Chapitre 4

Introduction au contrôle des systèmes dynamiques : contrôle optimal, stabilisation

L'objet de l'automatique est l'étude des systèmes sur lesquels on peut agir par une commande (contrôle), le système pouvant être mécanique (moteur, robot,...), un processus chimique (réacteur), un circuit électrique,... D'un tel système résulte une relation entrée/sortie où l'entrée U représente le contrôle, c'est-à-dire le moyen d'action sur le système, et la sortie Y représente ce que l'on observe du système, généralement sous la forme de mesures.
Le but de l'automaticien est d'analyser le comportement du système, que l'on connait via la sortie Y, en fonction de l'entrée U qu'on lui impose. Son objectif est aussi de synthétiser les lois de contrôle à imposer en entrée afin d'obtenir des comportements répondant à certaines spécifications. Pour ce faire, on va utiliser une modélisation mathématique du phénomène qu'il représente. Il s'agit de l'approche par représentation d'état. On considère que le système au temps t est décrit par son état $X(t)$ et on modélise l'évolution du vecteur

$X(t)$ au cours du temps par un système contrôlé

$$(S) \qquad \begin{cases} \dot{X}(t) = F(t, X(t), U(t)) \\ Y(t) = G(t, X(t), U(t)). \end{cases}$$

On se contentera dans notre étude au cas où l'état, l'entrée et la sortie sont de dimension finie.

Pour tout instant t, $X(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $U(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et $Y(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Une fonction $U(\cdot)$ définie sur un intervalle $[0, s]$ avec $s > 0$, est appelée une loi de contrôle. À une loi de contrôle $U(\cdot)$ est associée une équation différentielle ordinaire

$$\dot{X}(t) = F_U(t, X(t)), \quad t \in [0, s],$$

où l'on note $F_U(t, X) = F(t, X, U(t))$. Ainsi, une fonction $X(\cdot)$ est solution de l'équation différentielle contrôlée $\dot{X}(t) = F(t, X(t), U(t))$ si il existe une loi de contrôle $U(\cdot)$ telle que $X(\cdot)$ est solution de l'équation différentielle $\dot{X}(t) = F_U(t, X(t)), \quad t \in [0, s]$.

On peut se poser les questions suivantes :

Contrôlabilité : Est-il possible de trouver un contrôle $U(\cdot)$ qui amène le système, initialement dans l'état $X(0)$, dans un état Z quelconque au temps $t = s$? Si oui, comment trouver un tel contrôle.

Observabilité : La connaissance de $Y(t)$ et de $U(t)$ pour tout $t \in [0, s]$ permet-elle de déterminer l'état $X(\cdot)$ pour tout $t \in [0, s]$ (ou ce qui est équivalent, l'état initial $X(0)$? Si oui, comment déterminer l'état sachant $Y(\cdot)$ et $U(\cdot)$.

Stabilisation : Comment construire un contrôle $U(\cdot)$ (et est-ce possible ?) qui stabilise asymptotiquement le système (S) autour d'un équilibre $\overline{X}$, c'est-à-dire telle que, pour toutes conditions initiales $X(0)$, on ait

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = \overline{X}.$$

Ces questions n'ont pas de réponses dans un cadre général. On se restreind dans notre étude à des systèmes de contrôle linéaires.

4.0.1 Systèmes autonomes, systèmes linéarisés

On considère une équation différentielle contrôlée

$$\dot{X}(t) = F(X(t), U(t)), \tag{4.1}$$

où l'état $X(\cdot)$ est à valeurs dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, le contrôle $U(\cdot)$ est à valeurs dans un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^m$, et F est une application continue de $\Omega \times \mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$.

On fixe une loi de contrôle $U(\cdot) \in L^\infty([\sigma, s], \mathcal{U})$. On appelle solution de l'équation différentielle (4.1) sur un sous-intervalle I de $[\sigma, s]$, une fonction $X(\cdot) : I \to \Omega$ telle que

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(X(s), U(s))ds, \quad \text{pour tous } t, t_0 \in I.$$

En particulier, la solution X satisfait (4.1) pour presque tout $t \in I$.

