3^{eme} année licence
Informatique

2016/2017

Corrigé-type de l'examen de Probabilités & Statistiques

Exercice 01

1) $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ **Vraie**

2) $P(A \mid B) = P(A)$ **Vraie**

3) $P(B \mid A) = P(A)$ **Fausse**

4) $P(A \mid B) = P(B \mid A)$ **Fausse**

Exercice 02

Partie A

$\boldsymbol{A}$: " 1^{ere} *pièce est défectueuse* " , $P(A) = \frac{3}{8} \Longrightarrow P(\bar{A}) = \frac{5}{8}$

$\boldsymbol{B}$: " 2^{eme} *pièce est défectueuse* " , $P(B) = \frac{2}{5} \Longrightarrow P(\bar{B}) = \frac{3}{5}$

1) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) * P(\bar{B}) = \frac{5}{8} * \frac{3}{5} = \frac{3}{8} \simeq 0.375$

2)
$$\begin{aligned} P\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) &= P\big((A \cap \bar{B}) \cup P(\bar{A} \cap B)\big) \\ &= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) - P(A \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap B) \\ &= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) - 0 \\ &= P(A) * P(\bar{B}) + P(\bar{A}) * P(B) \\ &= \frac{3}{8} * \frac{3}{5} + \frac{5}{8} * \frac{2}{5} = \frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40} \simeq 0.475 \end{aligned}$$

Partie B

U1 : " urne 1 " $\Longrightarrow P(U1) = \frac{1}{3}$

U2 : " urne 2 " $\Longrightarrow P(U2) = \frac{1}{3}$

U3 : " urne 3 " $\Longrightarrow P(U3) = \frac{1}{3}$

J_i : " la i ^{eme} boule tirée est jaune"

$$P(J_1 \cap J_2) = P(J_1 \cap J_2|U1) * P(U1) + P(J_1 \cap J_2|U2) * P(U2) + P(J_1 \cap J_2|U3) * P(U3)$$

$$P(J_1 \cap J_2) = P(J_1|\mathrm{U1}) * \mathrm{P}(J_2|U1) * P(U1) + P(J_1|\mathrm{U2}) * \mathrm{P}(J_2|U2) * P(U2) + P(J_1|\mathrm{U3}) * \mathrm{P}(J_2|U3) * P(U3)$$

$P(J_1|\mathrm{U1}) = \mathrm{P}(J_2|U1) = \frac{2}{5} = 0.4$, $P(J_1|\mathrm{U2}) = \mathrm{P}(J_2|U2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$,

$P(J_1|\mathrm{U3}) = \mathrm{P}(J_2|U3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$ alors :

$P(J_1 \cap J_2) = 0.1716$

Exercice 03

Parité A

1)

$$\sum_{xi} P(x_i) = 1 \Rightarrow 0.1 + m + 2m + 2m + m = 1 \Rightarrow 0.1 + 6m = 1 \Rightarrow m = 0.15$$

$$f(x) = \begin{cases} 0.10 & si\ \ x = 0 \\ 0.15 & si\ x = 1\ ou\ x = 4 \\ 0.30 & si\ x = 2\ ou\ x = 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

2)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ 0.10 & si\ \ 0 \le x < 1 \\ 0.25 & si\ \ 1 \le x < 2 \\ 0.55 & si\ \ 2 \le x < 3 \\ 0.85 & si\ \ 3 \le x < 4 \\ 1 & si\ x \ge 4 \end{cases}$$

$$P(2 \le X \ \le 4) = F(4) - (F2-) \ = 1 - 0.25 = 0.75$$

3)

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{xi}} \mathrm{xi} * \mathrm{P(xi)} = (0 * 0.1) + (1 * 0.15) + (2 * 0.3) + (3 * 0.3) + (4 * 0.15)$$

$$\mathrm{E(X)} = 2.25$$

Partie B

1) **La loi de X :**

X : "nombre d'articles défectueux à la fin d'une journée"

Evènement de succés : " article défecteux"

probabilité de succés : P = 0.03

on a une sucssession d'épreuves(expériences aléatoires identiques)

indépendantes, et chacune a une probabilité de succés 0.03

Alors $X \sim B(112\ ;\ 0.03)$

2) $P(X=k) = C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k}$

3) $E(X) = n * p = 112 * 0.03 = 3.36$

En moyenne il y a 4 articles défectueuse

4) Par la loi de poisson quand $n \geq 30$ et $p \leq 0.1$

$$P(X=K) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^k}{k!}$$

5) $P(X=10) = \frac{e^{-3.36} * (3.36)^{10}}{10!} = \frac{0.035 * 183397.23}{3628800} \simeq 0.0018$

Exercice 04

1) Déterminer la valeur de k

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow k\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 1 \Rightarrow k\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 1$$

$$\Rightarrow k\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & si\ x \in [-1,1] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

2)

Si $x \in]-\infty, -1[$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Si $x \in [-1, 1[$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \frac{3}{4}\int_{-1}^{x} (1-t^2)\,dt = \frac{3}{4}(t - \frac{t^3}{3})\Big|_{-1}^{x} = \frac{-x^3+3x+2}{4}$$

Si $x \in [1, +\infty[$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} (1-t^2)dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si x < -1} \\ \frac{-x^3+3x+2}{4} & si -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{Si x} \geq 1 \end{cases}$$

4)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(x - x^3)dx = \frac{3}{4}(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4})\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(x^2 - x^4)dx = \frac{3}{4}(x^2 - x^4)dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$E(X^2) = \frac{1}{5}$ Alors

$$V(X) = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$