الفصل الثالث: البنى الجبرية
Structures Algèbriques

1.3 العمليات الداخلية Operations Internes

1.1.3 العملية الداخلية

تعريف 1

لتكن E مجموعة غير خالية. نسمي **عملية داخلية (Operation interne)** او **قانون تركيب داخلي** (Loi de composition interne)

كل تطبيق (∗)

$$\begin{aligned} * &: E\times E \to E \\ (a,b) &\to *(a,b) \in E \end{aligned}$$

ملاحظة: نكتب $a*b$ بدلا من $*(a, b)$.

أمثلة:

1- الجمع (+) و الضرب (.) قانونا تركيب داخليان في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

2- الضرب (.) قانونا تركيب داخليان في مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}_+$ لكنه ليس كذلك في $\mathbb{R}_-$

3- لتكن $E=\mathbb{R}$ نعتبر العملية (∗) معرفة في $\mathbb{R}$ بـ: $a, b \in E : a*b=ab+a+b$. (∗) عملية داخلية في $\mathbb{R}$.

4- نعتبر $E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ونعرف عملية جمع الثنائيات (⊕) في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بـ:

$$(a,b), (a',b') \in E: (a,b)\oplus(a',b') = (a+a',b+b')$$

5- ليكن X جزء من $\mathbb{R}$ و $F(X, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من X نحو $\mathbb{R}$. عمليتي الجمع (+) و الضرب (.) للدوال المعرفتين كما يلي:

$$\forall f, g \in F(X, \mathbb{R}) : \forall x\in\mathbb{R} : (f+g)(x)=f(x)+g(x) \wedge (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

عمليتين داخليتين في $F(X, \mathbb{R})$.

2.1.3 الجزء المستقر بعملية داخلية (Partie stable par une loi interne)

تعريف 2

لتكن E مجموعة و (∗) عملية داخلية في E، و ليكن F جزء من E. نقول عن F انه مستقرا بالعملية (∗) اذا تحقق:

$$\forall x, y \in F: \; x*y \in F$$

أمثلة:

1- $\mathbb{R}^+$ جزء مستقر من $(\mathbb{R},\times)$

2- $\mathbb{R}_-$ ليس جزءا مستقرا من $(\mathbb{R},\times)$

3- نعتبر المجموعة: $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

$(\forall(z,z')\in U^2):|z.z'|=|z|.|z'|=1.1=1$

إذن: $(\forall(z,z')\in U^2):zz'\in U$

إذن U جزء مستقر من $(\mathbb{C},\times)$

3.1.3 خواص العمليات الداخلية

1- القانون التبديلي او التبادلي Loi commutative

نقول إن القانون $*$ تبادلي في E إذا وفقط إذا كان

$$(\forall(a,b)\in E^2)\quad a*b=b*a$$

2- القانون التجميعي Loi associative

نقول إن القانون $*$تجميعي في E إذا وفقط إذا كان

$$(\forall(a,b,c)\in E^3)\ a*(b*c)=(a*b)*c$$

أمثلة:

مثال 1: العمليات المعرفة في الأمثلة من (1) الى (4) هي عمليات تبديلية وتجميعية.

مثال 2: المثال (3) العملية $(*)$ معرفة بـحيث: $\forall\ a,b\in E: a*b=ab+a+b$

- $(*)$ عملية **تبدلية:** $\forall\ a,b\in E: a*b=b*a$

لان: $a,b\in E: a*b=ab+a+b=ba+b+a=b*a$

- $(*)$ عملية **تجميعية:** $\forall\ a,b,c\in E: (a*b)*c=a*(b*c)$

$a,b,c\in E:$

$(a*b)*c=(a*b)c+(a*b)+c=\ (ab+a+b)c+ab+a+b+c=abc+ab+ac+bc+a+b+c\ldots\ldots\ldots(1)$

$a*(b*c)=a(b*c)+a+(b*c)=\ a(bc+b+c)+a+(bc+b+c)=abc+ab+ac+bc+a+b+c\ldots\ldots(2)$