Le théorème suivant est une généralisation du Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 4.0.1 *(d'existence et d'unicité de solutions maximales) On suppose que $F \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathcal{U})$ et on fixe des données initiales $Z \in \Omega$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout contrôle $U(\cdot) \in L^\infty([t_0, s], \mathcal{U})$, il existe une unique solution maximale $X(\cdot)$ de $\dot{X}(t) = F(X(t), U(t))$ définie sur un intervalle I inclus dans $[t_0, s]$ et contenant t_0, telle que $X(t_0) = Z$.*
Le système contrôlé étant autonome, on peut toujours se ramener par translation du temps à des intervalles de temps de la forme $[0, s]$.
Pour tout point $Z \in \Omega$ et une loi de contrôle $U(\cdot) \in L^\infty([0, s], \mathcal{U})$, on note $X_{Z,U(\cdot)}(\cdot)$ la solution de

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t), U(t)) \\ X(0) = Z. \end{cases}$$

On définit une application généralisant la notion de flot : pour tout $t \in [0, s]$, on pose $\phi_t(Z, U(\cdot)) = X_{Z,U(\cdot)}(t)$, quand c'est possible, c'est-à-dire quand t appartient à l'intervalle de définition de $X_{Z,U(\cdot)}(\cdot)$ (cet intervalle étant de la forme $[0, s'[$, $0 < s' \leq s$).

On s'intérèsse maintenant à la dépendance d'une solution par rapport aux conditions initiales et à la loi de contrôle. Comme pour les équations différentielles ordinaires, cette dépendance s'obtient grâce au système linéarisé.

Théorème 4.0.2 *On suppose que* $F \in \mathcal{C}^1(\Omega\times\mathcal{U})$ *et on considère une solution* $\overline{X} : [0,s] \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *de* (4.1) *associée au contrôle* $\overline{U}(\cdot) \in L^\infty([0,s],\mathcal{U})$*. On note* $\overline{Z} = \overline{X}(0)$*. Alors, il existe un voisinage de* $(\overline{Z}, \overline{U}(\cdot))$ *dans* $\Omega \times L^\infty([0,s],\mathcal{U})$ *sur lequel, pour tout temps* $t \in [0,s]$*, l'application* ϕ_t *est définie. De plus,* ϕ_t *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur ce voisinage et sa différentielle est :* $\forall (W, V(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times L^\infty([0,s],\mathbb{R}^m)$*,* $D\phi_t(\overline{Z}, \overline{U}(\cdot)).(W, V(\cdot)) = \delta X(t)$*, où* $\delta X(\cdot)$ *est la solution de*

$$\begin{cases} \delta\dot{X}(t) = D_X F(\overline{X}(t), \overline{U}(t)).\delta X(t) + D_U F(\overline{X}(t), \overline{U}(t)).V(t), \ t \in [0,s] \\ \delta X(0) = W. \end{cases}$$

Ce système est appelé système linéarisé de (4.1) *autour de* $(\overline{X}(\cdot), \overline{U}(\cdot))$*.*
La différentielle partielle de F *par rapport à* X *est notée* $D_X F(X,U)$*. La différentielle partielle de* F *par rapport à* U *est notée* $D_U F(X,U)$*.*

Ce théorème montre que, autour d'une solution donnée, l'étude de solutions d'une équation différentielle contrôlée se ramène à l'étude d'une équation contrôlée linéaire.

