Chapitre 4 : Systèmes d'équations linéaires.

4.1 Définitions.

Définition 4.1

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On appelle système de n équations linéaires à p inconnus à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$

où les $(x_j)_{j=1,..,p}$ sont les inconnues, les $(a_{ij}), b_j \in \mathbb{K}$.

1)Forme matricielle du système :

Posons $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Le système (S) devient ;

AX=B…………….(S)

Définition 4.2 On appelle solution du système (S) tout vecteur $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_p})$ vérifiant les n équations du système (S) c.à.d. AX=B ou X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Remarque. Soit r=rg(A) (le rang de A). Le rang du système (S) est le rang de sa matrice A, noté rg(S). donc rg(S)=rg(A).

<u>4.2 Système de Cramer</u> (r = n = p)

Si **r=n=p,** c.à.d. A est matrice carrée inversible, le système (S) est dit **système de Cramer**, et admet une **solution unique** X.

a) Solution utilisant la matrice inverse.

Soit le système AX=B…. (S), d'inconnue X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, avec det(A)≠ 0.

Alors, AX=B ⇔ X=A^{-1}B, où $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$ est la matrice inverse de A.

Exemple 1.

Soit le système :$\begin{cases} x - y = 2 \dots (1) \\ 2x + 3y = 9 \dots (2) \end{cases}$, A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ det(A)=5, $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Donc la solution X=$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Solution en utilisants les formules de Cramer

Theoreme 4.1 Dans un système de Cramer la solution unique $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ où les x_i sont donnée par les formules :

$$x_i = \frac{det A_i}{det A}, i = 1, ..., n.$$

Où les A_i est la matrice réduite de A, en remplaçant la colonne i par le vecteur B.

Exemple 2.

$$(S) : \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$det A = 4 \neq 0, rg A = n = p = 3$ *((S) est un système de cramer).*

$$x = \frac{det A_1}{det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = 9/7.$$

$$y = \frac{det A_2}{det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = -5/7.$$

$$z = \frac{det A_3}{det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = -1/7.$$

<u>4.3 Cas où A carrée et det(A) =0</u> (r < n = p)

Soit M la plus grande matrice carrée inversible extraite de A d'ordre r=rg(A). Alors on considere le système (S') qui est un système de Cramer:

MX=B' ……..(S')

Qui admet une seule solution $X=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_{r-1}} \\ \boldsymbol{x_r} \end{pmatrix}=M^{-1}B'$, avec $B'=\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_{r-1} \\ b'_r \end{pmatrix}$, où les b'_i sont en fonction des b_i et $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$.

- Si le vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ vérifie les *n-r* équations **restantes** alors (S) admet une infinité de solutions .
- Si non, le système (S) n'admet pas de solutions.

Exemple.

$$(S):\begin{cases}3x-y+2z=3\\2x+2y+z=2\\x-3y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-1&2\\2&2&1\\1&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

(S) $\Leftrightarrow$ AX=B, avec A=$\begin{pmatrix}3&-1&2\\2&2&1\\1&-3&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. det(A)=0, L_1-L_2=L_3 donc **rg(A)<3**

rg(A)= 2 car les lignes L_1 et L_2 sont **L.I.**(libres) ou encore **det(M)=det$\begin{pmatrix}3&-1\\2&2\end{pmatrix}$=8 non nul**.

On résout le système suivant associé à la matrice M : $\begin{cases}3x-y=-2z+3\ldots(1)\\2x+2y=-z+2\ldots(2)\end{cases}$ ….(S')

Qui est un système de Cramer et admet comme solution : $\boldsymbol{x=-\frac{5}{8}z+1}$ **et** $\boldsymbol{y=\frac{1}{8}z}$. En remplaçant *x* et *y* dans la troisième équation on trouve : $-\frac{5}{8}z+1-\frac{3}{8}z+z=1\Leftrightarrow 1=1$ vérifiée , donc (S) admet une infinité de solutions de la forme :

$$\mathbf{S=\{(-\frac{5}{8}z+1,\frac{1}{8}z,z)\ /\ z\in IR\}.}$$

<u>4.4 Cas où n≠ p</u>

Si le nombre d'équations n'est pas égale au nombre d'inconnus, alors on cherche d'abord le rang de A et on procède comme précédement. Si M est une matrice contenue dans A et d'ordre r et $\det M\neq 0$ alors on considère le système de r équations à r inconnus correspondant à M qui est un système de Cramer.

a) Si la solution vérifie les équation restantes alors le système globale admet
- Soit une infinité de solutions.
- Soit une seule solution.

b) Si non, le système n'admet pas de solution.

Exemple 1.

$$(S):\begin{cases}3x-y=4\\2x+2y=3\\x-5y=-5\end{cases}\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}3&-1\\2&2\\1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\-5\end{pmatrix}$$

le rang de $A\leq 2$ choisissons

$$M=\begin{pmatrix}2&3\\3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow \det M=8\neq 0\Rightarrow rgM=2.$$

on prend le système :

$$\begin{cases}3x-y=4\\2x+2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=11/8\\y=1/8\end{cases}$$

on a l'équation réstante :

$$x-5y=-5\Rightarrow 11/8-5/8=6/8=3/2\neq -5$$

alors le système n'admet pas de solutions.

Exemple 2.

Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x+y-2z+3t=0 \\ -x+2y-4z+6t=2 \\ 2x-y+2z-3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $C_4=3C_2$ et $C_3=-2C_2$, donc il n'y a pas de sous matrice de A d'ordre 3 inversible, et on a det(M)=det$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$=7 **non nul.** Donc **r=rg(A)=2.** On résout le système :

$$\begin{cases} 3x+y=2z-3t \\ -x+2y=2+4z-6t \end{cases}$$

……(S') qui est un système de Cramer, on trouve

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2z-3t & 1 \\ 4z-6t+2 & 2 \end{vmatrix}}{\det(M)=7} = -2/7,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2z-3t \\ -1 & 4z-6t+2 \end{vmatrix}}{\det(M)=7} = 2z-3t+6/7$$

On remplace x, y dans la troisième équation on trouve qu'elle n'est pas vérifiée, en effet :

$$2x-y+2z-3t = -4/7-2z+3t-6/7+2z-3t = -10/7 \neq 0$$

donc le système n'admet aucune solution.

Autres Exemples

Exemple 1. (Cramer)

Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$det A = 1 \neq 0, rg A = n = p = 3$ *((S) est un système de cramer).*

$$x = \frac{det A_1}{det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1.$$

$$y = \frac{det A_2}{det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2.$$

$$z = \frac{det A_3}{det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 6.$$

Exemple 2 (Exercice TD)

Soit le système :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \quad \dots (1) \\ x + 3y - z = 11 \quad \dots (2) \\ 2x + 5y - 5z = 13 \dots (3) \\ x + 4y + z = 18 \quad \dots (4) \end{cases} \quad (S)$$

Sa matrice A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Soit la matrice extraite M=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

det(M)=-1$\neq$ **0.** Donc r=rg(A)=3. On résout le système

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \quad \dots (1) \\ x + 3y - z = 11 \quad \dots (2) \\ 2x + 5y - 5z = 13 \dots (3) \end{cases}$$ (S') qui est un système de **Cramer**

On trouve (x, y, z)=(4, 3, 2), on remplace dans l'equation (4) on trouve 18=18 vérifiée. Don le système (S) admet une solution : **S={(4, 3, 2)}**