مثال 3: إذا اعتبرنا العملية $(*)$ **معرفة بالشكل** $a,b\in E: a*b=ab+a+b+1$

أثبت ان العملية تبديلية لكنها غير تجميعية

مثال 4: نعتبر $E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ وعملية جمع الثنائيات ($\oplus$) المعرفة في المثال (4) اعلاه

$$(a,b),(a',b')\in E:(a,b)\oplus(a',b')=(a+a',b+b')$$

- ($\oplus$) عملية **تبدلية:** $\forall (a,b),(a',b')\in E:(a,b)\oplus(a',b')=(a',b')\oplus(a,b)$

$\forall (a,b),(a',b')\in E:(a,b)\oplus(a',b')=(a+a',b+b')$ ....(1)

$(a',b')\oplus(a,b)=(a'+a,b'+b)=(a+a',b+b')$..........(2)

من (1) و (2) العملية ($\oplus$) تبديلية.

- ($\oplus$) عملية **تجميعية**:

- $(a,b),(a',b'),(a'',b'')\in E:[(a,b)\oplus(a',b')]\oplus(a'',b'')=(a,b)\oplus[(a',b')\oplus(a'',b'')]$

$[(a,b)\oplus(a',b')]\oplus(a'',b'')=(a+a',b+b')\oplus(a'',b'')=(a+a'+a'',b+b'+b'')$....(1)

$(a,b)\oplus[(a',b')\oplus(a'',b'')]=(a,b)\oplus(a'+a'',b'+b'')=(a+a'+a'',b+b'+b'')$....(2)

من (1) و (2) فان ($\oplus$) **تجميعية**.

3-العنصر الحيادي او المحايد (Element neutre)

تعريف3

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. و $e\in E$.
نقول إن e عنصر محايد في E بالنسبة للقانون $*$ أو عنصر محايد في $(E,*)$ إذا وفقط إذاكان:

$$(\forall x\in E)\ e*x=x \ \ et\ \ x*e=x$$

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تبادلي فإن e عنصر محايد إذا وفقط إذا كان:
$(\forall x\in E)\ x*e=x$

المثال 1:

العدد 0 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Z},+),(\mathbb{N},+)$

العدد 1 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C},\times),(\mathbb{R},\times),(\mathbb{Q},\times),(\mathbb{Z},\times),(\mathbb{N},\times)$

المثال 2:

$\varnothing$ هو العنصر المحايد في $(P(E),\cup)$

E هو العنصر المحايد في $(P(E),\cap)$

المثال 3:

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{N}^*$ بما يلي: $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}\right)\quad a*b=a^b$

لدينا: $(1)\quad \left(\forall a\in\mathbb{N}^*\right)a*1=a^1=a$ ولدينا: $1*a=1^a=1$

إذن 1 ليس عنصر محايدا.

المثال 4

نعتبر $*$ القانون المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)x*y=xy-4x-4y+20$$

– هل للقانون $*$ عنصر محايد؟

. لنبحث عن e من $\mathbb{R}$ بحيث: $(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x*e=x$

ونلاحظ أن $*$ تبادلي. إذن يكفي أن نبحث عن e بحيث:

$$(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x$$

لدينا:

$$(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x \iff (\forall x\in\mathbb{R})ex-4e-4x+20-x=0$$

$$\iff (\forall x\in\mathbb{R})x(e-5)-4e+20=0$$

$$\iff \begin{cases} e-5=0 \\ 20-4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} e=5 \\ e=5 \end{cases}$$

إذن $e=5$ هو العنصر المحايد للقانون $*$.

ملاحظة: العنصر الحيادي إن وجد في مجموعة **وحيـــــــــــــد.**

بالفعل : نفرض وجود عنصرين حياديين e و 'e. بما ان eعنصرا حياديا فان

e * e'= e'……………..(1)

و بما ان 'e عنصرا حياديا فان

e * é = e ………………(2)

من (1) و (2) ينتج ان 'e=e.

