو دلالة عند الإبطاء ١.

Date: 02/06/10 Time: 20:37
Sample: 2000Q1 2008Q2
Included observations: 34

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.455	0.455	7.6920	0.006
		2	0.108	-0.125	8.1403	0.017
		3	0.012	0.017	8.1460	0.043
		4	-0.038	-0.048	8.2048	0.084
		5	0.150	0.242	9.1484	0.103
		6	0.174	-0.004	10.474	0.106
		7	0.129	0.054	11.225	0.129
		8	0.106	0.032	11.756	0.162
		9	0.130	0.135	12.586	0.182
		10	0.178	0.073	14.194	0.164
		11	0.060	-0.104	14.384	0.212
		12	-0.077	-0.106	14.713	0.258
		13	-0.051	0.046	14.864	0.316
		14	-0.110	-0.161	15.605	0.338
		15	-0.067	-0.035	15.892	0.389
		16	0.009	-0.011	15.897	0.460

4- نماذج التكامل المشترك وتطبيقها على الظواهر المالية

4-1- نماذج أشعة الانحدار الذاتي.

4-2- العلاقة السببية لغرانجر وسيمس بين الظواهر المالية

4-3- مفهوم ومراحل نماذج التكامل المشترك وشروط تحققها بين الظواهر المالية

4-4- تكوين نماذج التكامل المشترك بالبرامج المتخصصة EVIEWS

4- نماذج التكامل المشترك وتطبيقها على الظواهر المالية

4-1- نماذج أشعة الانحدار الذاتي.

إن شعاع الانحدار الذاتي، هو ذلك النظام للمعادلات، بحيث كل متغيرة داخلية هي عبارة عن دالة خطية لقيمها الماضية و القيم الماضية لمتغيرات أخرى من نفس النظام، ومن متغيرات خارجية تساعد على تحديد المتغيرات الداخلية وأطراف أخرى غير عشوائية كالحدود الثابتة، و الدوال كثيرة الحدود للزمن وهكذا أصبح هذا النموذج آلية للتنبؤ الاقتصادي، باستعماله لاختبار النظريات الاقتصادية المتجادل فيها.

1- النموذج العام.

إن نمذجة شعاع الانحدار الذاتي تتركز على فرضية مفادها أن التطور الاقتصادي متقارب لوصف السلوك الديناميكي لشعاع يحتوي على "n" متغيرة ($x=(x_1, x_2, ..., x_n)$) مترابطة خطيا بالماضي .

حيث يمكن نمذجة الشعاع " x " على الشكل التالي :

$$x_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{n} \phi_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

حيث : $x = (x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{nt})'$.

2- المسار VAR (P).

نموذج شعاع الانحدار الذاتي ذو الدرجة " P " يرمز له عموما بـ: VAR(P)، و هو يتكون من k متغيرة ، وله الشكل المصفوفاتي التالي : $x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + ... + A_P x_{t-p} + \varepsilon_t$

حيث : x_t : شعاع بعده ($k+1$) و هو يتكون من :

$$x_t = (x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{nt})'$$

A_i : عبارة عن مصفوفات العوامل ذات البعد ($k \times k$) :

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{1i}^1 & a_{1i}^2 ....a_{1i}^k \\ a_{2i}^1 & a_{2i}^2 ....a_{2i}^k \\ \vdots & \vdots ....\vdots \\ a_{ki}^1 & a_{ki}^2 ....a_{ki}^k \end{bmatrix}$$

A_0: هو شعاع ذو البعد ($k \times k$) للقيم الثابتة :

$$A_0 = (a_1^0, a_2^0, ..., a_k^0)' .$$

ε_t:شعاع الشوشرة البيضاء (bb) ذو البعد ($k \times 1$):

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, ..., \varepsilon_{kt})' .$$

و الشعاع ε_t لابد أن يحقق الفرضيات التالية :

$$i/E(\varepsilon_t)=0.-ii/E(\varepsilon_t\varepsilon_t^{'})=\sum_{\varepsilon}\quad -iii/E(\varepsilon_t\varepsilon_S^{'})=0,\forall\ t\neq s$$

حيث: $\sum_{\varepsilon}$ مصفوفة التباينات المشتركة ذات البعد $(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})$ و غير معروفة.

و باستعمال معامل التأخير (L) يمكن كتابة النموذج على الشكل التالي :

$$x_t=A_0+A_1L^1x_t+.............+A_PL^Px_t+\varepsilon_t$$
$$\left[I_k-A_1L^1-A_2L^2-..............-A_PL^P\right]x_t=A_0+\varepsilon_t$$
$$\Phi\ (L)x_t=A_0+\varepsilon_t$$

حيث:

$$\Phi(L)=I_k-A_1L^1-A_2L^2-..........\ ...-A_PL^P.$$

3- شروط استقرار النموذج VAR(P).

نقول أن النموذج VAR(P) مستقر إذا تحققت الشروط التالية :

$$i/E(x_t)=\mu,\ \forall\ t\in Z$$
$$ii/E(x_t-\mu)^2=\delta_x^2<\infty\ ,\forall\ t\in Z$$
$$iii/Cov(x_t,x_{t\pm h})=\gamma_x(h),\ \forall\ \ t,h\in Z$$

ونقول أيضا أن النموذج VAR(P) أنه مستقر إذا كانت جذور كثير الحدود المعرف انطلاقا من المحدد :

$$\det(I-AZ-A^2Z^2-..........\ ..-A_PZ^P)=0$$

خارج دائرة الدائرة الأحادية.

4- عملية التقدير.

ليكن نموذج شعاع الانحدار الذاتي المستقر $VAR(P)$:

$$x_t=A_0+A_1x_{t-1}+..........\ .+A_px_{t-p}+\varepsilon_t.$$

حيث : ε_t: شعاع الشوشرة البيضاء (bb) ذو البعد $(k\times1)$.

لتقدير معاملات النموذج $VAR(P)$ نستعمل عدة طرق منها:

5- التقدير بطريقة المربعات الصغرى (MCO) : ليكن النموذج $VAR(P)$:

$$x_t=A_0+A_1x_{t-1}+A_2x_{t-2}+........+A_px_{t-p}+\varepsilon_t.........(IV).$$

هذا النموذج يمكن كتابته على الشكل التالي :

$$\Phi\ (L)x_t=A_0+\varepsilon_t.$$

حيث:

$\varepsilon_{tr} \rightarrow BB(0,\sum_{\varepsilon})$.

إن عدد المعلمات الخاضعة لعملية التقدير هو: $\frac{n(n+1)}{2}$ معلمة بالنسبة للمصفوفة $\sum_{\varepsilon}$، n^2P معلمة في Φ.

و منه فمجموع المعلمات الخاضعة لعملية التقدير هو: $n^2P+\frac{n(n+1)}{2}$ معلمة في النموذج كله .

يمكن كتابة المعادلة j على الشكل التالي :

$$x_j = \begin{pmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ \vdots \\ \\ \\ x_{jT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 & & x'_{1-P} \\ x'_1 & & x'_{2-P} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{T-1} & & x'_{T-P} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^1_{1j} \\ a^2_{1j} \\ \vdots \\ a^n_{1j} \\ \vdots \\ a^n_{Pj} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{j1} \\ \varepsilon_{j2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_{jT} \end{pmatrix}$$

.

$$x_j = \underline{\underline{x}} \quad \psi_j + \varepsilon_j$$

حيث : $\underline{\underline{x}}$: مصفوفة ذات البعد $(T\times nP)$، ψ_j: شعاع ذو البعد $(nP\times 1)$، ε_j: شعاع ذو البعد $(T\times 1)$.

و بإعادة تشكيل معادلات النموذج VAR نجد :

$$\begin{matrix} x_1 = \underline{\underline{x}}\psi_1+\varepsilon_1 \\ x_2 = \underline{\underline{x}}\psi_2+\varepsilon_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n = \underline{\underline{x}}\psi_n+\varepsilon_n \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{x}} & 0\ldots\ldots\ldots\ldots0 \\ 0 & \underline{\underline{x}} \quad 0\ldots\ldots\ldots \\ \vdots & \vdots \quad \ddots\underline{\underline{x}} \quad 0\ldots \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \ldots\ldots \\ 0 & 0\ldots\ldots\ldots\ddots\underline{\underline{x}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1T} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nT} \end{pmatrix}$$

حيث : $(\psi_1,\psi_2,\ldots\ldots\ldots,\psi_n)$ شعاع بعده $(n^2P\times 1)$.

$(\varepsilon_{11},\ldots,\varepsilon_{1T},\varepsilon_{21},\ldots,\varepsilon_{2T},\ldots\ldots\varepsilon_{n1},\ldots\ldots,\varepsilon_{nT})$ شعاع بعده $(nT\times 1)$.

