Module Algebre1 – Première année informatique

مقياس الجبر 1 – السنة الأولى إعلام آلي

Chapitre 1 : **Notions de logique** • Table de vérité, quantificateurs, types de raisonnements.

Chapitre 2 : Ensembles et applications • Définitions et exemples • Applications : injection, surjection, bijection, image directe, image réciproque, restriction et prolongement.

Chapitre 3 : Relations binaires sur un ensemble • Définitions de base : relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive • Relation d'ordre- Définition. Ordre total et partiel • Relation d'équivalence : classe d'équivalence.

Chapitre 4 : **Structures algébriques** • Loi de composition interne. Partie stable. Propriétés d'une loi de composition interne • Groupes-Définitions. Sous-groupe-Exemples-Homomorphisme de groupes- isomorphisme de groupes. Donner des exemples de groupes finis Z/nZ (n= 1, 2 , 3,…) et le groupe de permutations S3 • Anneaux-Définition- Sous anneaux. Règles de calculs dans un anneau. Eléments inversibles, diviseurs de zéro-Homomorphisme d'anneaux-Idéaux • Corps-Définitions-Traiter le cas d'un corps fini à travers l'exemple Z/pZ ou p est premier, IR et C

Chapitre 5 : **Anneaux des polynômes** • Polynôme. Degré • Construction de l'anneau des polynômes • Arithmétique des polynômes-Divisibilité-Division euclidienne-Pgcd et ppcm de deux polynômes-Polynômes premiers entre eux-Décomposition en produit de facteurs irréductibles • Racines d'un polynôme-Racines et degré -Multiplicité des racines.

Mode d'évaluation :

Examen (60%**)**,

Contrôle conti nu – interrogations, devoirs, participations et présences- (40%)

Références

• M. Mignotte et J. Nervi, Algèbre : licences sciences 1ère année, Ellipses, Paris, 2004.

• J. Franchini et J. C. Jacquens, Algèbre : cours, exercices corrigés, travaux dirigés, Ellipes, Paris, 1996.

• C. Degrave et D. Degrave, Algèbre 1ère année : cours, méthodes, exercices résolus, Bréal, 2003.

• S. Balac et F. Sturm, Algèbre et analyse : cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Presses Polytechniques et Universitaires, 2003.

الفصل الأول: مدخل للمنطق الرياضي

المنطق الرياضي او المنطق الرمزي هو أحد حقول الرياضيات المتصل بأساسيات الرياضيات، علوم الحاسوب النظرية والذكاء الاصطناعي .
ويمتد علم المنطق الحديث ليشمل آفاقًا أرحب بكثير مما شمله المنطق التقليدي لأرسطو الذي يعتمد على الاستقراء المطلق. ومن علماء المنطق الحديث البارزين عالما الرياضيات البريطانيان **جورج بُول** و**ألْفرد نُورْث وايتهد**، و البريطاني **راسل**. وعلى عكس المناطقة التقليديين، فقد استخدم هؤلاء المناطقة مناهج حسابية وأساليب تستخدم الرموز .
ويستخدم علم المنطق اليوم بصفة أساسية لاختبار مدى سلامة القضايا .كما أن له استخدامات مهمة أيضًا في مجال العمل مع أجهزة مثل الحواسيب، والدوائر الكهربائية .

1- القضية

تعريف1:

القضية: (Proposition) نسمي قضية كل جملة خبرية لها معنى قد تكون صحيحة و قد تكون خاطئة نرمز للصحيحة بـ1 او V و للخاطئة بـ 0 او F نرمز للقضايا بالأحرف ...,P, Q, R.

امثلة :

- جيجل مدينة ساحلية قضية صحيحة.
- 3 عدد زوجي قضية خاطئة.
- السماء صافية ليست قضية لأننا لا يمكن الحكم عليها.

نفي قضية :(Négation d'une proposition) نفي قضية P هي قضية يرمز لها $\overline{P}$ أو $\tilde{}P$ أو $\neg P$ و نقرا نفي P او ليس P .
اذا كانت P صحيحة كان نفيها خاطئة و العكس بالعكس
نفي القضية الخاطئة : $10 > 25$ هي القضية الصحيحة: $10 \leq 25$.