تمرين: للطلبة

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ ب:

$$(\forall x,y\in\mathbb{R})x*y=x+4y-1$$

هل للقانون $*$ عنصر محايد؟

4- العناصر المتناظر او المتماثلة (Element Symetrique)

تعريف4

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. نفترض ان $*$ يقبل عنصرا محايدا e.
نقول إن عنصرا x من E يقبل مماثلا بالنسبة ل $*$ إذا وفقط إذا وجد عنصر x' من E بحيث:

$$x * x' = x' * x = e$$

نقول كذلك ان 'x هو نظير x بالنسبة للعملية ($*$) و يرمز له كذلك بـ x^{-1} بدلا من 'x .

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تبادلي نكتفي بإحدى المتساويتين.

المثال 1: في كل من $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+)$ كل عنصر x يقبل مماثلا هو $-x$. يسمى (x-) معكوس x (Oposé)

المثال 2:
في $(\mathbb{Q}^*,\times);(\mathbb{R}^*,\times);(\mathbb{C}^*,\times)$ كل عنصر x يقبل مماثلا هو $\frac{1}{x}$
يسمى $\frac{1}{x}$ بمقلوب x (Inverse)

ملاحظة:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E.
نفترض أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا e وتجميعي. إذا كان لعنصر x مماثل x' فإن هذا المماثل وحيد.

المثال3: نعتبر E=ℝxℝ وعملية جمع الثنائيات (⊕) المعرفة في المثال (4) اعلاه

$$(a,b), (a',b') \in E: (a, b) \oplus (a', b') = (a+a', b+b')$$

- لنبحث عن العنصر الحيادي (e, f)؟ بما ان العملية (⊕) تبديلية نكتفي بالبحث عن (e, f) الذي يحقق المساواة

$$\forall(a,b) \in E: (a, b) \oplus (e, f) = (a, b)$$

$$\forall a,b \in E: (a+e, b+f)= (a, b) \Leftrightarrow \forall a,b \in E: a+e=a \text{ et } b+f=b \Leftrightarrow e=0 \text{ et } f=0$$

أي العنصر الحيادي هو(e, f)=(0, 0).

- لنبحث عن نظير (او مماثل) عنصر(a, b) بالعملية (⊕). ليكن$(a',b') \in E$ مماثل (a, b).

بما ان العملية تبديلية نكتفي بإحدى المساواتين $(a, b) \oplus (a', b') =(e, f)$ او $(a', b') \oplus (a, b) =(e, f)$.

$$(a, b) \oplus (a', b') =(e, f) \Leftrightarrow (a+a', b+b')=(0, 0) \Leftrightarrow \{a+a'=0 \text{ et } b+b'=0\}$$

$$\Leftrightarrow \{a'=-a \text{ et } b'=-b\}.$$

أي ان نظير العنصر (a, b) هو العنصر (-a, -b).

2.3 الزمرة Le Groupe

تعريف

لتكن G مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية $(*)$. نقول عن $(G, *)$ انها زمرة (Groupe) اذا تحقق:

1- العملية $(*)$ تجميعية أي $\forall\ a, b, c \in G : (a*b)*c=a*(b*c)$.

2- $(*)$ تقبل عنصرا حياديا $e\in G$. أي $\exists e \in G : \forall a\in G : a*e = e*a = a$

3- لكل عنصر $a\in G$ نظيرا $a'\in G$ أي $\forall a\in G, \exists a'\in G : a'*a = a*a' = e$

ملاحظة: اذا كانت العملية $(*)$ تبديلية نقول عن الزمرة $(G, *)$ زمرة تبديلية.

مثال1:

كل من $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+)$ زمرة تبادلية.

لان الجمع $(+)$ تبديلي و تجميعي و يقبل عنصر حيادي هو $e=0$ و كل عدد a يقبل نظيرا هو $a'=-a$

مثال2:

كل من $(\mathbb{Q}^*,\times),(\mathbb{R}^*,\times),(\mathbb{C}^*,\times)$ زمر تبادلية.