مصفوفة التباينات و التباينات المشتركة تصبح كمايلي :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{11}\ldots\ldots 0 \\ 0 \quad \ddots \\ 0\ \ldots\ldots\delta_{11} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \delta_{12}\ldots\ldots 0 \\ 0 \quad \ddots \\ 0\ \ldots\ldots\delta_{12} \end{pmatrix} & \cdots \\ \begin{pmatrix} \delta_{12}\ldots\ldots 0 \\ 0 \quad \ddots \\ 0\ldots\ldots\delta_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \delta_{22}\ldots\ldots 0 \\ 0 \quad \ddots \\ 0\ldots\ldots\delta_{22} \end{pmatrix} & \cdots \\ & & \ddots \\ \vdots & \vdots & \begin{pmatrix} \delta_{nn}\ldots\ldots 0 \\ 0 \quad \ddots \\ 0\ \ldots\ldots\delta_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

من خلال هذه المصفوفة يتضح لنا وجود عدم تجانس الأخطاء (Hétéroscédasticité)، ومنه فإن تطبيق طريقة المربعات الصغرى يصبح غير فعال، لأن المقدرات لا تتميز بالتباين الأدنى رغم أنها غير متحيزة

ومنه نستعمل طريقة المربعات المعممة (Moindres Carrées Généralisés) ، التي تعطينا معلمات مقدرة BLUE (Best Linear Unbaised Estimateur) .

لدينا مصفوفة المتغيرات المفسرة أي X عبارة عن مصفوفات قطرية ($\underline{\underline{X}}$)، ومنه فتطبيق MCO على كل معادلة من معدلات النموذج مكافئ لتقدير معلمات النموذج بطريقة المربعات المعممة (MCG) و هذا حسب نظرية Zellner .

ليكن النموذج : $Y = X\psi + U$.

مقدر طريقة المربعات الصغرى هو :

$$\hat{\psi}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$$

مقدر طريقة المربعات المعممة هو :

$$\hat{\psi}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y.$$

حيث Ω هي مصفوفة التباينات و التباينات المشتركة لـ: ε.

و لدينا :

$$X = \begin{pmatrix} \underline{\underline{x}} & 0\ldots\ldots 0 \\ 0 & \underline{\underline{x}}\ldots\ldots \\ \vdots & \vdots \quad \ddots\ldots 0. \\ 0 & 0\ldots\ldots\underline{\underline{x}} \end{pmatrix} = I \otimes \underline{\underline{x}}.$$

و بالتعويض نجد :

$$X'\Omega^{-1}X = (I\otimes \underline{\underline{x}}')(\Sigma_{\varepsilon}^{-1}\otimes I)(I\otimes \underline{\underline{x}})$$
$$= \Sigma_{\varepsilon}^{-1}\otimes \underline{\underline{x}}'\underline{\underline{x}}$$

إذن نستنتج :

$$(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \Sigma_{\varepsilon}\otimes(\underline{\underline{x}}'\underline{\underline{x}})^{-1}$$

و لدينا :

$$X'\Omega^{-1}Y = (I\otimes \underline{\underline{x}}')(\Sigma_{\varepsilon}^{-1}\otimes I)Y = (\Sigma_{\varepsilon}^{-1}\otimes \underline{\underline{x}}'x)^{-1}Y$$

و بالتعويض نجد :

$$\hat{\psi}_{MCG} = \Sigma_{\varepsilon}\otimes(\underline{\underline{x}}'\underline{\underline{x}})^{-1}\ (\Sigma_{\varepsilon}^{-1}\otimes \underline{\underline{x}}')Y$$

إذن :

$$\hat{\psi}_{MCG} = \begin{pmatrix} (\underline{\underline{x}}'\underline{\underline{x}})^{-1}\underline{\underline{x}}' & 0 & \dots & \dots\dots 0 \\ 0 & (\underline{\underline{x}}'\underline{\underline{x}})^{-1}\underline{\underline{x}}' & 0\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & (\underline{\underline{x}}'\underline{\underline{x}})^{-1}\underline{\underline{x}}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

و منه :

$$\hat{\psi}_{MCG} = \begin{pmatrix} (\underline{\underline{x}}'\underline{\underline{x}})^{-1}\underline{\underline{x}}'x_1 \\ (\underline{\underline{x}}'\underline{\underline{x}})^{-1}\underline{\underline{x}}'x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ (\underline{\underline{x}}'\underline{\underline{x}})^{-1}\underline{\underline{x}}'x_n \end{pmatrix}$$

نستنتج أن استعمال طريقة المربعات المعممة لتقدير كل معلمات النموذج يعطينا تقدير هذه المعلمات بطريقة المربعات الصغرى ، إذا تمت عملية التقدير لكل معادلة على حدا.

6- التقدير بطريقة المعقولية العظمى " Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance"

ليكن لدينا النموذج $VAR(P)$: $x_t = A_0 + A_1x_{t-1} + \dots\dots + A_P x_{t-P} + \varepsilon_t$.

حيث: ε_t : شوشرة بيضاء بمصفوفة التباينات و التباينات المشتركة Σ_{ε}.

الاحتمال الشرطي للنموذج بدلالة القيم الماضية يعطى بالعلاقة التالية :

$$L(x_1, x_2, ..., x_t) = \prod_{t=1}^{T} L(x_t / x_{t-1})$$

حيث: x_{t-1}تمثل القيم الماضية (السابقة) لـ x_t حتى الفترة $(t-1)$.

و منه فالاحتمال يمكن كتابته على الشكل التالي :

$$L(x_1,..., x_T) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{(\sqrt{2\Pi})^n \sqrt{\det \sum_\varepsilon}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(x_t - A_0 - ... - A_P x_{t-P})' \sum_\varepsilon^{-1} (x_t - A_0 - ... - A_P x_{t-P})\right\}$$

نقوم بحساب الدالة اللوغاريتمية للاحتمالات :

$$\log L(x_1, x_2,..., x_T) = \frac{-nT}{2} \log 2\Pi - \frac{T}{2} \log\det \sum_\varepsilon - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t' \sum_\varepsilon^{-1} \varepsilon_t$$

و نقوم بتعظيم الدالة $\log L(x_1, x_2,......, x_T)$ من أجل الحصول على مقدرات لـ : $A_0, A_1,...., A_p$ و $\sum_\varepsilon$.

7- تحديد درجة التأخير (P).

لتحديد درجة تأخير النموذج VAR نعتمد على المعيارين التاليين: معيار Akaike و Schwartz.

ولاختيار درجة التأخير نقوم بتقدير النموذج VAR باستخدام كل القيم الممكن أن تأخذها درجة التأخير من 0 إلى h (حيث h هو أكبر تأخير مقبول من طرف النظرية الاقتصادية و من خلال المعطيات الموجودة)[1]، وتحسب الدالتين $Aic(P)$ و $Sc(P)$ كمايلي:

$$Aic = Ln\left[\det(\sum_e)\right] + \frac{2k^2 p}{n} \quad , \quad Sc = Ln\left[\det(\sum_e)\right] + \frac{k^2 p Ln(n)}{n} .$$

حيث : k: عدد متغيرات النموذج، n : عدد المشاهدات، P : درجة التأخير، $\sum_e$: مصفوفة التباينات المشتركة للبواقي، و نختار درجة التأخير (P) التي تعطينا المعيارين السابقين في أدنى قيمة لهما.

8- التنبؤ و ديناميكية نماذج أشعة الانحدار الذاتي.

- **التنبؤ:** بعد تحديد درجة التأخير (P) و القيام بتقدير معاملات النموذج، يمكننا التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات المدروسة، من أجل نموذج $VAR(1)$ التنبؤ يحسب كمايلي :

✓ $h=1$ (الفترة الأولى) التنبؤ هو :

$$\hat{x}_T(1) = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 x_T .$$

حيث : x_T : آخر مشاهدة في المعطيات .

✓ $h=2$ (الفترة الثانية) التنبؤ هو :

$$\hat{x}_T(2) = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 x_T(1) = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 \hat{A}_0 + \hat{A}_1^2 x_T .$$

[1] - R.Bourbounais .Econométrie .4eme édition .DUNOD.PARIS.2002.P261.

- $h=3$ (الفترة الثالثة) التنبؤ هو :

$$\hat{x}_T(3)=\hat{A}_0+\hat{A}_1x_T(2)=\left[I+\hat{A}_1+\hat{A}_1^2\right]\hat{A}_0+\hat{A}_1^3x_T.$$

✓ الفترة h التنبؤ هو :

$$\hat{x}_T(h)=\left[I+\hat{A}_1+\hat{A}_1^2+........+\hat{A}_1^{h-1}\right]\hat{A}_0+\hat{A}_1^hx_T.$$

متوسط خطأ التنبؤ يكون معدوما أي $E(e)=0$ و مصفوفة التباينات تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_e(h)=(\sum_e+M_1\sum_eM_1^{'}+........+M_{h-1}\sum_eM_{h-1}^{'}$$

حيث أن M_i تعطى بالعلاقة التالية :

$$M_i=\sum_{j=1}^{\min(P,j)}\hat{A}_jM_{i-j}$$

مع :

$$i=1,2...\text{،}\ M_0=I\text{،}\ M_1=\hat{A}_1\text{،}\ M_2=\hat{A}_1M_1+\hat{A}_2M_0=\hat{A}_1^2+\hat{A}_2.$$

$$M_3=\hat{A}_1M_2+\hat{A}_2M_1+\hat{A}_3M_0=\hat{A}_1^3+\hat{A}_1\hat{A}_2+\hat{A}_2\hat{A}_1+\hat{A}_3.$$

تباين خطأ التنبؤ لكل متغيرة k هو $\delta_T^2(h)$ ، و يقرأ على القطر الأول للمصفوفة $\sum_e(h)$.

