Systèmes d'équations linéaires

April 15, 2023

Contents

Chapter 1

Systèmes d'équations linéaires

Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues (n, $p \geq 1$ des entiers) de la forme:

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & ...... & +a_{1p}x_p = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & ...... & +a_{2p}x_p = & b_2 \\ ... & ...... & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & ...... & +a_{np}x_p = & b_p \end{array} \right.$$

- Les coefficients (a_{ij}) et les secondes membres (b_i) sont des éléments donnés de $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- Les inconnues $x_1, x_2, ..., x_p$ sont à chercher dans $\mathbf{K}$.
- Une solution de (S) est un $p-$uplet $(x_1, x_2, ..., x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
- Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes sont equivalents s'ils admettent les mêmes solutions.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les (b_i) par 0.
- Le système (S) sous la forme abrégée suivante

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, ..., n.$$

- Notre système (S) est équivalent aussi à l'écriture matricielle

$$A\vec{X} = \vec{B} \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2p} \\ ... & ...... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{np} \end{pmatrix}, \ \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_p \end{pmatrix}.$$

- Un système (S) est carré lorsque $n = p$.
- Si on ajoute le vecteur-colonne des seconds membres $\vec{B}$ à la matrice des coefficients A, on obtient ce qu'on appelle la matrice **augmentée** que l'on note $\left[A|\vec{B}\right]$

1.1 Système linéaire carrée

1.1.1 Système linéaire carrée et matrice inverse

Tout système linéaire de n équations à n inconnues peut s'écrire sous la forme matricielle $A\vec{X} = \vec{B}$, A est une matrice
carrée de dimension n et $\vec{X}$ et $\vec{B}$ sont des vecteurs colonnes de dimension n, où $\vec{X}$ est l'inconnue et $\vec{B}$ un vecteur donné.

Si A est inversible alors ce système possède une unique solution $\vec{X}$ donnée par $\vec{X} = A^{-1}\vec{B}$.

Exemple 1 *Considérons le système*

$$(S) \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$$

On écrit sous la forme matricielle le système (S)

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

On a $\det A = 8 - 9 = -1 \neq 0$, *donc la matrice* A *est inversible, on cherche donc à calculer* A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^{t}ComA = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

La solution du système (S) *est donné par* $\vec{X} = A^{-1}\vec{B}$, $(i.e)$,

$$\vec{X} = A^{-1}\vec{B} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Système de Cramer

Soit (S) un système d'équations linéaires dont la matrice associée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{IK})$ (Carrée).

Définition 2 *Un système est dit de Cramer ssi* $\det A \neq 0$.

Proposition 3 *Soit (S) un système d'équations linéaires ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{IK})$). Le système est de Cramer si une des conditions équivalentes suivantes est remplie*
1) A est inversible,
2) $rgA = n$,
3) Le système homogène $A\vec{X} = \vec{0}$, admet seulement la solution nulle.

Méthode de Cramer: La solution d'un système de Cramer d'écriture matricielle $A\vec{X} = \vec{B}$ est donnée par

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \qquad j = 1, ..., n$$

où A_j est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $j-$ème colonne par la colonne des seconds membres $\vec{B}$.

Remarque 4 *La formule de Cramer est d'une utilité pratique limitée à cause du calcul des déterminants qui est très couteux.*

Exemple 5 *Soit le système linéaire*

$$(S)\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y = -1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \underset{\vec{X}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{\vec{B}}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-6}{2} = -3, \;\; y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

1.2 Système échelonné

Un système (S) est en escalier, ou échelonné, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Il est échelonné réduit si en plus :

- le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1,
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple 6

$$\left\{\begin{array}{lllll} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -5x_4 & =1 \\ & -x_2 & +x_3 & & =0 \\ & & & -6x_4 & =-1 \end{array}\right. \quad \textit{est échelonné (mais pas réduit)}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -5x_4 & =1 \\ & -x_2 & +x_3 & & =0 \\ & & +2x_3 & -6x_4 & =-1 \end{array}\right.$$ *n'est échelonné (la dernière ligne commence avec la même variable que la ligne au dessus*