جدول الحقيقة:(Tableau de vérité) جدول الحقيقة للقضية P و نفيها يعطى بـ:

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

2- الروابط المنطقية : (Connecteurs logiques)

- **الوصل: (Conjonction)** وصل قضيتين Q ،P (او اكثر) هو القضية التي يرمز لها $P\wedge Q$ والتي تكون خاطئة اذا كانت احداهما على الاقل خاطئة .
  القضية 3<2 و 5 عدد موجب، قضية خاطئة.
- **الفصل: (Disjonction)** فصل قضيتين Q ،P (او اكثر) هو القضية التي يرمز لها $P\vee Q$ والتي تكون صحيحة اذا كانت احداهما على الاقل صحيحة.
  القضية 1<2 أو 3- عدد موجب، قضية صحيحة.
- **الاستلزام(Implication)** الاستلزام المنطقي للقضيتين P و Q و يرمز له $P\Rightarrow Q$ هو القضية $\overline{P}\vee Q$ و تسمى القضية $Q\Rightarrow P$ **بـالاستلزام العكسي (Implication inverse)** للاستلزام $P\Rightarrow Q$.
  القضية 1<2 ⇐ 2 عدد فردي، قضية صحيحة.
- **تكافؤ: (Equivalence)** نسمي تكافؤ القضيتين P و Q و يرمز له $P\Leftrightarrow Q$ القضية $(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow P)$
  القضية $3^2\leq(-2)^2 \Leftrightarrow 3\leq -2$ قضية خاطئة.

ملاحظة: اذا كانت القضيتان Q,P متكافئتين فإنهما صحيحتين او خاطئتين في أن واحد.
ويعطى جدول الحقيقة لهذه القضايا بـ:

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\Rightarrow Q$	$Q\Rightarrow P$	$P\Leftrightarrow Q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

نظرية 1: اذا كانت R,Q,P ثلاث قضايا فان

-1 $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$، $P \wedge P \Leftrightarrow P$ و $P \vee P \Leftrightarrow P$.

-2 $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ و $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

-3 $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ و $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

-4 $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ و $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ الوصل توزيعي على الفصل و الفصل توزيعي على الوصل

-5 $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ و $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ نفي الوصل هو فصل النفي و نفي الفصل هو وصل النفي .

البرهان : نستخدم جدول الحقيقة و نكتفي بإثبات 4 و 5

اثبات أن $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

اثبات أن $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ و $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

- **عكس نقيض الاستلزام** (Implication contraposé): عكس نقيض الاستلزام $P \Rightarrow Q$ هو الاستلزام $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ و هو مكافئ للاستلزام $P \Rightarrow Q$

يكفي ملاحظة $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{\overline{Q}} \vee \overline{P}\right) \Leftrightarrow \left(Q \vee \overline{P}\right) \Leftrightarrow \left(P \Rightarrow Q\right)$

عكس نقيض الاستلزام $2>1 \Rightarrow 2$ عدد فردي، هو الاستلزام: 2عدد زوجي $\Rightarrow 2\leq 1$

ملاحظة: القضايا $\overline{P \wedge Q}$ و $\overline{P \vee Q}$ تسميان على الترتيب NOTAND و NOTOR ويرمز لهما $P \uparrow Q$ و $P \downarrow Q$ على الترتيب.

القضية $P \oplus Q$ المعرفة بـ $(P \oplus Q) \Leftrightarrow \overline{(P \Leftrightarrow Q)}$ وتسمى XOR

الروابط $\oplus$، $\uparrow$ و $\downarrow$ تستعمل خصيصا في الاعلام الالي و الالكترونيك.

-3 الدالة العبارية (او لجملة المفتوحة) و المكممات **(Prédicat et quantificateurs) :**

الجملة المفتوحة (او الدالة العبارية) (Prédicat)

تعريف2: الجملة المفتوحة هي كل عبارة رياضياتية تتوقف صحتها على متغير او عدة متغيرات تنتمي لمجموعة معلومة E

مثال: n زوجي: $n\in\mathbb{N}$ ، $x+y=10$: $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$.

المكمم الكلي quantificateur universel : يرمز له بـ $\forall$ و العبارة " $\forall x\in E; P(x)$ " تقرا مهما يكن x من E لدينا P(x).

مثال: 1) 2n زوجي: $\forall\ n\in\mathbb{N}$

2) $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}$:x+y=10

3) $\forall x\in R;\ x^2+1>0$. قضية صحيحة

4) $\forall x, y\in]0\ 1[\ :\ xy\in]0\ 1[$ قضية صحيحة

5) $\forall x, y \in]0\ 1[: x+y \in]0\ 1[$ قضية خاطئة

المكمم الوجودي quantificateur existentiel : يرمزله بـ $\exists$ و العبارة " $\exists x \in E; P(x)$ " تقرا يوجد على الاقل x من E يحقق P(x).