مجال التنبؤ عند درجة المعنوية $(1-\alpha/2)$ يعطى بالعلاقة التالية :

$$\left[\hat{x}_T(h)\pm t^{\alpha/2}\hat{\delta}_T(h)\ \right]$$

حيث: $t^{\alpha/2}$ القيمة المجدولة لقانون التوزيع الطبيعي.

- **ديناميكية النموذج VAR** : تسمح لنا نماذج أشعة الانحدار الذاتي بتحليل آثار السياسة الاقتصادية، وهذا من خلال محاكاة هذا النموذج الصدمات العشوائية و تحليل تباين الخطأ، هذا التحليل يفترض ثبات واستقرار الوضع الاقتصادي.

- **تمثيل النموذج VAR على شكل VMA** : رأينا سابقا أن النموذج $AR(1)$ يمكن تمثيله على شكل $MA(\infty)$ ، و منه فالنموذج $VAR(1)$ يمكن تمثيله على الشكل $VMA(\infty)$.

هذا النموذج يسمح لنا بقياس أثر التغير في الصدمات على القيم الحالية للمتغيرة .

ليكن لدينا النموذج $VAR(P)$ المستقر أي :

$$x_t=A_0+A_1x_{t-1}+......+A_Px_{t-p}+\varepsilon_t.$$

هذا النموذج يمكن تمثيله على شكل $VMA(\infty)$ كما يلي:

$$x_t = \mu + \varepsilon_t + M_1\varepsilon_{t-1} + ... = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} M_i \varepsilon_{t-i}$$

حيث :

$$M_i = \sum_{j=1}^{\min(P.i)} \hat{A}_j M_{i-j} \text{ ،} \mu = (I - A_0 - \cdots - A_P) \text{ ،} M_0 = I .$$

من خلال هذا التمثيل فإن المصفوفة M تظهر كمضاعف الأثر (Multiplicateur d'impact) التي بواسطتها تعكس الصدمة طيلة المسار، أي تغير في ε_t في اللحظة " t " يؤثر على القيم الموالية لـ: x_t ومنه فأثر الصدمة دائم و يؤول إلى التلاشي مع مرور الزمن.

- **تحليل الصدمات و دوال الاستجابة:** إن الهدف من تحليل الصدمات هو قياس أثر التغير في الصدمة على المتغيرات، فمثلا: التغير في e_t في لحظة ما، له آثار على $x_{1t}, x_{1t+1}, x_{2t+1}$....... و نرمز للمتغير بـ: Δx_{1t} في اللحظة t، فإذا حدث تغير على e_t في اللحظة t يساوي 1، فإن أثرها يكون كالتالي:

عند الفترة t :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \\ \vdots \\ \Delta x_{kt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

عند الفترة $t+1$:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{1t+1} \\ \Delta x_{2t+1} \\ \vdots \\ \Delta x_{kt+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_0 & \hat{A}_1 .... \hat{A}_K \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Delta x_{t+1} = \hat{B} \Delta x_t$$

حيث $\hat{B}$ هي مصفوفة معاملات النموذج:

عند الفترة $t+2$:

$$\Delta x_{t+2} = \hat{B} \Delta x_{t+1} .$$

و بصفة عامة عند الفترة $t+h$:

$$\Delta x_{t+h} = \hat{\beta} \Delta x_{t+h-1} .$$

و قيم التغير عند كل فترة تسمى: دالة الاستجابة" Function de réponse impulsionnelle ".

هذه الطريقة تستعمل في حالة عدم وجود ارتباط بين البواقي e_t، لكن نادرا ما تتحقق هذه الفرضية.

إذا كان هناك ارتباط بين الأخطاء أي: $\rho_{ij} = \dfrac{cov(e_i, e_j)}{\delta_{e_i}\delta_{e_j}}$ ، فيجب و ضع فرضيات أخرى تخص العلاقة بين الأخطاء e_t، و تتميز دوال الاستجابة بأنها تأخذ بعين الاعتبار مجموع العلاقات الديناميكية الموجودة، حيث تبين رد فعل المتغيرات الداخلية عند حدوث الصدمة في الأخطاء، وحسب سيمس، فإن دوال الاستجابة تبين أثر انخفاض وحيد مفاجئ لمتغيرة على نفسها، وعلى باقي المتغيرات في كل الأوقات.

إن الطريقة المستعملة لحل مشكل الارتباط الموجود بين الأخطاء تتمثل في البحث عن شكل لأخطاء متعامدة (orthogonales) مستقلة فيما بينها.

و لتوضيح هذه الطريقة نقدم المثال التالي:

ليكن شعاع الانحدار الذاتي بمتغيرين $VAR(1)$:

$$x_{1t} = a_1 x_{1t-1} + b_1 x_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$x_{2t} = a_2 x_{1t-1} + b_2 x_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

حيث :

$$V(\varepsilon_{2t}) = \delta^2_{\varepsilon 2} \quad \text{و} \quad V(\varepsilon_{1t}) = \delta^2_{\varepsilon 1}$$

$$Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = k \neq 0$$

نقوم بحساب :

$$x_{1t} - \left(k / \delta^2_{\varepsilon 1} \right)(x_{2t})$$

$$x_{2t} = \left(k / \delta^2_{\varepsilon 1} \right) x_{1t} + \left(a_2 - a_1 \frac{k}{\delta^2_{\varepsilon 1}} \right) x_{1t-1} + \left(b_2 - b_1 \frac{k}{\delta^2_{\varepsilon 1}} \right) x_{2t-1} + \varepsilon_{2t} - \left(k / \delta^2_{\varepsilon 1} \right) \varepsilon_{1t}$$

نضع :

$$U_{2t} = \varepsilon_{2t} - \left(k / \delta^2_{\varepsilon 1} \right).$$

فنحصل على:

$$Cov(\varepsilon_{1t}, U_{2t}) = E(\varepsilon_{1t}, U_{2t}) = Cov(\varepsilon_{1t}, U_{2t}) - \frac{k}{\delta^2_{\varepsilon 1}} E(\varepsilon^2_{1t}) = k - k = 0.$$

هذا التحويل مكننا من الحصول على تجديدات (innovations) غير مرتبطة، و منه فنستطيع تحليل الصدمات باستعمال المعادلات الجديدة التي تحتوي على التجديدات العمودية والمستقلة، أي المعادلات التالية:

$$x_{1t} = a_1 x_{1t-1} + b_2 x_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$x_{2t} = \frac{k}{\delta^2_{\varepsilon 1}} x_{1t} + \left(a_2 - a_1 \frac{k}{\delta^2_{\varepsilon 1}}\right) x_{1t-1} + \left(b_2 - b_1 \frac{k}{\delta^2_{\varepsilon 1}}\right) x_{2t1} + \varepsilon_{2t} - \frac{k}{\delta^2_{\varepsilon 1}} \varepsilon_{1t}$$

إن تعميم هذه الطريقة على نموذج VAR بـ: k متغيرة يحتاج إلى طرق جد معقدة تعتمد على إيجاد الصيغ العمودية للمصفوفات، و يجب الإشارة إلى أن البواقي تتأثر باختيار المعادلة التي تسمح بالتحويل ففي المثال السابق (k=2) فإن النتائج تكون مختلفة إذا خص التحويل x_{1t} عوضا عن x_{2t}، لهذا فإن اختيار درجة المتغيرات يعدل من النتائج المحصل عليها، و لهذا فإنه توجد عدة برامج للاقتصاد القياسي تعطي إمكانية اختيار درجة المتغيرات و تسمح كذلك بمحاكاة كل الحالات الممكنة.

- **تحليل تباين الخطأ:** يهدف تحليل تباين خطأ التنبؤ إلى حساب مدى مساهمة (وزن) كل تجديدة (innovation) في تباين الخطأ ، باستعمال تقنية رياضية يمكن كتابة تباين خطأ التنبؤ لفترة معينة (h) بدلالة تباين الخطأ الخاص بكل متغيرة على حدا، و لمعرفة وزنه أو نسبة مشاركة كل تباين نقوم بقسمة قيمة هذا التباين على تباين خطأ التنبؤ الكلي.

نأخذ المثال السابق أي نموذج $VAR(1)$، بمتغيرتين x_{1t} و x_{2t}، فإن تباين خطأ التنبؤ لـ x_{1t}يكتب كمايلي:

$$\delta^2_{x1}(h) = \delta^2_{x_1}\left[m^2_{11}(0) + m^2_{11}(1) + ... + m^2_{11}(h-1)\right] + \delta^2_{x_2}\left[m^2_{22}(0) + m^2_{22}(1) + ... + m^2_{22}(h1)\right]$$

حيث : m_{ii} : هي عناصر المصفوفة M (مصفوفة مضاعفات الأثر) .

