Université de Jijel
Faculté des sciences et de la technologie
$1^{ere}$ année ST

Mars 2023

Série de TD N$^0$ 02

**IMatrices et applications linéaires**

**Exercise 1** *On considère les matrices à coefficients réels suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

*Parmi les expressions suivantes, dire celles qui ont un sens et les calculer le cas échéant*

$$A^2, AB, BA, BD, BC,^t E,^t D,^t (ED), ABCDE, D +^t E.$$

**Exercise 2** *1) Calculer les déterminant suivant*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

*2) Calculer, en utilisant les techniques de calcul des déterminants*

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad N = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

**Exercise 3** *1) Indiquer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

*2) Que vaut le rang de $A$, $B$ et $C$.*

**Exercise 4** *[Supp]Calculer le rang des deux matrices* $M_t$ *et* $N_t$ *où* $t$ *est un paramètre réel.*

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \qquad N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercise 5** *On considère les applications linéaires suivantes :*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (y, x + z)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = (2x, x + y, x - y)$$

1. *Déterminer les matrices de* $f$ *et* $g$ *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^2$.
2. *Déterminer les applications linéaires* $2f$ *,*$g \circ f$ *et* $f \circ g$.
3. *Donner leurs matrices dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^2$.
4. *Que remarque-t-on ?*

**Exercise 6** *On pose* $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1)$ *et* $v_3 = (1, 0, 1)$.

*1) Montrer que* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

*2) Ecrire la matrice de passage* $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ *de la base canonique* $\mathcal{B}_c$ *de* $\mathbb{R}^3$ *à la base* $\mathcal{B}$*. Pourquoi est-on sûr que* $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ *est inversible? Calculer son inverse.*

*3) On considère l'application* $f$ *de* $\mathbb{R}^3$ *dans lui-même définie par*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \left(-y + z, \frac{1}{2}(-x - y + 3z), \frac{1}{2}(x - y + 3z)\right)$$

*Montrer que* $f$ *est linéaire et calculer ses matrices représentatives dans la base canonique puis dans la base* $\mathcal{B}$.

**Exercise 7** *[Supp] Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *de matrice*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

*dans la base canonique* $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)$.

*Déterminer la matrice de* $f$ *dans la base* $(1, 0, -1), (0, 1, 1)$ *et* $(1, 0, 1)$.