Corrigé type examen de probabilités et statistiques 2017

Exercice 1

Q1)

1) $C_{12}^{3} * C_{9}^{4} * C_{5}^{5} = 27720$;;; l'ordre n'est pas important dans chaque comité (sous-ensemble) et sans répétition.

Q2)

Soient A l'événement « avoir 1 accident ou plus » et B_1 (respectivement B_2 et B_3) l'événement « appartenir à la catégorie bas (respectivement moyen et haut) risque ».

1.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3) \\ &= 0{,}05 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}175. \end{aligned}$$

2.

$$P(B_1 \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \mid B_1)P(B_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}2}{0{,}825} \simeq 0{,}23.$$

Exercice 2

X: "calcul le nombre de parties de tournoi"

A: "l'équipe A gagne la partie", B: "l'équipe B gagne la partie"

x_i	2	3	4	5
$[X = x_i]$	$\{AA, BB\}$	$\{ABB, BAA\}$	$\{ABAA, BABB\}$	$\{ABABA, ABABB, BABAB, BABAA\}$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 2 * \frac{1}{2} + 3 * \frac{1}{4} + 4 * \frac{1}{8} + 5 * \frac{1}{8} = \frac{23}{8}$$

Exercice 3

Q1)

X: "compte le nombre de fois que le tireur atteint la cible au cours des 5 essais."

La probabilité de succès est $\frac{1}{3}$

C'est une répétition de 5 fois des épreuves indépendantes, où chacune a comme probabilité de succés $\frac{1}{3}$

$alors\ X \sim B(5;\ \frac{1}{3})$

$$P(X=2) = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

Q2)

X: "désigne le nombre d'erreur dans une page donnée"

$\lambda = \frac{220}{200} = 1.1 \qquad alors \qquad X \sim P(1.1)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - \left[\frac{e^{-1.1} * (1.1)^0}{0!} + \frac{e^{-1.1} * (1.1)^1}{1!}\right] = 0.301$$

Q3)

Solution. La variable aléatoire X qui représente le temps d'attente (en minutes) entre deux trains peut être modélisée par une loi exponentielle d'espérance égale à 5, c'est à dire de paramètre $\lambda = 1/5$ et donc $X \sim \mathcal{E}(1/5)$.

$$P\{X > 7\} = \int_7^\infty \frac{1}{5} e^{-x/5} dx = \left[-e^{-x/5}\right]_7^\infty = e^{-7/5} \approx 0.247$$

Exercice 4

1) **Déterminer la valeur de a**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow a \int_0^1 x(1-x)dx = 1 \Rightarrow a \int_0^1 (x - x^2)dx = 1 \Rightarrow$$

$$a\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = 1 \Longrightarrow a\frac{1}{6} = 1 \Longrightarrow a = 6$$

$D'o$ù: $$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & si\ x \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2) **Fonction de répartition**

Si $\boldsymbol{x} \in]-\infty, \mathbf{0}[$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$$

Si $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}[$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + 6 \int_{0}^{x} t\,(1-t)\, dt = 6\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x = (3t^2 - 2t^3)|_0^x$$

$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$

Si $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{1}, +\infty[$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + 6 \int_{0}^{1} t(1-t^2)dt + \int_{1}^{+\infty} 0\, dt = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

3)

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$