La résolution d'un système linéaire $A\vec{X} = \vec{B}$ échelonné est simple car, la matrice lui associée étant triangulaire supérieure, on utilise la relation de récurrence (dite par remontée)

$$\begin{array}{c} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) \quad \text{pour } i = n-1, n-2, ..., 1 \end{array}$$

Exemple 7 *Résolution du système triangulaire supérieur*

$$(S)\left\{\begin{array}{c} x - y + 2z = 2 \\ y - z = -1 \\ 2z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{B}}$$

En utilisant la formule précédente:

$$\begin{array}{c} z = \dfrac{1}{2} \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) \\ \text{pour } i = 2, 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} z = x_3 = \dfrac{1}{2} & \\ y = x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}x_3\right) & = -\dfrac{1}{2} \\ x = x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) & = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

1.3 Méthode du pivot de Gauss

1.3.1 Opérations éIémentaires sur les lignes et les colonnes

On appelle opération éIémentaire sur les lignes d'une matrice l'une des opérations suivantes :

i). Permutation de la $i^{-ème}$ et de la $j^{-ème}$ ligne, notée $L_i \leftrightarrow L_j$

ii). Multiplication de Ia $i^{-ème}$ ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$, notée $L_i \longleftarrow \lambda L_i$

iii). Ajout du produit de Ia $j^{-ème}$ ligne par λ à la $i^{-ème}$ ligne $(i \neq j)$, notée $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$

On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes, notées respectivement

.

$$C_i \leftrightarrow C_j, \quad C_i \longleftarrow \lambda C_i \text{ et } C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$$

Théorème 8 *Les opérations élémentaires sont des multiplications par certaines matrices inversibles!*

Proposition 9 *Le système obtenu à partir de (S) à l'aide d'une opération élémentaire sur les lignes est équivalent à*

(S') c'est à dire que les deux systèmes ont même ensemble de solutions

1.3.2 Algorithme du pivot de Gauss

Il s'agit d'un algorithme efficace qui utilise des opérations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations pour le transformer en un système équivalent triangulaire (c'est-à-dire avec des coefficients nuls en dessous de la diagonale principale $a_{ij=0}$ pour $i \succ j$)

Dans un système d'équations linéaires, un **pivot** est un coefficient non nul sur la diagonale principale de la matrice des coefficients.

L'algorithme de pivot de Gauss, également appelé méthode d'**élimination de Gauss**, est un algorithme pour transformer une matrice en sa forme échelonnée. Voici les étapes de l'algorithme:

Étape 01*:* Choisissez le pivot comme le coefficient non nul le plus à gauche de la ligne la plus en haut.

Étape 02: d'échange de lignes: Si le pivot est nul, échangez cette ligne avec la ligne la plus basse qui a un coefficient non nul dans la même colonne.

Étape 03: d'élimination: Utilisez des opérations élémentaires sur les lignes pour éliminer tous les coefficients en dessous du pivot, en utilisant la formule

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$$

Répétez les étapes 1 à 3 pour le sous-ensemble de la matrice qui se trouve sous le pivot.

Répétez l'algorithme sur le sous-ensemble restant de la matrice jusqu'à ce que la forme échelonnée soit atteinte.

Si vous souhaitez obtenir la forme **échelonnée réduite**, utilisez des opérations élémentaires supplémentaires pour diviser chaque coefficient diagonal par son coefficient respectif pour obtenir une diagonale de 1.

