Corrigé-type d'examen de probabilités 2019

Exercice 1

1) $A_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!} = 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = \ \ 151200$

2) $A_{9}^{5} = \frac{9!}{(9-5)!} = 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = \ \ 15120$

Exercice 2

$\boldsymbol{X}$: Le nombre de tirage nécessaire pour interroger un homme

$\boldsymbol{F_i}$: Interroger une fomme à la i^{eme} fois.

$\boldsymbol{H_i}$: Interroger un homme à la i^{eme} fois .

1) La loi de X

$\boldsymbol{x_i}$	**1**	**2**	**3**	**4**
$[X = x_i]$	H_1	$F_1 \cap H_2$	$F_1 \cap F_2 \cap H_3$	$F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap H_{\boldsymbol{4}}$
$\boldsymbol{p(X = x_i)}$	$\boldsymbol{\frac{5}{8}}$	$\frac{3}{8} * \frac{5}{7} = \boldsymbol{\frac{15}{56}}$	$\frac{3}{8} * \frac{2}{7} * \frac{5}{6} = \boldsymbol{\frac{5}{56}}$	$\frac{3}{8} * \frac{2}{7} * \frac{1}{6} * \frac{5}{5} = \boldsymbol{\frac{1}{56}}$

$\boldsymbol{Remarque}$: $P(F_1 \cap H_2) = p(F_1) * p(H_2|F_1) = \frac{3}{8} * \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

$le\ meme\ principe\ pour\ le\ reste\ , les\ tirages\ sont\ dépendants\ (tirage\ sans\ remise\ ).$

2) L'espérance mathématique

$E(X) = \sum_{x_i} x_i * p(X = x_i) = 1 * \frac{5}{8} + 2 * \frac{15}{56} + 3 * \frac{5}{56} + 4 * \frac{1}{56} = \frac{84}{56} = 1.5$

Exercice 3

1) $X \sim P(\lambda)$

$$\left.\begin{array}{ll} 1\ personne & \longmapsto 2\ minutes \\ \lambda & \longmapsto 5\ \ minutes \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{X} = 0) = \frac{\mathrm{e}^{-2.5}\ \ (2.5)^0}{0!} = \mathrm{e}^{-\,2.5} = 0.0821$$

2) X modélise l'heure d'arrivé de bus à l'arrêt .

a) $X \sim \mu\,([0, 30])$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} & , si\ x \ \in [0, 30] \\ 0 & , ailleurs \end{cases}$$

$$p(X \geq 10) = \int_{10}^{30} \frac{1}{30}\ \ dx = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

b) $X \sim \mu\,([15, 30])$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{15} & , si\ x \ \in [15, 30] \\ 0 & , ailleurs \end{cases}$$

$$p(25\ \leq X \leq 30) = \int_{25}^{30} \frac{1}{15}\ \ dx = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Exercice 4

On doit d'abord trouver la valeur de c :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow c\int_{0}^{+\infty} xe^{-\frac{x}{2}}\ dx = 1$$

$$\boldsymbol{v(x) = x \Rightarrow \grave{v}(x) = 1} \qquad \boldsymbol{\grave{u}(x) = e^{-\frac{x}{2}}} \Rightarrow \boldsymbol{u(x)} = -2\int -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \boldsymbol{-2e^{-\frac{x}{2}}}$$

$$\Rightarrow c\left(\left[x(-2e^{-\frac{x}{2}})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2e^{-\frac{x}{2}}\,dx\right) = 1 \Rightarrow -4c\int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\ dx = 1$$

$$\Rightarrow -4\,c\,\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow -4c(0-1) = 1 \Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

Alors $f(x) = \frac{1}{4}\,x\,e^{-\frac{x}{2}}$, $si\ x > 0$

$$p(X \geq 5) = \int_5^{+\infty} \frac{1}{4}\,xe^{-\frac{x}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int_5^{+\infty} \frac{1}{2}\,x\,e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$\boldsymbol{v(x) = x \Rightarrow \grave{v}(x) = 1} \qquad \boldsymbol{\grave{u}(x) = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}} \Rightarrow \boldsymbol{u(x)} = -\int -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \boldsymbol{-e^{-\frac{x}{2}}}$$

$$p(X \geq 5) = \frac{1}{2}\left(\left[-x\,e^{-\frac{x}{2}}\right]_5^{+\infty} - \int_5^{+\infty} -e^{-\frac{x}{2}}\ dx\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(-5e^{-\frac{5}{2}}\right) - 2\int_5^{+\infty} -\frac{1}{2}\,e^{-\frac{x}{2}}\ dx\right)$$

$$p(X \geq 5) = \frac{1}{2}\left(5\,e^{-\frac{5}{2}} - 2\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_5^{+\infty}\right) = \frac{1}{2}\left(5\,e^{-\frac{5}{2}} - 2(-e^{-\frac{5}{2}})\right) = \frac{1}{2}\left(5\,e^{-\frac{5}{2}} + 2\,e^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$p(X \geq 5) = \frac{7}{2}\ e^{-\frac{5}{2}} = 0.2872$$