جــامعة محمد الصديق بن يحي – جيجـــل -

كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي **السنة الجامعية 2023/2022**

قسم: الإعلام الآلي **امتحـــــان قصير في مـــادة الجبر 1** **المدة : 1سا و 15د**

التمرين الأول:

I- لتكن القضية(P) التالية :

$$\forall x \in \mathbb{R}: [(x+1<0) \vee x=0] \Longrightarrow \frac{x}{x^2-x-2} \leq 0.$$

1- اكتب نفي و عكس نقيض القضية (P).

2- باستعمال البرهان حالة بحالة بين أن القضية (P) صحيحة.

II- باستعمال البرهان بالتراجع بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}: 3^n \geq 1+2n$$

التمرين الثاني:

لتكن $E=\mathbb{R}^2$, نعرف العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ على E كما يلي :

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2: (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^*;\ (x',y')=(\alpha x, \alpha y)،$$

1- برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على E.

2- عين صنف التكافؤ التالي: $\dot{\widehat{(2,1)}}$.

التمرين الثالث:

I- ليكن التطبيق

$$f: \mathbb{R}-\{\tfrac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x)=\frac{x+1}{2x-1},$$

1- عين الصورة العكسية $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ ، هل f غامر؟

2- أحسب الصورة المباشرة $f\left(\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right)$ (يمكن استعمال اتجاه تغير الدالة f).

II- نعتبر التطبيق $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$: المعرف بــ:

$$\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}: g(x)=f(x)=\frac{x+1}{2x-1}.$$

- برهن أن التطبيق g تقابلي وعين تطبيقه العكسي g^{-1}.

بالتوفيق

تصحيح الامتحان القصير (2022 -2023)

التمرين الاول:

I- **نفي (P)** : لدينا $\bar{P} \equiv \exists x \in \mathbb{R}: \overline{[(x+1<0) \vee x=0] \Longrightarrow \frac{x}{x^2-x-2} \leq 0}$

$\equiv \exists x \in \mathbb{R}: [(x+1<0) \vee x=0] \wedge \overline{\frac{x}{x^2-x-2} \leq 0}$,

$\equiv \exists x \in \mathbb{R}: [(x+1<0) \vee x=0] \wedge \frac{x}{x^2-x-2} > 0$.

عكس نقيض (P) هو $\forall x \in \mathbb{R}: \overline{\frac{x}{x^2-x-2} \leq 0} \Longrightarrow \overline{[(x+1<0) \vee x=0]}$

و هو $\forall x \in \mathbb{R}: \frac{x}{{}^2-x-2} > 0 \Longrightarrow [(x+1 \geq 0) \wedge x \neq 0]$

إثبات أن (P) صحيحة: نميز حالتين

- من أجل $x+1<0$: لدينا $x<-1$ ومنه $x<0$ و لدينا أيضا ${}^2-x-2>0$ (من جدول إشارة ${}^2-x-2$). و ينتج أن $\frac{x}{{}^2-x-2}<0$ و منه $\frac{x}{x^2-x-2} \leq 0$.
- ومن اجل $x=0$: لدينا $\frac{0}{0^2-0-2}=0 \leq 0$.

II- **إثبات أن** : $\forall n \in \mathbb{N}: 3^n \geq 1+2n$

- من أجل $n=0$: لدينا $3^0=1 \geq 1+2\times 0=1$ (الخاصية محققة)
- نفرض أن: $3^n \geq 1+2n$ من أجل $n \in \mathbb{N}$,

ونبرهن أن: $3^{(n+1)} \geq 1+2(n+1)=3+2n$.

لدينا : $3^{(n+1)}=3\times 3^n \geq 3\times(1+2n)=3+6n \geq 3+2n$ (ضرب طرفي المتراجحة في عدد موجب لا يغير الترتيب و أيضا $\forall n \in \mathbb{N}: 6n \geq 2n$).

التمرين الثاني :

1- **إثبات أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ**: ($\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ)⇔($\mathcal{R}$ إنعكاسية, تناظرية و متعدية)

- $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: (x,y)\mathcal{R}(x,y)\right) \Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ انعكاسية)

من اجل كل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ لدينا $(x,y)=(1\times x, 1\times y)$ حيث $1 \in \mathbb{R}^*$ و منه $\mathcal{R}$ إنعكاسية.