في الفترة h نسبة تحليل التباين لتجديدات x_{1t} على x_{1t} تعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{\delta^2_{x1}\left[m^2_{11}(0) + m^2_{11}(1) + ... + m^2_{11}(h1)\right]}{\delta^2_{x1}(h)}$$

نسبة تحليل التباين لتجديدات x_{1t} على x_{2t}تعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{\delta^2_{x2}\left[m^2_{22}(0) + m^2_{22}(1) + ... + m^2_{22}(h1)\right]}{\delta^2_{x1}(h)}$$

تفسير النتائج المتحصل عليها :

✓ إذا لم تؤثر صدمة ε_{1t} على تباين الخطأ لـ : x_{2t} مهما كان مدى التنبؤ فإنه يمكن اعتبار x_{2t} كمتغيرة خارجية، حيث x_{2t} تتطور بصفة مستقلة عن ε_{1t}.

✓ و العكس صحيح: أي إذا أثرت صدمة ε_{1t} جزئيا أو حتى كليا في تباين الخطأ لـ: x_{2t}، فإن x_{2t} تعتبر متغيرة داخلية.

و لكن في الواقع هذه النتائج من الصعب تحديدها بهذه السهولة، إلا أنها تبين مدى مساهمة كل متغيرة في خطأ التنبؤ، و يجب الإشارة هنا إلى أنه مثلما هو الحال في دالة الاستجابة، فإن مشكل ارتباط الأخطاء وارد وبالتالي أثر الصدمة على متغيرة ما يستلزم اختبار تحليل التباين الذي يعطي نتائج متناسقة تبعا لدرجة المتغيرات.

4-2- العلاقة السببية لغرانجر وسيمس بين الظواهر المالية

السببية نظريا: إن توضيح العلاقات السببية الموجودة بين المتغيرات الاقتصادية يعطي صورة واضحة لفهم و تفسير الظواهر الاقتصادية، أما عمليا فإن ذلك ضروري من أجل صياغة صحيحة للسياسة الاقتصادية، في حين أن معرفة اتجاه السببية جد مهم أيضا من أجل توضيح العلاقة الموجودة بين المتغيرات الاقتصادية.

فإلى جانب الدراسة التي يقوم بها القياس الاقتصادي حول طبيعة النموذج و طريقة تقديره، هناك جانب آخر مهم و هو معرفة العلاقة الموجودة بين متغيرات الشعاع x، و متغيرات الجزء المتبقي منه.

1- سببية قرانجر "Causalité au sens de Granger": قام قرانجر سنة 1969 بوضع مصطلحي السببية و الخارجية، بحيث تكون المتغيرة x_{2t} مسبب (دافع) لـ: x_{1t} إذا تحسنت القيمة التنبؤية عند إضافة معلومات عن x_{2t} خلال التحليل.

ليكن النموذج $\boldsymbol{VAR(P)}$ الذي من أجله المتغيرتين x_{1t} و x_{2t} تكونا مستقرتين:

$$\begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^1 & b_1^1 \\ a_1^2 & b_1^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} a_2^1 & b_2^1 \\ a_2^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-2} \\ x_{2t-2} \end{bmatrix} + ... + \begin{pmatrix} a_p^1 & b_p^1 \\ a_p^2 & b_p^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-p} \\ x_{2t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

مجموعة المتغيرات $(x_{2t-1}, x_{2t-2},..., x_{2t-p})$ هي خارجية بالنسبة لمجموعة المتغيرات $(x_{1t-1}, x_{1t-2},..., x_{1t-p})$

إذا كانت إضافة المجموعة x_{2t} لا تحسن بصفة جيدة قيم x_{1t} ، و هذا من خلال إجراء اختبار قيود على معاملات المتغيرات x_{2t}في النموذج $VAR(P)$ ، و يسمى النموذج حينئذ بـ: نموذج VAR المقيد، و يرمز له بالرمز $\boldsymbol{RVAR}$ أي (Restricated VAR) ، و تحدد درجة التأخير باستعمال $\boldsymbol{VAR}$، و يكون لدينا:

- x_{2t} لا تسبب x_{1t} إذا كانت الفرضية التالية مقبولة: $\boldsymbol{H_0}:\ b_1^1 = b_2^1 = \dots\dots = b_p^1 = 0$.
- x_{1t} لا تسبب x_{2t} إذا كانت الفرضية التالية مقبولة : $\boldsymbol{H_0}: a_1^2 = a_2^2 = \dots\dots = a_2^p = 0$.

إذا تم قبول الفرضيتين التاليتين: x_{1t} تسبب x_{2t} و x_{2t}تسبب x_{1t} فالمتغيرتين تشكلان حلقة ذات مفعول ارتجاعي (Feedback effet).

لاختبار هذه الفرضيات يستعمل اختبار فيشر " Test de Fisher " المتعلق بانعدام المعاملات لمعادلة تلوى الأخرى، أو مباشرة بالمقارنة بين نموذج VAR غير المقيد (UVAR) والنموذج المقيد (RVAR):

نحسب نسبة أعظم احتمال $\boldsymbol{L^{\bullet}}$:

$$L^{\bullet} = (n-c)(\ln\left|\Sigma_{RVAR}\right| - \ln\left|\Sigma_{UVAR}\right|).$$

$\boldsymbol{L^{\bullet}}$ تتبع قانون (Khi-deux) بدرجة حرية تساوي2P.

حيث: Σ_{RVAR} : مصفوفة التباينات و التباينات المشتركة للنموذج المقيد.

Σ_{UVAR} : مصفوفة التباينات و التباينات المشتركة للنموذج غير المقيد.

$\boldsymbol{n}$: عدد المشاهدات.

$\boldsymbol{c}$: عدد المعالم المقدرة في كل معادلة من معادلات النموذج غير المقيد.

إذا كانت $L^{\bullet} > \chi^2_{2P}$ نرفض $\boldsymbol{H_0}$ أي لا يوجد القيد.

2- سببية سيمس " Causalité au sens de Sims " : سنة 1980 قام سيمس بوضع اختبار يختلف قليلا عن اختبار قرانجر ، فإذا كانت القيم المستقبلية لـ: x_{1t}تسمح بتفسير القيم الحالية لـ: x_{2t}، فإن x_{2t} هي سبب x_{1t}، وهذا ما تترجمه الصيغ التالية :

$$x_{1t} = a_1^0 + \sum_{i=1}^{p} a_{1i}^1 x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p} a_{1i}^2 x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p} b_i^2 x_{2t-i} + \varepsilon_{1t}.$$

$$x_{2t} = a_2^0 + \sum_{i=1}^{p} a_{2i}^1 x_{2t-i} + \sum_{i=1}^{p} a_{2i}^2 x_{2t-i} + \sum_{i=1}^{p} b_i^2 x_{1t-i} + \varepsilon_{2t}.$$

و يكون لدينا :

- x_{1t} لا تسبب x_{2t} إذا كانت الفرضية التالية مقبولة:

$$H_0 : b_1^2 = b_2^2 = ... = b_p^2 = 0$$

- x_{2t} لا تسبب x_{1t} إذا كانت الفرضية التالية مقبولة:

$$H_0 : b_1^1 = b_2^1 = ... = b_p^1 = 0$$

و يتعلق الأمر هنا باختبار فيشر للمعاملات المعدومة بحيث:

$$F^{\bullet} = \frac{SCRR - SCRU / c}{SCRU / (n-k-1)}$$

حيث : $SCRR$: مجموع مربعات البواقي للنموذج المقيد .

$SCRU$: مجموع مربعات البواقي للنموذج غير المقيد.

n : عدد المشاهدات ، k : عدد المعالم المقدرة في المعادلة.

4-3- مفهوم ومراحل نماذج التكامل المشترك وشروط تحققها بين الظواهر المالية

4-3-1- التكامل المشترك و نماذج تصحيح الخطأ.

قدم تحليل التكامل المشترك "Cointégration" من طرفGranger سنة 1983 و من طرف Engel&Granger سنة 1987، و قد اعتبره الاقتصاديون مفهوما جديدا له أهمية كبيرة في مجال القياس الاقتصادي و تحليل السلاسل الزمنية.

4-3-1-1- عموميات عن التكامل المشترك.

يسمح تحليل التكامل المشترك بتحديد جيد و واضح للعلاقة الحقيقية بين المتغيرات، و هذا بالبحث عن وجود شعاع إدماج ثم إزالته.

4-3-1-1-1- خصائص رتبة التكامل: نقول أن السلسلة x_t متكاملة من الرتبة " d " إذا ما تطلب جعلها مستقرة " d " من الفروق.

- لتكن السلسلة x_t مستقرة و السلسلة y_t متكاملة من الرتبة "1".

$$\left.\begin{array}{l} x_t \rightarrow I(0) \\ y_t \rightarrow I(1) \end{array}\right\} \Rightarrow x_t + y_t \rightarrow I(1)$$

- لتكن السلسلتين x_t و y_t سلسلتين متكاملتين من نفس الرتبة " d ".

$$\left.\begin{array}{l} x_t \rightarrow I(d) \\ y_t \rightarrow I(d) \end{array}\right\} \Rightarrow x_t + y_t \rightarrow I(?)$$

رتبة تكامل التوفيقة الخطية $\alpha x_t + \beta y_t$ مرتبطة بإشارة المعاملين αو β.

إذا كان αو βمن نفس الإشارة، فالتوفيقة الخطية متكاملة من الرتبة " d".