Exemple 10 *Soit le système linéaire*

$$(S)\begin{cases} x-y+2z=2 \\ x+y-z=-1 \\ 4x-y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{B}}$$

Résolution par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} \mathbf{1}x-y+2z=2 \\ x+y-z=-1 \\ 4x-y+2z=1 \end{cases} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \underset{Etape01}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z=2 \\ \mathbf{2}y-3z=-3 \\ 3y-6z=-7 \end{cases} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2-\frac{1}{1}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2-\frac{4}{1}L_1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{Etape02}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z=2 \\ \mathbf{2}y-3z=-3 \\ -\frac{3}{2}z=\frac{-5}{2} \end{cases} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3-\frac{3}{2}L_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=1 \\ z=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Exemple 11 *Soit le système* (S) *avec deux paramètres* α *et* c

$$(S)\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x+6y-z=2 \\ 2x+\alpha y+z=c \end{cases}$$

Nous avons 3 *équations donc il faut effectuer* 2 *étapes de la méthode de Gauss :*

$$(S)\begin{cases} x+5y+z=0 & L_1 \\ x+6y-z=2 & L_2 \\ 2x+\alpha y+z=c & L_3 \end{cases} \underset{Etape01}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+5y+z=0 & \mathbf{L_1} \\ y-2z=2 & L_2 \leftarrow L_2-\frac{1}{1}\mathbf{L_1} \\ (\alpha-10)\,y-z=c & L_3 \leftarrow L_3-\frac{2}{1}\mathbf{L_1} \end{cases}$$

$$\underset{Etape02}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+5y+z=0 & L_1 \\ y-2z=2 & \mathbf{L_2} \\ (2\alpha-21)\,z=c-2\,(\alpha-10) & L_3 \leftarrow L_3-\frac{(\alpha-10)}{1}\mathbf{L_2} \end{cases}$$

La dernière équation donne

$$(2\alpha-21)\,z=c-2\,(\alpha-10)$$

**) Si* $\alpha \neq \frac{21}{2}$, *alors* $z=\frac{c-2\,(\alpha-10)}{(2\alpha-21)}$, *et on trouve* y *puis* x *en remontant : il existe une et une seule solution.*

***) Si* $\alpha=\frac{21}{2}$, *on destingue deux cas ;*

1) *Si* $c-2\,(\alpha-10)=0$ $(i.e.c=1)$, *alors* $z=\beta\in\mathbb{R}$*(une valeure arbitraire) et on trouve* y *puis* x *en remonta*
il existe une infinité de solutions.

2) *Si* $c-2\,(\alpha-10)\neq 0$, $(i.e.c\neq 1)$, *alors il n'y a aucune solution.*

1.3.3 Méthode de Gauss pour calculer le rang d'un système linéaire

La méthode de Gauss est souvent utilisée pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. Cependant, elle peut également être utilisée pour calculer le rang d'un système linéaire en effectuant des opérations élémentaires sur les équations du système.

On écrit le système linéaire sous forme matricielle $A\vec{X} = \vec{B}$, où A est la matrice des coefficients des inconnues et B le second membre.

L'objectif de la méthode de Gauss est de transformer la matrice des coefficients des inconnues (matrice A) en une forme échelonnée. Si une ligne de cette matrice est remplie de zéros, elle peut être supprimée. Le nombre de lignes restantes après cette étape correspond au rang du système linéaire.

Exemple 12 *Calculer le rang de la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} [L_1 \leftrightarrow L_2] \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & \mathbf{5} & 11 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{-14} & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ 3L_3 - 4L_2 \end{array}$$

Finalement

$$rgA = 3$$

Remarque 13 *Pour toute matrice* $A \in M_{n,p}(\mathbf{K})$, $rgA \leq \min(n, p)$.

1.3.4 Algorithme du pivot pour la recherche de A^{-1} (Méthode de Gauss-Jordan)

La matrice A est inversible si et seulement si on peut obtenir une matrice triangulaire supérieure sans zéros sur la diagonale par des opérations élémentaires sur les lignes de A. Autrement dit, si la matrice échelonnée obtenue par des opérations élémentaires sur A a des coefficients non nuls sur sa diagonale.