4.0.2 Systèmes contrôlés linéaires et autonomes, Contrôle optimal

Soit le système

$$(S_3) \qquad \begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \ t \in [0,s] \\ Y(t) = CX(t) + DU(t), \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ sont des matrices non-nécessairement carrées et le contrôle $U(\cdot)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Contrôlabilité (relation entrée/état)

On considère un système contrôlé (S_3) linéaire et autonome. On s'intérèsse à la relation entre l'entrée et l'état, on a besoin que l'équation différentielle contrôlée dans $\mathbb{R}^n$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \quad t \in [0, s], \tag{4.2}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et le contrôle $U(\cdot)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Étant donné $X_0 \in \mathbb{R}^n$, on dit qu'un état $Z \in \mathbb{R}^n$ est atteignable en temps s à partir de X_0 si il existe une loi de contrôle $U : [0, s] \to \mathbb{R}^m$ telle que $X(s) = Z$, $X(\cdot)$ étant la solution de (4.2) satisfaisant $X(0) = X_0$. On note $\mathcal{A}(s, X_0)$ l'ensemble des états atteignables à partir de X_0 en temps s, c-à-d

$$\mathcal{A}(s, X_0) = \{X(s) : \ X(\cdot) \text{ est solution de } (S_3) \text{ telle que } X(0) = X_0\}.$$

Proposition 4.0.3 *Soit $U(\cdot)$ un contrôle et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution de $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$ valant X_0 à l'instant $t = 0$ est*

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Si $X(0) = 0$ alors,

$$X(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds,$$

et cette expression dépend linéairement de la loi de contrôle $U(\cdot)$.

De cette proposition, on déduit que l'ensemble $\mathcal{A}(s, 0)$ est un espace vectoriel, et que l'ensemble $\mathcal{A}(s, X_0)$ est l'espace affine $e^{sA}X_0 + \mathcal{A}(s, 0)$.

L'ensemble des points atteignables à partir de X_0 est complètement caractérisé par l'ensemble $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}(s, 0)$.

Définition 4.0.1 *On dit que le système (S_3) est contrôlable en temps s si $\mathcal{A}_s = \mathbb{R}^n$, ou si tout état de $\mathbb{R}^n$ est atteignable en temps s à partir de n'importe quel autre.*

Caractérisation algébrique de la contrôlabilité

Définition 4.0.2 *L'espace $\mathcal{A}_s$ est égal à l'image de la matrice* $(n \times nm)$

$$\mathcal{C} := [BAB \cdots A^{n-1}B],$$

est dite matrice de contrôlabilité.

Remarque 4.0.1 *L'image de $\mathcal{C}$ est l'espace vectoriel $\mathcal{R}(A, B)$ engendré par A^iBz, $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $z \in \mathbb{R}^m$:*

$$\mathcal{R}(A, B) = vect\{A^iBz : \ i = 0, \cdots, n-1, \ z \in \mathbb{R}^m\}.$$

Il résulte de cette remarque que l'espace $\mathcal{A}_s$ est indépendant de s et sa dimension est égale au rang de la matrice de contrôlabilité.

Corollaire 4.0.4 *(Critère de contrôlabilité de Kalman) Le système (S_3) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité est de rang n.*

Le critère de Kalman nous permet de décider s'il est possible d'atteindre un état $Z \in \mathbb{R}^n$ quelconque en temps s.

Théorème 4.0.5 *Soit G la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie comme*

$$G = \int_0^s e^{(s-u)A} BB^t (e^{(s-u)A})^t du.$$

Alors, $ImG = \mathcal{A}_s$.
De plus, si (S_3) est contrôlable, alors G est bijective et le contrôle $\overline{U}(\cdot) : [0, s] \to \mathbb{R}^m$ définie par $\overline{U}(r) = (e^{(s-r)A}B)^t G^{-1} Z$, envoie l'état $X(0) = 0$ au temps $t = 0$ sur l'état $X(s) = Z$ au temps $t = s$.

Le contrôle $\overline{U}(\cdot)$ satisfait aussi une propriété remarquable, celle de minimiser un coût.