إذا كان αو βمختلفين في الإشارة، فالتوفيقة الخطية مستقرة أي:

$\alpha x_t + \beta y_t \rightarrow I(0)$.

- لتكن x_t و y_t سلسلتان مختلفتان في رتبة التكامل:

$$\left.\begin{array}{l} x_t \rightarrow I(d) \\ y_t \rightarrow I(d') \end{array}\right\} \Rightarrow x_t + y_t \rightarrow I(?)$$

غير ممكن جمع سلسلتين مختلفتين في الإشارة.

- لتكن السلسلتان x_t و y_t، إذا كان لهما اتجاه نمو ثابت في الفترة الأولى، ثم اتجاه نمو متباعد في الفترة الثانية، فالسلسلتين ليستا في تكامل مشترك.
- لتكن السلسلتين x_t و y_t، إذا كان لهما اتجاه نمو ثابت على طول فترة الدراسة، فالسلسلتان في تكامل مشترك.

4-3-1-1-2- شروط التكامل المشترك: نقول أن السلسلتين x_t و y_tفي تكامل مشترك، إذا تحقق الشرطان التاليان:

- السلسلتان x_t و y_tلهما اتجاه عام عشوائي من نفس رتبة التكامل " d".
- التوفيقة الخطية لهاتين السلسلتين تعطي سلسلة ذات رتبة تكامل أقل من رتبة تكامل السلسلتين، أي إذا كان :

$$\left.\begin{array}{l} x_t \rightarrow I(d) \\ y_t \rightarrow I(d) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x_t + \beta y_t \rightarrow I(d-b)$$

حيث: $d \geq b \geq 0$.

و نكتب: $x_t, y_t \rightarrow CI(d.b)$ و $(\alpha.\beta)$ شعاع الإدماج " vecteur de cointégration ".

4-3-1-2- التكامل المشترك بين k متغيرة.

إن الدراسات الحالية للاقتصاد الكلي و التي تدرس نظرية التوازن، تبين أن كل سلسلة زمنية مستقرة يمكن أن تكون نتيجة لتوفيقة بين عدد من المتغيرات غير المستقرة، و تكون دراسة التكامل المشترك بين k متغيرة معقدة جدا، و ذلك لاحتمال وجود عدة أشعة تعبر عن علاقة التكامل المشترك.

4-3-1-2-1- مفهوم التكامل المشترك بين k متغيرة: ليكن لدينا نموذج قياسي يحتوي على k متغيرة مفسرة، حيث:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots\cdots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

إذا كانت المتغيرات y_t و x_{it} غير مستقرة$(i=1...k)$، مثلا ذات رتبة تكامل من الدرجة الأولى، في هذه الحالة يكون هناك احتمال وجود تكامل مشترك بين المتغيرات، فإذا وجدت توفيقة خطية مستقرة لهذه المتغيرات، فإن هذه المتغيرات في تكامل مشترك، و بتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على النموذج يمكن حساب البواقي:

$$e_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1t} - \cdots\cdots - \hat{\beta}_k x_{kt}.$$

إذا كانت البواقي مستقرة، فإننا نقبل فرضية وجود التكامل المشترك بين المتغيرات، و شعاع الإدماج يعطى بالشكل التالي:

$$\left[1, -\hat{\beta}_0, -\hat{\beta}_1, \ldots\ldots, -\hat{\beta}_k\right].$$

بصفة عامة إذا كان لدينا نموذج بمتغير تابع واحد و kمتغيرة تفسيرية، أي أن هناك $k+1$ متغيرة فإنه من المحتمل وجود kشعاع إدماج مستقلة خطيا تعبر عن علاقة التكامل المشترك، و عدد أشعة الإدماج تسمى: رتبة التكامل المشترك "rang de cointégration".

إذا كانت المتغيرات من نفس رتبة التكامل، في هذه الحالة احتمال وجود وشعاع إدماج وحيد أمر ممكن، أما إذا كانت السلاسل مختلفة في رتبة التكامل فمن المؤكد أن شعاع التكامل ليس وحيد.

عمليا لاختبار فرضية التكامل المشترك بين المتغيرات يجب إجراء الاختبار على$k+1$ متغيرة، بعدها في حالة وجود التكامل المشترك بينها يمكننا إجراء الاختبار على مختلف التوفيقات بين هذه المتغيرات لتعيين نوع علاقة التكامل المشترك.

4-3-1-2-2- تقدير نموذج تصحيح الخطأ: إذا كانت هناك علاقة تكامل مشترك بين المتغيرات، فإننا نكون أمام حالتين:

- وجود شعاع إدماج وحيد ناتج عن علاقة التكامل المشترك.
- وجود عدة أشعة إدماج.

❖ في حالة وجود شعاع إدماج وحيد نطبق طريقة Engel&Granger، و التي تتم على مرحلتين:

- المرحلة الأولى: تقدير علاقة المدى الطويل بـ: MCO و حساب البواقي.

$$e_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\, x_{1t} - \cdots\cdots - \hat{\beta}_k\, x_{kt}$$

- المرحلة الثانية: تقدير علاقة المدى القصير بـ: MCO.

$$\Delta\, y_t = \alpha_1 \Delta\, x_{1t} + \alpha_2\, x_{2t} + \cdots\cdots + \alpha_k x_{kt} + \gamma_1 e_{t-1} + u_t$$

المعامل γ_1يمثل قوة الإرجاع نحو التوازن، و يجب أن يكون سالبا.

❖ في حالة وجود عدة أشعة إدماج، تكون طريقة Engel&Granger غير مجدية والحساب بطريقة المربعات الصغرى غير فعال، وعليه نلجأ إلى التقدير باستخدام طرق أخرى لإيجاد نموذج تصحيح الخطأ الشعاعي.

4-3-2- نموذج تصحيح الخطأ الشعاعي $(VECM)$:

في حالة وجود متغيرتين، فإن نموذج تصحيح الخطأ يعطى بالشكل التالي:

$$\Delta y_t = \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 e_{t-1} + u_t.$$

انطلاقا من هذا الشكل يمكن تخيل العلاقة بين تغيرات x_t وتغيرات y_t، وعليه فبالرغم من وجود علاقة التكامل في المدى الطويل $(y_t = \alpha + \beta x_t + e_t)$، فمن المحتمل وجود علاقة النموذج الديناميكي في المدى القصير، أي:

$$\Delta y_t = C + \lambda e_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad \lambda < 0$$

$$\Delta x_t = C' + \lambda' e_{t-1} + \varepsilon'_t \qquad \lambda' > 0$$

حيث: $\lambda > 0$، وعليه حسب نظرية Granger إذا كان لدينا متغيرتين في تكامل مشترك فإن نموذج $VECM$ يكون على الشكل التالي:

$$\Delta y_t = C + \lambda\, e_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta\, x_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad \lambda < 0$$

$$\Delta\, x_t = C' + \lambda' e_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha'_i \Delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \beta'_i \Delta\, x_{t-i} + \varepsilon'_t. \qquad \lambda' > 0$$

حيث:

$e_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_t$، λ' و λ : تمثلان قوة الإرجاع.

إذا كانت $(\lambda = 0, \lambda' = 0)$ فإننا نرفض فرضية التكامل المشترك، و تمثيل نموذج تصحيح الخطأ يكون غير صحيح، أما إذا كان ممكنا التمثيل بهذه النماذج فالعلاقات السابقة تصبح كما يلي:

$$\Delta y_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + a_2 y_{t-1} + \sum_{i=1}^{P} \alpha_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^{P} \beta_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t$$

$$\Delta x_t = a'_0 + a'_1 x_{t-1} + a'_2 y_{t-1} + \sum_{i=1}^{P} \alpha'_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^{P} \beta'_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon'_t$$

يمكن تعميم هذا التمثيل على kمتغيرة، و بالتالي تكتب على الشكل المصفوفات التالية:

ليكن لدينا نموذج $VAR(P)$:

$$y_t = A_0 + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + ... + A_P y_{t-P} + \varepsilon_t$$

حيث: y_t : شعاع ببعد $(k \times 1)$، يتكون من k متغيرة، A_0: شعاع ذو بعد $(k \times 1)$.

A_i : مصفوفة ذات البعد $(k \times k)$.

هذا النموذج يمكن كتابته على شكلين بعد إجراء الفروق الأولى:

$$\Delta y_t = A_0 + (A_1 - I)\Delta y_{t-1} + (A_2 - A_1 - I)\Delta y_{t-2} + ... + (A_{P-1} + ... + A_2 + A_1 - I)\Delta y_{t-P+1} + \eta y_{t-P} + \varepsilon$$

كما يمكن كتابته بدلالة y_{t-1}

$$\Delta y_t = A_0 + B_1 \Delta y_{t-1} + B_2 \Delta y_{t-2} + ... + B_{P-1} \Delta y_{t-P+1} + \eta y_{t-P} + \varepsilon$$

حيث:

B_i : هي مصفوفات بدلالة A_i و $\eta = \left(\sum_{i=1}^{P} A_i - I \right)$.