مثال: 1) n زوجي: $\exists n \in \mathbb{N}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y=10$ قضية صحيحة

3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y=10$ قضية خاطئة

4) $\exists x, \exists y \in]0\ 1[: x+y \in]0\ 1[$ قضية صحيحة

القضية	اذا كانت صحيحة	اذا كانت خاطئة
$\forall x \in E; P(x)$,	P(x) صحيحة من اجل كل x	P(x) خاطئة من اجل عنصر x على الاقل
$\exists x \in E; P(x)$	P(x) صحيحة من اجل عنصر x على الاقل	P(x) خاطئة من اجل كل x

ملاحظة:

نفي القضية $\forall x \in E : P(x)$ هي القضية $\exists x \in E : \overline{P(x)}$

نفي القضية $\exists x \in E : P(x)$ هي القضية $\forall x \in E : \overline{P(x)}$

نفي القضية $\exists x \in E, \forall y \in E : P(x,y)$ هي القضية $\forall x \in E, \exists y \in E : \overline{P(x,y)}$

نفي القضية $\forall x \in E, \exists y \in E : P(x,y)$ هي القضية $\exists x \in E, \forall y \in E : \overline{P(x,y)}$

نفي القضية $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y=10$ هي القضية $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y \neq 10$

المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة نحو l تكتب

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \in N, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

نفيها

(U_n) غير متقاربة اذا تحقق: $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n > n_0 \wedge |U_n - l| < \varepsilon$

4. طرق الإستدلال: توجد ستة طرق للاستدلال هي:

1.4 الإستدلال المباشر Raisonnement direct:

لإثبات أن Q صحيحة نفرض أن P صحيحة ونثبت صحة الاستلزام $P \Rightarrow Q$.

مثال : برهن المتراجحة $\forall x \in \Re; x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$

لدينا $(x + \frac{1}{2})^2 \geq 0$ صحيحة

$(x + \frac{1}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ استلزام صحيح و بالتالي: $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ صحيحة

الإستدلال بالخلف Raisonnement par contradiction ou absurde :

اذا اردنا اثبات صحة قضية نفرض انها خاطئة و نحاول ان نجد تناقض او عبارة خاطئة.

مثال : اذا كان a عدد طبيعي بحيث $(a^3 + a^2 + a)$ عدد فردي بين كذلك أن a عدد فردي. نفرض جدلا أن a زوجي اذن a^2 زوجي و a^3 زوجي و منه $(a^3 + a^2 + a)$ زوجي و هذا يتناقض مع الفرض.

الإستدلال بفصل الحالات Raisonnement par separation des cas

اذا كانت لدينا: $R \to P$ و $R \to Q$ صحيحتان فانه بإمكاننا اثبات ان $R \to [P \vee Q]$ صحيحة.

مثال : برهن المتراجحة $\forall x > 0; x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

بما ان $x > 0$ لدينا حالتين:

الحالة الأولى: $x > 1$: فان $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ و بالتالي $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$.

الحالة الثانية: $0 < x \leq 1$: فان $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1$ و بالتالي $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

الإستدلال بعكس النقيض Raisonnement par contraposé:

نعلم ان الإستلزام المنطقي $Q \Rightarrow P$ يكافئ عكس نقيضه $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ فلاثبات صحة $Q \Rightarrow P$ نكتفي باثبات صحة $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

مثال : برهن أن $\forall x \in \Re; x^2 > 4 \to [x > 2 \lor x < -2]$

نبين عوض ذلك $\forall x \in \Re; -2 \leq x \leq 2 \to x^2 \leq 4$

$$-2 \leq x \leq 2 \to |x| \leq 2 \to |x|^2 \leq 4 \to x^2 \leq 4$$

الإستدلال بالمثال المضاد Raisonnement par contre exemple

لإثبات أن القضية : $\forall x \in E, P(x)$ خاطئة يكفي اثبات صحة $\exists x \in E: \overline{P(x)}$

مثال : لاثبات ان القضية " كل عدد صحيح موجب هو مجموع ثلاث مربعات " خاطئة من اجل العدد 7 فأن الاعداد الوحيدة التي بامكانها تشكل العدد 7 هي 0، 2، 1 لكن مجموع مربعاتها لا تساوي 7

الإستدلال بالتراجع Raisonnement par récurrence :

لاثبات صحة القضية $[\forall n \geq n_0 ; P(n)]$ حيث n_0 , n اعداد طبيعية نتبع ما يلي:

1-اثبات صحة $[P(n_0)]$.

2- نفرض أنه من اجل $n \geq n_0$: $[P(n)]$ صحيحة و نثبت صحة $[P(n+1)]$

مثال: لنثبت صحة الخاصية التالية: من أجل كل عدد طبيعي n : $1+3+5+.....+(2n+1)=(n+1)^2$

1. من أجل $n=0$ لدينا: $1=(0+1)^2$ محققة من أجل $n=0$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n \geq 0$ أي: $1+3+5+.....+(2n+1)=(n+1)^2$.

ولنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي: $1+3+5+.....+(2n+3)\overset{?}{=}(n+2)^2$

لدينا

$$1+3+5+.....+(2n+3)=[1+3+5+....+(2n+1)]+(2n+3)$$
$$=(n+1)^2+(2n+3)=n^2+4n+4=(n+2)^2$$

سلسلة التمارين

التمرين 01:

1) أكتب جدول الحقيقة للقضايا التالية :

$$(1)\quad (P\vee\overline{P})\ ,(2)\quad (P\wedge\overline{P})\ ,(3)\quad [P\wedge(P\vee Q)]\ ,(4)\quad [P\vee(P\wedge Q)]$$

ماذا تستنتج؟

2)برهن مستخدما جدول الحقيقة أن الاستلزام المنطقي غير تجميعي أي $[(p\Rightarrow q)\Rightarrow r]\Leftrightarrow[p\Rightarrow(q\Rightarrow r)]$

التمرين 02:

اكتب بدلالة المكممات القضايا التالية:

1) جميع الطلبة ملزمون باجراء الفحص الطبي

2) طالب من جامعة جيجل تفوق في المسابقة الدولية

التمرين 03:

1) وضح حسب قيم x الحقيقة إن كانت العبارات التالية قضايا مبينا الصحيحة منها من الخاطئة:

$$(1)\quad \sin^2(tgx)\geq 0\qquad (2)\quad \frac{1}{1-x^2}\geq 1$$

2) هل القضايا التالية صحيحة ؟

$$(3)\quad 5-1=0\vee\frac{1}{2}\in Q\qquad (4)\quad x\in\phi\Rightarrow x\in E$$

3) أكتب نفي القضيتين(3)و (4) ، عكس النقيض القضية(4)و القضية (3) على شكل استلزام منطقي.

التمرين 04:

برهن دون استعمال جدول الحقيقة العلاقات التالية:

$$(1)\quad (P\vee Q)\Leftrightarrow(\overline{P}\Rightarrow Q)\quad (2)\quad P\Leftrightarrow[(Q\Rightarrow P)\wedge(\overline{Q}\Rightarrow P)]$$

التمرين 05:

برهن مستخدما مختلف طرق البراهين العلاقات التالية:

1) إذا كان x عدد حقيقي موجب فإن $\frac{x+1}{x+2}<\frac{x+3}{x+4}$

2) مجموع عدد ناطق مع عدد صم هو عدد صم.

3) من أجل كل $n\in N$: $n^2\ paire\Leftrightarrow n\ paire$

4) $\forall x\in\Re: x^2-9>0\Rightarrow x^2-x-2>0$

5) ليكن x عدد حقيقي موجب.برهن الاستلزام التالي: $[\forall\varepsilon>0: x<\varepsilon\Rightarrow x=0]$

6) برهن متراجحة برنولي: $h>-1\Rightarrow\forall n\in N:(1+h)^n\geq 1+nh$

التمرين 06:

برهن مستخدما مختلف طرق البراهين العلاقات التالية:

1) المستقيمان $y=x+1$ و $y=x-1$ متوازيان في المستوى.

2) اذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in N}$متقاربة فإن المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ متباعدة حيث $v_n=u_n+(-1)^n$

3) $\forall n\in N,\exists k\in N; n^2=4k\ ou\ n^2=4k+1$

التمرين 07:

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ برهن أن $(1)\Rightarrow(2)$ حيث:

$$(1)\quad \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in N, \forall n\in N, n>n_0 \Rightarrow |u_n-1|\leq \varepsilon$$

$$(2)\quad \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in N, \forall n\in N, n\geq n_0 \Rightarrow |u_n-1|< \varepsilon$$

التمرين 08: (يترك للطالب)

أعط نفي القضايا التالية:

$$(1)\quad \forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x: |x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$(2)\quad \exists \varepsilon>0, \forall n\in N, \exists (p,q)\in N^2: p\geq q\geq n \wedge |u_p-u_q|\geq \varepsilon$$

التمرين 09:

لدينا ثلاثة طلبة أحمد ، علي ، سالم و ثلاثة علامات 06،10 و 16.

لتكن القضايا الأربع التالية :

علامة أحمد 06 ⇐ علامة علي 10 (P_1)

علامة علي 6 ⇐ علامة أحمد سالم 10 (P_2)

علامة أحمد ليست 10 ⇐ علامة علي 16 (P_3)

علامة سالم 16 ⇐ علامة علي 06 (P_4)

املأ الجدول التالي باعتبار صحة القضية من خطئها:

الاحتمال المقترح	(P_1)	(P_2)	(P_3)	(P_4)
علامة احمد 6،علامة علي 10 و علامة سالم 16				
علامة احمد 6،علامة علي 16 و علامة سالم 10				
علامة احمد 10،علامة علي 6 و علامة سالم 16				
علامة احمد 10،علامة علي 16 و علامة سالم 6				
علامة احمد 16،علامة علي 10 و علامة سالم 6				
علامة احمد 16،علامة علي 6 و علامة سالم 10				

اذا كانت القضايا الاربعة صحيحة عين علامة كل طالب.