Théorème 4.0.6 *(Contrôle optimal) Si $U(\cdot)$ est un contrôle permettant d'amener l'état $X(0) = 0$ en temps $t = 0$ à $X(s) = Z$ au temps $t = s$ on a :*

$$\int_0^s \|U(r)\|^2 dr \geq \int_0^s \|\overline{U}(r)\|^2 dr.$$

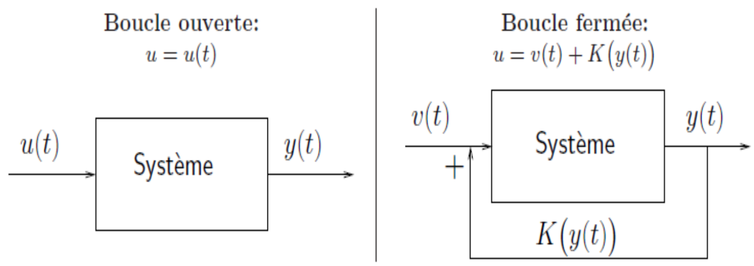
Autrement dit, le contrôle $\overline{U}(\cdot)$ est celui qui minimise l'energie

$$E(U) = \int_0^s \|U(r)\|^2 dr.$$

Le contrôle $\overline{U}(\cdot)$ est dit contrôle optimal.

4.1 Stabilisation

Il existe des lois de contrôle U dépendant seulement du temps dite le contrôle en boucle ouverte. Un autre type de loi de contrôle $U(t) = V(t) + K(Y(t))$ dite contrôle en boucle fermée, qui tient compte à tout moment à l'information disponible en sortie pour déterminer le contrôle. On va utiliser les contrôles en boucle fermée dépendant directement



de l'état du système $U(t) = V(t) + K(Y(t))$, dit contrôle par retour d'état. On s'intéresse au problème de la stabilisation d'un système contrôlé (4.3). Le but de cette partie est de construire une loi de contrôle par retour d'état qui amène le système à l'origine.

On considère des systèmes linéaires autonomes. Soit l'équation différentielle contrôlée

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t). \tag{4.3}$$

Définition 4.1.1 *Le système contrôlé* (4.3) *est asymptotiquement stabilisable par retour d'état s'il existe une loi de contrôle* $U(t) = K(X(t))$ *tel que l'origine soit un équilibre globalement asymptotiquement stable de l'équation différentielle*

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BK(X(t)),$$

dite équation ou système bouclé. Autrement dit, toute solution $X(t)$ *de cette équation bouclée tend vers* 0 *quand* $t \to +\infty$ *indépendamment de la condition initiale.*

On va chercher le retour d'état sous la forme d'une fonction linéaire de l'état, c'est-à-dire $U(t) = KX(t)$ *où* $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, *une telle loi de contrôle est dite loi proportionnelle. L'équation différentielle dont il faut montrer la stabilité asymptotique est*

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BKX(t) = (A + BK)X(t).$$

Cette équation différentielle admet 0 *pour équilibre asymptotiquement stable si et seulement si la matrice* $A+BK$ *a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative.*

On a le résultat d'algèbre linéaire suivant.

Théorème 4.1.1 *Si* A*,* B *satisfont le critère de Kalman, alors, pour tout réel* ρ*, il existe une matrice* $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *telle que toute valeur propre de* $A+BK$ *a une partie réelle inférieure à* ρ*.*

Il résulte que si un système (4.3) est contrôlable, il existe une matrice $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que toutes les valeurs propres de $A+BK$ ont une partie réelle négative.

Corollaire 4.1.2 *Si le système* (4.3) *est contrôlable, il est asymptotiquement stabilisable par retour d'état proportionnel.*

Exemple 4.1.1 *La position d'un train sur une voie est repérée par sa position* $X(t)$ *et son accélération est contrôlée par la relation*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = U.$$

1. *Écrire cette équation sous la forme d'un système de contrôle*

$$\dot{X} = AX + BU.$$

2. *Montrer que le système est contrôlable.*

Solution. 1. Soit l'état $X = (x, \dot{x})$, on trouve

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(t).$$

2. La matrice de contrôlabilité $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, le système est alors contrôlable.