المصفوفة η يمكن كتابتها على الشكل $\eta = \alpha \beta'$، حيث α : شعاع قوة الإرجاع، β : شعاع عناصره هي معاملات علاقات المدى الطويل بين المتغيرات، و كل توفيقة خطية تمثل علاقة تكامل مشترك.

- إذا كانت رتبة المصفوفة η تساوي الصفر ($rang k$ =η)، فلا يمكن تمثيل نموذج تصحيح الخطأ.

- إذا كانت رتبة المصفوفة η تساوي k، فكل المتغيرات مستقرة، ولا يوجد مشكل التكامل المشترك.

- إذا كانت رتبة المصفوفة η و التي نرمز لها بالرمز r محصورة بين 1 و $k-1$، فتوجد r علاقة تكامل مشترك، ونموذج تصحيح الخطأ يكون كمايلي:

$$\Delta y_t = A_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + ... + \beta_{t-P} y_{t-P+1} + \alpha e_t + \varepsilon_t$$

حيث: $e_t = \beta' y_t$.

4-3-3- اختبار علاقة التكامل المشترك: لتحديد عدد علاقات التكامل المشترك $Johansen$ (1988) اقترح اختبارا يقوم على حساب القيم الذاتية لمصفوفة نحصل عليها بعد مرحلتين هما:

- المرحلة الأولى: حساب البواقي الانحدارين التاليين:

$$\Delta y_t = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 \Delta y_{t-1} + \hat{A}_2 \Delta y_{t-2} + ... + \hat{A}_P \Delta y_{t-P} + u_t$$

$$y_{t-1} = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 \Delta y_{t-1} + \hat{A}_2 \Delta y_{t-2} + ... + \hat{A}_P \Delta y_{t-P} + u_t$$

حيث:

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{1.t} \\ y_{2.t} \\ \vdots \\ y_{k.t} \end{pmatrix}$$

في هذين النموذجين لدينا نفس المتغيرات التفسيرية، و الاختلاف يكمن في المتغيرات التابعة فقط.

u_t و v_t: مصفوفات البواقي ذات البعد $(k \times n)$، n عدد المشاهدات و k عدد المتغيرات.

- المرحلة الثانية: حساب المصفوفة التي تمكننا من حساب القيم الذاتية.

نقوم بحساب أربع مصفوفات للتباينات والتباينات المشتركة ذات البعد $(k \times k)$ انطلاقا من البواقي u_t و v_t.

$$\hat{\Sigma}_{uu} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t u_t' \;.\; \hat{\Sigma}_{vv} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} v_t v_t' \;.\; \hat{\Sigma}_{uv} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t v_t' \;.\; \hat{\Sigma}_{vu} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} v_t u_t'$$

نقوم بحساب kقيمة ذاتية للمصفوفة Mذات البعد $(k \times k)$ و التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$M = \hat{\Sigma}_{vv}^{-1} \hat{\Sigma}_{vu} \hat{\Sigma}_{uu}^{-1} \hat{\Sigma}_{uv}$$

و انطلاقا من هذه القيم الذاتية نقوم بحساب الإحصائية التالية:

$$\lambda_{trac} = -n \sum_{i=t+1}^{k} Ln(1-\lambda_i)$$

حيث: n: عدد المشاهدات.

λ_i: القيمة الذاتية رقم iللمصفوفة M، k: عدد المتغيرات، r: رتبة المصفوفة M.

هذه الإحصائية تتبع توزيع احتمالي (يشبه توزيع χ^2) مجدولة من طرف Johansen&Juselin(1990).

هذا الاختبار يعتمد على إقصاء الفرضيات المتناوبة.

➢رتبة المصفوفة η تساوي الصفر"$r=0$"، الاختبار يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : r = 0 \\ H_1 : r > 0 \end{cases}$$

- نرفض H_0 إذا كانت $\lambda_{trac} > \chi^2$.

- نرفض H_1 إذا كانت $\lambda_{trac} < \chi^2$.

إذا رفضنا H_0 فإننا نمر للاختبار الموالي.

➢رتبة المصفوفة η تساوي الواحد"$r=1$"، الاختبار يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : r = 1 \\ H_1 : r > 1 \end{cases}$$

- نرفض H_0 إذا كانت $\lambda_{trac} > \chi^2$.

- نرفض H_1 إذا كانت $\lambda_{trac} < \chi^2$.

إذا رفضنا H_0 فإننا نمر للاختبار الموالي.

➢ إذا كانت كل الاختبارات تقتضي رفض H_0، إننا في النهاية نجري الاختبار التالي:

$$\begin{cases} H_0 : r = k-1 \\ H_1 : r = k \end{cases}$$

- نرفض H_0 إذا كانت $\lambda_{trac} > \chi^2$.

- نرفض H_1 إذا كانت $\lambda_{trac} < \chi^2$.

إذا قبلنا الفرضية H_1، أي رتبة المصفوفة η تساوي k، فلا توجد علاقة تكامل مشترك، لأن كل المتغيرات مستقرة $I(0)$، ومنه يمكن استعمال تقنية أشعة الانحدار الذاتي.

4-4- تكوين نماذج التكامل المشترك بالبرامج المتخصصة EVIEWS

1- مبادئ تطبيق نماذج التكامل المشترك: أهم مبادئ تطبيق نماذج التكامل المشترك:

- اختيار المتغيرات التي تؤثر في الظاهرة محل الدراسة تعتمد على النظرية الاقتصادية بدرجة كبيرة.
- يجب معرفة طبيعة العلاقة بين المتغيرات.
- دراسة أولية للمتغيرات:

المرحلة الأولى تخص دراسة خصائص السلاسل الزمنية وذلك من ناحية الاستقرارية (مركبة الاتجاه العام، الجذر الأحادي)، وذلك بالاعتماد على اختبار ديكي فولار البسيط(DF)، وديكي فولار الصاعد(ADF)، وهذا بالاعتماد على النماذج الستة التالية:

$$(1) : \Delta Y_t = \hat{\phi}.Y_{t-1} + \hat{\varepsilon}_t$$

$$(2) : \Delta Y_t = \tilde{\phi}.Y_{t-1} + \tilde{c}_1 + \tilde{\varepsilon}_t$$

$$(3) : \Delta Y_t = \overline{\phi}.Y_{t-1} + \overline{c_2} + \overline{b}.t + \overline{\varepsilon_t}$$

$$(4) : \Delta Y_t = \hat{\phi}.Y_{t-1} + \sum_{j=2}^{p} \hat{\varphi}_j.\Delta Y_{t-j+1} + \hat{\varepsilon}_t$$

$$(5) : \Delta Y_t = \tilde{c}_1 + \tilde{\phi}.Y_{t-1} + \sum_{j=2}^{p} \tilde{\varphi}_j.\Delta Y_{t-j+1} + \tilde{\varepsilon}_t$$

$$(6) : \Delta Y_t = \overline{c_2} + \overline{b}.t + \overline{\phi}.Y_{t-1} + \sum_{j=2}^{p} \overline{\varphi_j}.\Delta Y_{t-j+1} + \overline{\varepsilon_t}$$

وقبل تطبيق اختبار ديكي فولار لا بد من إيجاد درجة التأخر للسلسلة وهذا من أجل تحديد نوع الاختبار الذي يستعمل في الكشف عن الجذر الأحادي ومركبة الاتجاه العام في السلسلة، ولإيجاد درجة التأخير نتبع الخطوات التالية:

- نقوم بإجراء الفرق من الدرجة الأولى للسلسلة محل الدراسة.

- نقوم بملاحظة الـ:Correlogram للسلسلة التي أجرينا عليها الفرق من الدرجة الأولى، وذلك بتحديد الأعمدة الخارجة من مجال الثقة لدالة الارتباط الذاتي الجزئية، إذا كان:$p=0$ (أي لا يوجد أي تأخير له دلالة إحصائية) نستعمل ديكي فولار البسيط، وإذا كان $p\geq1$ نستعمل اختبار ديكي فولار الصاعد (أي يوجد على الأقل تأخير له دلالة إحصائية).

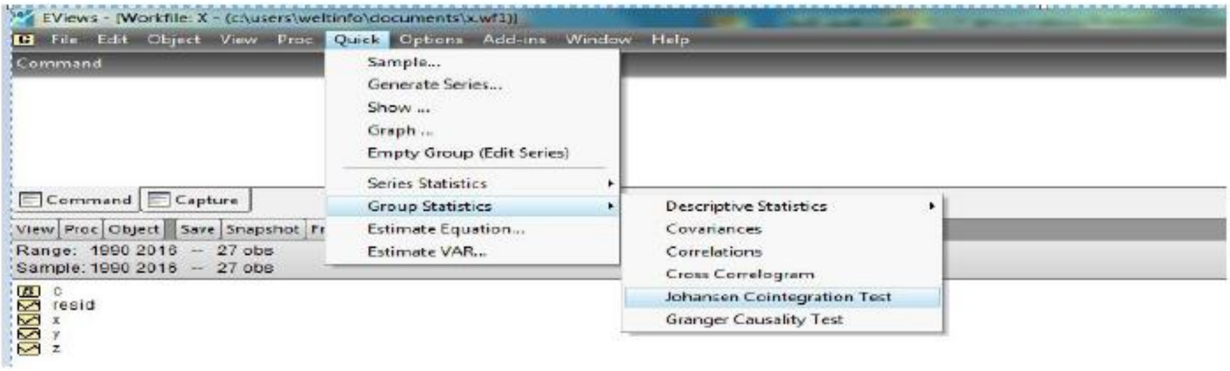
- نقوم بتقدير النموذج السادس مثلا في حالة $p\geq1$ عند التأخيرات الموافقة للأعمدة الخاصة بدالة الارتباط الذاتي الجزئية الخارجة عن مجال الثقة على الترتيب (نبدأ بأعظم تأخير)، ونأخذ التأخير الذي يكون معامله معنوي.

