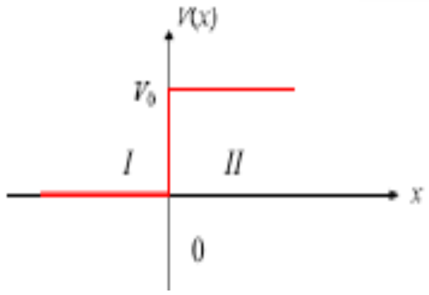
كمون الخطوة أو الجهد الدّرجي

الجهد الدرجي (السلمة الجهدية) (Step potential)

سنقوم في هذا الجزء بتطبيق معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن على حزمة من الإلكترونات طاقتها الكلية E ، بحيث تسقط هذه الإلكترونات من جهة اليسار إلى جهة اليمين تجاه جهد درجي ارتفاعه V_0. تُعطى طاقة وضع هذه الإلكترونات بالعلاقة

$$V(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0 \\ V_0 & , \quad x>0\end{cases}$$

وذلك كما هو موضّح في الشكل التالي



أولاً عندما يكون $E<V_0$:

نأخذ هنا بأن الطاقة الكلية E أقل من ارتفاع السلمة الجهدية، V_0، أي أن $E < V_0$. في هذه الحالة، وعلى ضوء النظرية الكلاسيكية ترتد جميع الإلكترونات الساقطة إلى المنطقة التي أتت منها،

نلاحظ من الشكل اعلاه ان في المنطقة الاولى (I)، $x<0$، ان $V(x)=0$، وبالتالي نكتب معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن في الصورة التالية

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+k_1^2\,\psi_1 = 0$$

حيث

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (1)$$

ويكون الحل العام للمعادلة أعلاه هو

$$\psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} \qquad (2)$$

في المنطقة الثانية، والتي تحدد بـ $V(x)=V_0>E$ و $x>0$ ، أن معادلة شرودنجر المستقلة عن الزمن، تأخذ الصورة التالية

كمون الخطوة أو الجهد الدّرجي

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi_2 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - k_2{}^2\psi_2 = 0$$

حيث

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) \qquad (3)$$

يكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$\psi_2(x) = C\, e^{-k_2 x} + D\, e^{k_2 x} \qquad (4)$$

حيث C و D ثابتان. نلاحظ أن الحد الثاني في المعادلة (4) يزيد بزيادة x و هذا لا يتفق مع شروط دالة الحالة التي تصف حركة الجسيمات. ولكي تكون هذه الدالة محددة عند $x \to \infty$ فإن الثابت $D = 0$. وتصبح المعادلة (4) على الصورة

$$\psi_2(x) = C\, e^{-k_2 x} \qquad (5)$$

ولإيجاد الثابتين B و C بدلالة A نستخدم شرط استمرارية دالة الحالة عند نقطة الاتصال $x = 0$ ، حيث نعلم أن

$$\psi_1(x)\big|_{x=0} = \psi_2(x)\big|_{x=0}$$

$$\left.\frac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=0} \qquad (6)$$

وبتطبيق الشرط الحدي الأول على المعادلتين (2) و (5) نحصل على

$$C = A + B \qquad (7)$$

وبتطبيق الشرط الثاني على المعادلتين (2) و (5) نحصل على

$$ik_1(A - B) = -k_2 C \qquad (8)$$

ونحصل من المعادلتين (7) و (8) على الثابتين B و C بدلالة A ، حيث نجد أن

$$B = \left(\frac{ik_1 + k_2}{ik_1 - k_2}\right)A \qquad (9)$$

و

$$C = \left(\frac{2ik_1}{ik_1 - k_2}\right)A \qquad (10)$$

ويمكن كتابة المعادلتين أعلاه في الصورة

$$A = \frac{1 + ik_2/k_1}{2}\, C$$

$$B = \frac{1 - ik_2/k_1}{2}\, C$$

وبقسمة المعادلة (9) على المعادلة (10) وباستخدام المعادلتين (1) و (3) للتعويض عن k_1 و k_2 نحصل على

كمون الخطوة أو الجهد الدّرجي

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - ik_2 / k_1}{1 + ik_2 / k_1}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{2}{1 + ik_2 / k_1}$$

