جامعة محمد الصديق بن يحي – جيجل

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم التعليم الأساسي

مقياس: الرياضيات 2 السنة الجامعية: 2022/2021

الحل النموذجي للسلسلة رقم 3

التمرين 1 :

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\-4&2\\0&7\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}-2&0\\-2&1\\8&1\end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix}-4&6\\-14&7\\24&17\end{pmatrix}\ ,\ D=\begin{pmatrix}x&5\\0&2x\end{pmatrix}\ ,\ E=\begin{pmatrix}y&7\\-1&3y\end{pmatrix}$$

– حساب x و y :

$$xA+yB=C \iff \begin{pmatrix}x-2y&3x\\-4x-2y&2x+y\\8y&7x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&6\\-14&7\\24&17\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}x-2y=-4 & (1)\\ 3x=6 & (2)\\ -4x-2y=-14 & (3)\\ 2x+y=7 & (4)\\ 8y=24 & (5)\\ 7x+y=17 & (6)\end{cases} \Longrightarrow^{(2)\wedge(5)} \begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$$

نتحقق أن قيم x و y تحقق المعادلات $(1),(3),(4),(6)$.

$$D+E=\begin{pmatrix}4&12\\-1&17\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x+y&12\\-1&2x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&12\\-1&17\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}x+y=4\\ 2x+3y=17\end{cases} \iff \begin{cases}x=4-y\\ 8+y=17\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}y=9\\ x=-5\end{cases}$$

$$2D-4E=\begin{pmatrix}-5&-18\\4&-16\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}2x-4y&-18\\4&4x-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-18\\4&-16\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}2x-4y=-5\\ 4x-12y=-16\end{cases} \iff \begin{cases}x=2y-\frac{5}{2}\\ -4y=-6\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}y=\frac{3}{2}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

التمرين 2 : حل الجملة (S_1) :

$$(S_1)\ \begin{cases}3x-10y=4 & \cdots(1)\\ -2x+8y=7 & \cdots(2)\end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) في 2 و المعادلة (2) في 3 وجمعهما نجد: $4y=29$ ، ومنه: $y=\frac{29}{4}$.

بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $x = \dfrac{153}{6}$ ومنه للجملة (S_1) حل وحيد هو: $(x,y) = (\frac{153}{6}, \frac{29}{4})$

حل الجملة (S_2) :

$$(S_2)\ \begin{cases} 3x+2y=1 & \cdots(1) \\ 2x-y=3 & \cdots(2) \\ 5x+y=5 & \cdots(3) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (2) في 2 وجمعها مع المعادلة (1) نجد: $7x = 7$ ، ومنه: $x = 1$.

بالتعويض في المعادلة (2) نجد: $2 - y = 3$ ، ومنه: $y = -1$.

بالتعويض في المعادلة (3) نجدها غير محققة ومنه الجملة (S_2) ليس لها حلول.

حل الجملة (S_3) :

$$(S_3)\ \begin{cases} 3x+2y=1 & \cdots(1) \\ 2x-y=3 & \cdots(2) \\ 8x+3y=5 & \cdots(3) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (2) في 2 وجمعها مع المعادلة (1) نجد: $7x = 7$ ، ومنه: $x = 1$.

بالتعويض في المعادلة (2) نجد: $2 - y = 3$ ، ومنه: $y = -1$.

بالتعويض في المعادلة (3) نجدها محققة ومنه للجملة (S_3) حل وحيد هو: $(x,y) = (1,-1)$

حل الجملة (S_4) :

$$(S_4)\ \begin{cases} 6x+y-2z=1 & \cdots(1) \\ 2x+3y+2z=3 & \cdots(2) \\ 4x-2y-4z=-2 & \cdots(3) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد: $8x + 4y = 4$ ، وبضرب المعادلة (2) في 2 وجمعها مع المعادلة (3) نجد: $8x + 4y = 4$.

بحل المعادلة $8x + 4y = 4$ نجد: $y = 1 - 2x$ ، وبالتعويض في المعادلة (2) نجد: $z = 2x$

إذن الجملة (S_4) تملك عدد لا نهائي من الحلول من الشكل : $(x,y,z) = (x, 1-2x, 2x)\ ,\quad x \in \mathbb{R}$

التمرين 3 :

$$(S)\ \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

1) كتابة جملة المعادلات (S) على الشكل المصفوفي $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

حيث : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) حل جملة المعادلات $AX = B$ باستعمال طريقة كرامر:

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. ومنه جملة كرامر تقبل حلا وحيدا بحيث :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad , \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad , \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad , \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

ومنه : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

أ) حساب A^{-1} مقلوب المصفوفة A :

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} M^t$. لدينا : $\det(A) = 2$

حساب المصفوفة المرافقة :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

حيث :

$$m_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad m_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad m_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$m_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad , \quad m_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad , \quad m_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$m_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad , \quad m_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad , \quad m_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

ومنه: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -5 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \ , \ A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} M^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

ب) استنتاج حل جملة المعادلات $AX = B$ باستعمال طريقة مقلوب المصفوفة :

$$AX = B \iff X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$