2. نتائج إختبار التكامل المشترك (جوهانسون)

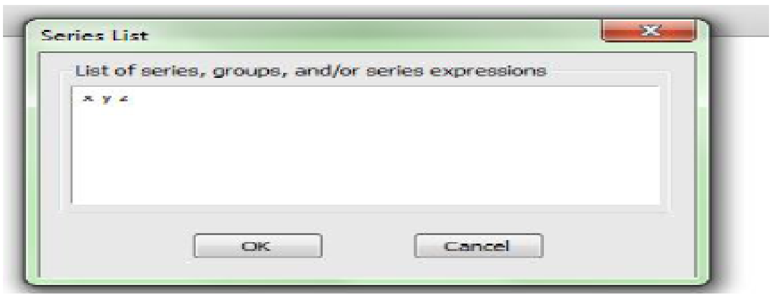
يهدف هذا الإختبار إلى التحقق من وجود علاقة طويلة الأجل بين المتغيرات، وقبل تطبيق هذا الإختبار لابد أن تكون جميع السلاسل الزمنية لمتغيرات محل الدراسة متكاملة من نفس الدرجة (مستقرة من نفس الدرجة). وهو عكس إختبار الحدود في نموذج ARDL الذي يمكن تطبيقه حتى وإن كانت السلاسل الزمنية غير متكاملة من نفس الدرجة شرط أن لا تكون مستقرة عند الفرق الثاني. وهي إضافة جديدة جاء هذا النموذج (ARDL) مقارنة بنموذج (VECM). ومن أجل إجراء إختبار التكامل المشترك (جوهانسون) في برنامج **Eviews10** نتبع الخطوات التالية:

1-2. نضغط على الأيقونات بالتسلسل كما هو موضح في المخطط التالي:

Quick ⟶ Group Statistics ⟶ Johansen Cointegration Test



2-2. فنتحصل على جدول يحتوي على خانة واحدة (List of Series) والتي تمثل المتغيرات محل الدراسة المتكاملة من نفس الدرجة (المستقرة من نفس الدرجة). مع إستخدام المتغيرات الأصلية. فلو إفترضنا أن المتغيرات هي متكاملة من الدرجة واحد نختبر التكامل المشترك بين المتغيرات عند المستوى وليس عند الفرق الأول.



3-2. بعد الضغط على (OK)، نتحصل على نتائج إختبار التكامل المشترك (جوهانسون).

Johansen Cointegration Test

Date: 01/07/19 Time: 13:02
Sample (adjusted): 1992 2016
Included observations: 25 after adjustments
Trend assumption: Linear deterministic trend
Series: X Y Z
Lags interval (in first differences): 1 to 1

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.660375	47.04743	29.79707	0.0002
At most 1 *	0.417127	20.04958	15.49471	0.0096
At most 2 *	0.230641	6.554925	3.841466	0.0105

Trace test indicates 3 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.660375	26.99785	21.13162	0.0066
At most 1	0.417127	13.49465	14.26460	0.0659
At most 2 *	0.230641	6.554925	3.841466	0.0105

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

يحتوي جدول النتائج على إختبارين هما: إختبار الأثر (Trace) وإختبار القيمة الكامنة العظمى (Maximum Eigenvalue)، في حالة كانت القيمة المحسوبة للإختبارين أكبر من القيمة المجدولة عند مستوى معنوية 5% نرفض فرضية العدم والتي تتضمن عدم وجود تكامل مشترك بين المتغيرات.

أغلب الدراسات التجريبية تعتمد على إختبار الأثر، للإشارة نتائج هذا الإختبار تختلف عن نتائج إختبار (Maximum Eigenvalue) في مثالنا نظرا أن المعطيات كيفية وليست واقعية. نفترض واقعية المعطيات، فيكون التحليل كمايلي:

يلاحظ من خلال الجدول أعلاه أن القيمة المحسوبة لإختبار الأثر والتي تقدر بـ 47.04743 أكبر من القيمة المجدولة المقدرة بـ 29.79707 عند مستوى معنوية 5% فيما يخص الفرضية الأولى (None)، أي وجود علاقة تكامل مشترك. كما يلاحظ كذلك أن القيمة المحسوبة لإختبار الأثر والتي تقدر بـ 20.04958 أكبر من القيمة المجدولة المقدرة بـ 15.49471 عند مستوى معنوية 5% فيما يخص الفرضية الثانية (At most 1)، أي وجود علاقة تكامل مشترك. كما يلاحظ أيضا أن القيمة المحسوبة لإختبار الأثر والتي تقدر بـ 6.554925 أكبر من القيمة المجدولة المقدرة بـ 3.814166 عند مستوى معنوية 5% فيما يخص الفرضية الثالثة (At most 2)، أي وجود علاقة تكامل مشترك.

وعليه نستنتج أنه توجد ثلاثة علاقات تكامل مشترك بين متغيرات الدراسة حسب إختبار الأثر. نفس الطريقة في التحليل فيما يخص إختبار القيمة الكامنة العظمى. والذي يشير إلى وجود علاقة واحدة طويلة

الأجل بين متغيرات الدراسة، وبما أن نتائج الإختبارين مختلفة سيكون قرارنا على أساس الإختبار الذي يوجد فيه أقل عدد من العلاقات، أي توجد علاقة تكامل مشترك واحدة بين متغيرات الدراسة.

بعد التأكد من وجود علاقة طويلة الأجل بين المتغيرات محل الدراسة، يمكن تطبيق إختبار السببية بهدف معرفة إتجاه التأثير بين المتغيرات في هاته العلاقة الطويلة الأجل.

3. تحديد درجة التأخير للنموذج

قبل إجراء إختبار السببية نقوم بتحديد درجة التأخير المثلى لنموذج الدراسة Eviews10 تحصلنا في مثالنا على النتائج التالية:

VAR Lag Order Selection Criteria
Endogenous variables: DX DY DZ
Exogenous variables:
Date: 01/07/19 Time: 13:52
Sample: 1990 2016
Included observations: 22

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
1	-1189.974	NA	4.38e+43	108.9977	109.4440	109.1028
2	-1174.938	21.87046	2.63e+43	108.4489	109.3416	108.6592
3	-1152.765	26.20470*	8.86e+42*	107.2514*	108.5904*	107.5668*
4	-1143.812	8.138818	1.14e+43	107.2557	109.0410	107.6762

* indicates lag order selected by the criterion
LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)
FPE: Final prediction error
AIC: Akaike information criterion
SC: Schwarz information criterion
HQ: Hannan-Quinn information criterion

أي درجة التأخير المثلة للنموذج هي 3.

4. نتائج إختبار السببية (غرانجر)

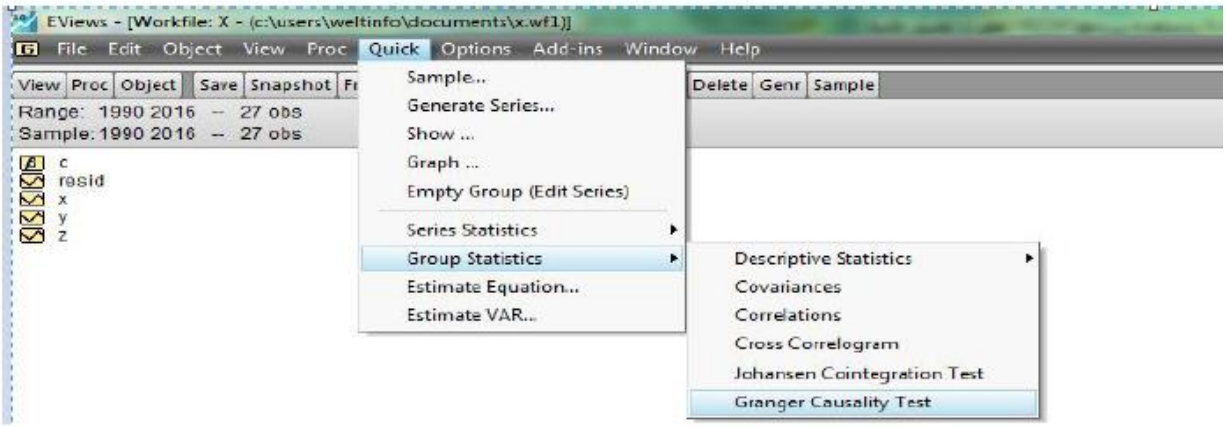
يستخدم هذا الإختبار لفحص وجود علاقة سببية بين متغيرين ويعتمد بشكل رئيسي على إختبار F حيث يقال أن المتغير X يؤثر على المتغير Y إذا كان التباطؤ الزمني للمتغير X له طاقة تنبؤية أعلى من الطاقة التنبؤية للتباطؤ الزمني للمتغير Y، فقبول فرضية العدم تعني أن X لا يؤثر في Y حالة ما إذا كانت قيمة P الإحصائية F أكبر من 0.05، ورفض فرضية العدم تعني أن X يؤثر في Y إذا كانت قيمة P الإحصائية F أصغر من 0.05.