- $\left(\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2: (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y)\right) \Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ تناظرية)

لدينا $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^*;\ (x',y')=(\alpha x,\alpha y) \Rightarrow x'=\alpha x \wedge y'=\alpha y$

$\Rightarrow x=\frac{1}{\alpha}x' \wedge y=\frac{1}{\alpha}y' \Rightarrow \exists \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^*;\ (x,y)=\left(\frac{1}{\alpha}x',\frac{1}{\alpha}y'\right) \Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y).$

- $\left(\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2: (x,y)\mathcal{R}(x',y') \wedge (x',y')\mathcal{R}(x'',y'') \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x'',y'')\right) \Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ متعدية)

لدينا:
$$\begin{cases}(x,y)\mathcal{R}(x',y')\\ \wedge\\ (x',y')\mathcal{R}(x'',y'')\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\exists \alpha \in \mathbb{R}^*;\ (x',y')=(\alpha x,\alpha y)\\ \wedge\\ \exists \alpha' \in \mathbb{R}^*;\ (x'',y'')=(\alpha' x',\alpha' y')\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x'=\alpha x \wedge y'=\alpha y\\ \wedge\\ x''=\alpha' x' \wedge y''=\alpha' y'\end{cases}$$

$\Rightarrow x''=\alpha'(\alpha x) \wedge y''=\alpha'(\alpha y) \Rightarrow x''=\alpha'' x \wedge y''=\alpha'' y; \alpha''=\alpha'\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x'',y'')$.

2- **تعين صنف التكافؤ:**

$$.\widehat{(2,1)}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)\mathcal{R}(2,1)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\exists\alpha\in\mathbb{R}^*;(2,1)=(\alpha\times x,\alpha\times y)\}$$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\exists\alpha\in\mathbb{R}^*;x=\frac{2}{\alpha}\wedge y=\frac{1}{\alpha}\right\}=\left\{(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2:x=2y\right\}.$$

التمرين الثالث:

-I

1- تعين الصورة العكسية: $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}:f(x)\in\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}:\frac{x+1}{2x-1}=\frac{1}{2}\right\}$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}:2x+2=2x-1\right\}=\emptyset\quad.$$

- f ليس غامر لأن $\frac{1}{2}$ ليس له سابقة.

2- حساب الصورة المباشرة: $f\left(\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right)=\left\{f(x);x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right\}$

لدينا: $0>\frac{-3}{(2x-1)^2}=(\quad)'f$ و منه f متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ و ينتج أن

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}<f(x)<\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}f(x)=+\infty$ ومنه $.f\left(\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

II- **إثبات أن التطبيق g تقابلي**: (g تقابلي)$\Leftrightarrow$(g غامر و متباين)

- (g متباين) $\Leftrightarrow\left(\forall\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}:\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2)\Rightarrow\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2\right)$,

لدينا $(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2)\Rightarrow\frac{x_1+1}{2x_1-1}=\frac{x_2+1}{2x_2-1}\Rightarrow\boldsymbol{2}x_1x_2-x_1+\boldsymbol{2}x_2-\boldsymbol{1}=\boldsymbol{2}x_1x_2-x_2+\boldsymbol{2}x_1-\boldsymbol{1}$

$$.\Rightarrow-\boldsymbol{3}x_1=-3x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

(g غامر) $\Leftrightarrow\left(\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\},\exists\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}:\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}\right)$

لدينا $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\frac{x+1}{2x-1}=y\Leftrightarrow x+1=2xy-y\Leftrightarrow x-2xy=-y-1$

$$.\Leftrightarrow x(1-2y)=-(y+1)\Leftrightarrow x=\frac{-(y+1)}{1-2y}=\frac{y+1}{2y-1}\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

لأنه من أجل $y\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ لدينا $\frac{y+1}{2y-1}\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$(من الجواب الخاص بالصورة المباشرة) و من أجل $y\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$

لدينا $\frac{y+1}{2y-1}\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ ($\boldsymbol{g}$ فردية)

ومنه g تقابلي و يقبل تطبيق عكسي g^{-1} حيث $g^{-1}:\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$

$$x\longmapsto g^{-1}(x)=\frac{x+1}{2x-1}\quad.$$