4.2 Exercices

<u>Exercice 1</u> : Soit l'équation différentielle du second ordre suivante

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l}\sin x - \frac{1}{l^2}u,$$

où u est la commande et les constantes g, l sont strictement positives.

1. Écrire l'équation sous la forme d'un système
2. Linéariser le système autour de l'équilibre correspondant à $x = 0,\ u = 0$. Vérifier que, en l'abscence de commande, cet équilibre n'est pas stable pour le système linéarisé.
3. Montrer que le système linéarisé est commandable.
4. Proposer un retour d'état proportionel qui permet de stabiliser asymptotiquement le système linéarisé. Peut-on également stabiliser asymptotiquement le système d'origine ?

<u>Exercice 2</u> : On considère le système de commande dans $\mathbb{R}^3$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

où $u(\cdot)$ est une commande à valeurs réelles,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

le paramètre a étant un réel.

1. Montrer que le système n'est pas commandable.
2. Montrer que

$$\mathcal{A}(\tau, 0) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_3 = 0\}$$

où $\mathcal{A}(\tau, 0)$ est l'ensemble atteignable en temps τ à partir de 0.

3. Peut-on savoir à priori si le système est asymptotiquement stabilisable par retour d'état proportionnel ?

Exercice 3 : Les équations régissant la dynamique d'un système sont

$$\ddot{\theta} = \frac{u}{ml^2}, \qquad \dot{\omega} = -\frac{u}{J}$$

où u est une commande et les constantes $m,\ l,\ J$ sont strictement positives.

1. L'état étant $X = (\theta, \dot{\theta}, \omega)$, écrire le système commandé associé.

2. Montrer que ce système n'est pas commandable.

3. Montrer que la fonction $\xi = J\omega + ml^2\dot{\theta}$ est constante le long de toute solution du système.

4. Par un changement de coordonnées linéaires

$$(\theta, \dot{\theta}, \omega) = PX, \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & ml^2 & J \end{pmatrix},$$

le système de commande satisfait

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix}, \quad \dot{\xi} = 0.$$

Montrer que le système de commande en $(\theta, \dot{\theta})$ est commandable.

Bibliographie

[1] K. Beauchard, Dynamique et contrôle de systèmes nonlinéaires (MVA, 2011-2012)

[2] S. Charles, Biologie Mathématique et Modélisation (L3-MIV) Chapitre 2 : Bifurcations dans $\mathbb{R}^2$. Polycopié disponible à l'adresse

[3] S. Charles, C. Lopes, Biologie Mathématique et Modélisation (L3-MIV) Chapitre 1 : Equations Différentielles dans $\mathbb{R}$. Polycopié disponible à l'adresse http ://spiralconnect.univ-lyon1.fr/spiral-files/download ?mode=inlinedata=3324086

[4] S. Charles, C. Lopes, Biologie Mathématique et Modélisation (L3-MIV) Chapitre 2 : Systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}^2$. Polycopié disponible à l'adresse http ://bmm.univ-lyon1.fr/spiral-files/download ?mode=inlinedata=3324087

[5] S. Charles, C. Lopes, Biologie Mathématique et Modélisation (L3-MIV) Chapitre 3 : Fonctions de Lyapunov-Notion de cycle limite. Polycopié disponible à l'adresse http ://bmm.univ-lyon1.fr/spiral-files/download ?mode=inlinedata=3324088

[6] F. Jean, Systèmes Dynamiques Stabilité et Commande Cours et exercices corrigés, Édition 2017/2018. Polycopié disponible à l'adresse https ://hal-ensta-paris.archives-ouvertes.fr//hal-01744300

[7] J.L. Pac, Systèmes dynamiques Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2012, 2016.

[8] A. Vidal, Modèles mathématiques EDO pour la biologie, M2 Mathématiques et Applications Université de Marne-la-Vallée 2014-15.