Si A est inversible, on peut effectuer les mêmes opérations élémentaires sur les matrices A et I_n pour obtenir la matrice identité I_n à gauche de la matrice échelonnée. À ce moment-là, la matrice A sera transformée en la matrice identité, ce qui signifie qu'elle est inversible.

$$[A|I_n] \rightsquigarrow [I_n|A^{-1}],$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), A$ est inversible ssi $rgA = n$

Exemple 14 *Calculer s'il existe l'inverse de la matrice la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[A|I_3] &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \mathbf{L}_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \mathbf{L}_1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} L_1 \\ \frac{\mathbf{L_2}}{2} \\ L_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\mathbf{L}_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \frac{\mathbf{L_3}}{2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + \mathbf{L}_3 \\ L_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = [I_3|A^{-1}] \text{ , donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.4 Résoluton d'un système d'équations linéaire

Considérons un système de n équations linéaires à n inconnues dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

Notons par : $r = rg(A)$ le rang de la matrice A du système Et $r' = rg[A|\vec{B}]$, le rang de la matrice augmentée $[A|\vec{B}]$ du système.

Théorème 15
- *Si $r < r'$ le système est dit incompatible c'est-à-dire l'ensemble des solutions $S = \varnothing$.*
- *Si $r = r'$ le système est dit compatible et dans ce cas on a deux possibilités:*
  1) si $r = n$ on a une solution unique.
  2) si $r < n$ on a une infinité de solutions.

Exemple 16 *Soit le système linéaire à une parametre suivant:*

$$(S) \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = -2 \\ x - 2y + mz = -1 \end{cases}$$

On a

$$[A|\vec{B}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & m & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & m+2 & -2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \mathbf{L}_1 \end{bmatrix}$$

$$[A|\vec{B}] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & m-1 & -8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3\mathbf{L}_1 \end{array}\right]$$

Si $m \neq 1,$ *alors* $rgA = 3 = rg[A|\vec{B}] \quad (r = r' = 3)$,

1) $r = r' = 3,$ *veut dire que le système est compatible*

2) $r = n = 3,$ *on a donc une solution unique*

Si $m = 1,$ $rgA = r = 2,$ *et* $r' = rg[A|\vec{B}] = 3$

3) $r \prec r',$ *le système est incompatible et* $S = \varnothing$

Pour $m \neq 1$, *cherchons cette solution unique et pour cela on rend la matrice sous la forme reduite échelonné de Guass-Jordan*

$$\begin{aligned}
[A|\vec{B}] \quad &= \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & m & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{m-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \frac{L_3}{m-1} \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{1-m} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{1-m} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{8}{1-m} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 + \frac{8}{1-m} \\ 0 & 1 & 0 & -2 + \frac{8}{1-m} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{8}{1-m} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + \mathbf{L}_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \mathbf{L}_3 \\ \mathbf{L}_3 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

La solution est

$$S = \left\{3 + \frac{8}{1-m}, -2 + \frac{8}{1-m}, \frac{8}{1-m}\right\}, \quad m \neq 1.$$

Exemple 17 *Soit le système linéaire*

$$(S)\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
[A|\vec{B}] \quad &= \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{L}_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}\mathbf{L}_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \mathbf{L}_1 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ 2L_2 \\ L_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \mathbf{L}_2 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

$r = rgA = 2 = rg[A|\vec{B}]$, mais $n = 3$, alors

1) *$r = r' = 2$, veut dire que le système est compatible*

2) *$r = 2 \prec 3 = n$, on a donc une infinité de solutions.*

on pose $z = a \in \mathbb{R}$, et on écrit x et y en fonction de a, en effet

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x - y + 3z = 1 \\ 3y - 5z = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{3-2a}{3} \\ y = \frac{3+5a}{3} \end{array} \right.$$

La solution est

$$S = \left\{ \frac{3-2a}{3}, \frac{3+5a}{3}, a \right\}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Lorsque, le système admet une infinité de solutions. On fixe $(n - r)$ inconnues et on résout les autres inconnues en fonctions de celles qui sont fixées. En général en fixe les inconnues correspondant aux colonnes qui ne contiennent pas de pivot.