ونجد هنا ثلاث حالات للسببية: السببية أحادية الإتجاه (عندما يكون المتغير الأول يؤثر في المتغير الثاني، ولكن المتغير الثاني لا يؤثر في المتغير الأول)، التأثير المتبادل (عندما يكون كل متغير يؤثر في الآخر بشكل آني)، الإستقلالية (عندما تكون المتغيرات لا تؤثر في بعضها البعض، أي أن المتغيرين مستقلان).

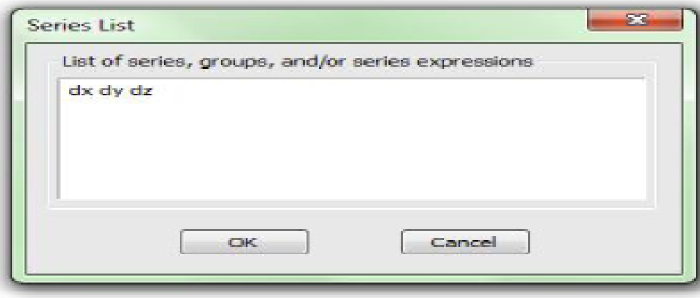
ومن أجل إجراء إختبار السببية (غرانجر) في برنامج **Eviews10** نتبع الخطوات التالية:

1-4. نضغط على الأيقونات بالتسلسل كما هو موضح في المخطط التالي:

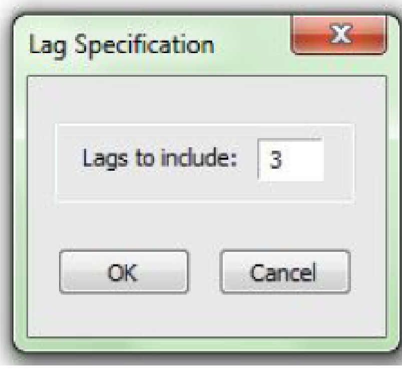
Quick ⟶ **Group Statistics** ⟶ **Granger Causality Test**



2-4. فنتحصل على جدول يحتوي على خانة واحدة (List of Series) والتي تمثل المتغيرات محل الدراسة المتكاملة من نفس الدرجة (المستقرة من نفس الدرجة) والتي توجد بينها علاقة تكامل مشترك. مع إستخدام المتغيرات المستقرة. فلو إفترضنا أن المتغيرات هي متكاملة من الدرجة واحد نجري إختبار السببية للمتغيرات عند الفرق الأول.



3-4. بعد الضغط على (OK)، نتحصل على جدول آخر يحتوي على خانة واحدة (Lags to indude) تمثل درجة التأخير المثلى لنموذج VECM. وفي مثالنا هي 3.



4-4. بعد الضغط على (OK)، نتحصل على نتائج إختبار السببية (غرانجر).

Pairwise Granger Causality Tests
Date: 01/07/19 Time: 13:45
Sample: 1990 2016
Lags: 2

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
DY does not Granger Cause DX	24	8.33853	0.0025
DX does not Granger Cause DY		0.02489	0.9755
DZ does not Granger Cause DX	24	0.03268	0.9679
DX does not Granger Cause DZ		0.02043	0.9798
DZ does not Granger Cause DY	24	6.46824	0.0072
DY does not Granger Cause DZ		0.26307	0.7714

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

- تومي صالح،"مدخل لنظرية القياس الاقتصادي"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1999.
- محمد شيخي، دروس وأمثلة محلولة في الاقتصاد القياسي، مطبوعة محاضرات، جامعة ورقلة، 2010-2011.
- محمد شيخي، طرق الاقتصاد القياسي -محاضرات وتطبيقات-، الطبعة الأولى، دار الحامد، الجزائر، 2011.
- خالد محمد السواعي، EVIEWS والقياس الاقتصادي، الطبعة الأولى، دائرة المكتبة الوطنية، عمان، الأردن، 2012.
- سمير خالد صافي، مقدمة في تحليل نماذج الانحدار باستخدام EVIEWS، الجامعة الاسلامية، غزة، 2015.
- عبد الرزاق بن عمرة، خطوات تطبيق تقنية VECM باستخدام برنامج EVIEWS، جامعة سطيف https://www.researchgate.net/publication/340875149
- وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، أساسيات الاقتصاد القياسي التحليلي، الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2006.
- وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي، الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2006.
- عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، مكة المكرمة، 2004.
- دمودار جوجارت، الاقتصاد القياسي، الجزء الأول، تعريب ومراجعة: هند عبد الغفار عودة وعفاف علي حسن الدش، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2015.
- دمودار جوجارت، الاقتصاد القياسي، الجزء الثاني، تعريب ومراجعة: هند عبد الغفار عودة، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2015.
- هشام عياد، الاقتصاد القياسي: محاضرات وتمارين محلولة، مطبوعة بيداغوجية، المركز الجامعي تلمسان، 2020-2021.
- الطاهر جليط، محاضرات في الاقتصاد القياسي 01، مطبوعة بيداغوجية، جامعة جيجيل، 2016-2017.

- وسيلة بوفنش، استخدام النماذج الكمية في التنبؤ بالطاقة الإنتاجية للمؤسسة دراسة حالة الشركة الوطنية لتحقيق وتسيير الصناعات المترابطة بفرجيوة . ميلة، مذكرة مقدمة كجزء من متطلبات نيل شهادة الماجستير في علوم التسيير تخصص: تقنيات كمية، جامعة سطيف، 2008-2009.
- عبد العزيز شرابي، تقنيات التنبؤ، مطبوعات جامعة منتوري قسطينة، 2001- 2002.
- جهيدة زيد، دراسة العوامل المؤثرة على أسعار الأسهم للشركات المدرجة في السوق المالي "دراسة عينة من الشركات المدرجة في سوق قطر المالي للفترة 2009-2012"، مذكرة مقدمة لإستكمال متطلبات شهادة ماستر أكاديمي، الميدان : علوم إقتصادية، علوم التسيير وعلوم تجارية، الشعبة : علوم مالية ومحاسبية، التخصص : مالية المؤسسة، جامعة ورقلة، 2014.
- عدنان الصنوي، محاضرات في الاقتصاد القياسي،جامعة صنعاء
- عزام عبد المرضي، حامد واحمد حسين هارون، السلاسل الزمنية من الجهة التطبيقية ونماذج بوكس جينكيز، كتاب مترجم، دار المريخ، الرياض، 1992
- عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الدار الجامعية، الاسكندرية، 2005
- مولود حشمان، تقنيات التنبؤ قصيرة المدى، ديوان المطبوعات الجزائرية، الجزائر، 2002.
- محمد راتول، دروس في الاقتصاد القياسي، جامعة التكوين المتواصل، الجزائر
- نعمة الله نجيب ابراهيم، مقدمة في مبادىء الاقتصاد القياسي، مؤسسة شباب الجامعة الاسكنديرية، مصر، 2001

المراجع باللغة الاجنبية

- Bourbonnais, R., et Terraza . M (1998): "Analyse des Séries Temporelles en économie".PUF. Paris.
- Bourbonnais, R., (2004): "Econométrie", Dunod, 5em Edition, Paris.
- Allan. Philip, 1981, The econometric analysis of Time series, Edition Harvey, Great Britain.
- Bendib. Rachid, 2001, Econométrie, Office des publications universitaires (OPU), Algérie.
- Johnston. J, 1985, Méthode économétrique, Traduit par Bernard Guerrien; Vergara .Frank, Edition Economica, France, 3 ème édition.
- Damodar. Gujarati, 2004, Econométrie, Traduit par Bernard Bernier, Edition De Boeck, Belgique.
- Delmas. Bernard, 2000, Statistique descriptive, Edition Nathan, France.
- Dor. Eric, 2005, Econométrie, Edition Pearson, France.
- Duizaboet. Sébastien; Roux. Dominique, 2005, Gestion et management des entreprises, Edition Hachette, France.
- Ershler. Jacques; Grabot. Bernard, 2001, Gestion de production, Edition Hermes Science, France.

- Greene. William, 2005, Econométrie, Dirigée par Schalacther. Didier; Azamahou. Théophile; Coudrec. Nicolas; Monjon. Stéphanie et Nguyen. Van, Edition Pearson, France.

- Chibat. Ahmed, 2001, Cours de statistique, Edition Top colors, Algérie.

- Christian Labrousse; " Introduction à l'économétrie "; 1°ed, Dunod, Paris- 1985

- Gabrielle vangrevelinghe,Econometrie,Herman ,paris,1973

- Khaled khaldi, Methode statistique et probabilite,edition casbah,Alger,2000

- Sandrin lardic et valerie migon,economertiedes series temporelles macro economique et financieres, economica, parix, 2002