ولإتمام دراسة هذه الحالة، يجب علينا أن نوجّد معامل الانعكاسية R و معامل النفاذية T. يُعرف معامل الانعكاسية R بأنه النسبة بين شدة كثافة احتمالية التيار المنعكس إلى شدة كثافة احتمالية التيار الساقط، أي أن

$$R = \frac{j_r}{j_{in}}$$

حيث

$$j_{in} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi_{in} \frac{\partial \psi_{in}^*}{\partial x} - \psi_{in}^* \frac{\partial \psi_{in}}{\partial x})$$

و

ونحصل بالتعويض على معامل الانعكاسية

$$R = \frac{j_r}{j_{in}} = \frac{| B |^2}{| A |^2}$$

وباستخدام المعادلة (9) نحصل على

$$R = 1$$

تتفق هذه النتيجة مع تنبؤ الميكانيكا التقليدية حيث ترتد جميع الجسيمات الساقطة إلى المنطقة التي أتت منها.

ثانياً عندما يكون $E > V_0$:

نأخذ هنا بأن طاقة الجسيم الكلية E أكبر من ارتفاع السلمة الجهدية، V_0، أي أن $E > V_0$. نجد على ضوء الميكانيكا الكلاسيكية أن جميع الجسيمات الساقطة تنفذ إلى المنطقة الثانية (II)، بينما تتنبأ ميكانيكا الكم خلاف ذلك.

يُعطى حل هذه المعادلة بالدالة

$$\psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \tag{13}$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

كمون الخطوة أو الجهد الدّرجي

يُمثل الحد الاول في هذه المعادلة حركة الجسيمات الساقطة تجاه السلمة الجهدية،

ويُمثل الحد الثاني حركة الجسيمات المنعكسة منها

في المنطقة الثانية حيث $V(x) = V_0$ بـ

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi_2 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2{}^2\psi_2 = 0$$

حيث

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0) \qquad (14)$$

وحل هذه المعادلة هو

$$\psi_2(x) = C\,e^{ik_2x} + D\,e^{-ik_2x}$$

نجد هنا أن الحد الأول يُمثل حركة الجسيمات النافذة والحد الثاني حركة الجسيمات المنعكسة. وبم أن الجسيمات لا ترتد بعد عبورها حاجز الجهد، فإن شدتها يجب أن

تكون صفراً، ويعني هذا أن الثابت $D = 0$ وتصبح دالة الحالة في هذه المنطقة على الصورة

$$\psi_2(x) = C\,e^{ik_2x} \qquad (15)$$

نُطبّق الشرطين الحديين لدالتي الحالة التاليتين

$$\psi_1(x)\big|_{x=0} = \psi_2(x)\big|_{x=0}$$

$$(16)$$

$$\left.\frac{\partial\psi_1(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\psi_2(x)}{\partial x}\right|_{x=0}$$

لنحصل على المعادلتين

$$A + B = C \qquad (17)$$

و

$$k_1(A - B) = k_2C \qquad (18)$$

وبحلهما نحصل على

$$B = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)A \qquad (19)$$

ومنها نجد أن الثابت C يُعطى بالعلاقة

$$C = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)A \qquad (20)$$

يُمثل المقدار $|A|^2$ شدة الأشعة الساقطة على الحاجز و $|B|^2$ شدة الأشعة المرتدة من الحاجز و $|C|^2$ شدة الأشعة المنتقلة. من المعادلتين (12) و (14) و (19)، نجد أن معامل الانعكاسية

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

كمون الخطوة أو الجهد الدّرجي

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

$$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

نجد ان العلاقة بينهما تعطى بالمعادلة

$$R + T = 1 \qquad (23)$$

وتؤكد هذه المعادلة مبدأ بقاء الطاقة، حيث لا تضيع الأجسام الساقطة، فالأجسام التي لم ترتد يجب أن تنتقل.

بما أن R لايساوي الصفر وأقل من الواحد ، معناه وجود جزء من الجسيمات تنعكس عند الحاجز أي لا تنفد كل الجسيمات. وهذا عكس ما تقوله النظرية الكلاسيكية .