لان الضرب (x) تبديلي و تجميعي و يقبل عنصرا حياديا هو $e=1$ و كل عدد a غير معدوم يقبل نظيرا هو $a'=\frac{1}{a}$.

مثال3: المجموعة IRxIR المزودة بالعملية $(\oplus)$ المعرفة في المثال (4) اعلاه

$$(a,b), (a',b') \in E: (a, b) \oplus (a', b') = (a+a', b+b')$$

زمرة تبديلية لان العملية $(\oplus)$ تبديلية و تجميعية و تقبل عنصرا حياديا هو $(e, f)=(0, 0)$ و لكل عنصر (a, b) نظيرا هو $(a', b')=(-a, -b)$.

مثال4: العملية$(*)$ المعرفة على $G=IR$ بـ: $a, b\in G : a*b=ab+a+b$

هل $(G, *)$ زمرة تبديلية؟

- $(*)$ تبديلية و تجميعية.
- ليكن $e\in G$ العنصر الحيادي بهذه العملية.

$$\forall a\in G: a*e = a \Leftrightarrow \forall a\in G: ae+a+e = a \Leftrightarrow \forall a\in G: ae+e = 0$$

بالمطابقة فان: $e=0$. اذن العنصر الحيادي هو $e=0$.

- نظير عنصر $a\in G$. ليكن $a'\in G$ نظير a . أي $a' *a = e$

$$a'*a = e \Leftrightarrow a'a+a'+a = 0 \Leftrightarrow a'(a+1) =-a$$

من اجل $a=-1$ فان a' غير موجود (أي العدد -1 ليس له نظيرا بهذه العملية)

اما من اجل a∈IR-{-1} فانه يقبل نظيرا هو: $a'=\frac{-a}{a+1}$.

اذن (IR, ∗) ليست زمرة بينما (IR-{-1}, ∗) زمرة تبديلية.

3.3 تماثل الزمر Morphisme de groupes

تعريف (التماثل)

لتكن (G',T) و (G, ∗) زمرتان و $f : G \to G'$ تطبيق.

نقول عن f انه **تماثل** زمر اذا تحقق: $\forall a, b \in G : f(a*b) = f(a) \, T \, f(b)$

مثال1: $f : (Q, +) \to (IR-\{0\}, \times), f(a)=2^a$

$$\forall a, b \in Q: f(a+b)=2^{a+b}=2^a \times 2^b=f(a) \times f(b).$$

مثال2: $f : (IR_+^*, \times) \to (IR, +), f(a)=\ln(a)$

$$\forall a, b \in IR_+^*: f(a\times b)=\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)=f(a)+f(b).$$

مثال3:

نعتبر التطبيق: $f : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},+)$
$x \to ax$

f تماثل لان $\left(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2\right) f(x+y)=f(x)+f(y)$

لدينا: $f(x+y)=a(x+y)=ax+ay$
$=f(x)+f(y)$

تعريف (التشاكل Isomorphisme)

لتكن (G, ∗) (G',T) زمرتان و $f : G \to G'$ تطبيق.

نقول عن f انه **تشاكل** زمر اذا كان f تماثل و تقابل.

مثال1 نعتبر التماثل في المثال2 السابق (f(x)=ln(x)) المعرف من IR_+^* نحو IR. يكفي اثبات f تقابل؟

f متباين لان:

$$\forall a, b \in IR_+^*: f(a)= f(a) \Leftrightarrow \ln(a)= \ln(b) \Leftrightarrow a=b.$$

f غامر لان:

$$\forall y \in IR: \exists? a\in IR_+^*: y= f(a).$$

$y= f(a) \Leftrightarrow y= \ln(a) \Leftrightarrow a=e^y \Rightarrow$ f غامر $\Rightarrow$ f تشاكل

مثال2 نعتبر المثال3 السابق. f(x)=ax حيث a عدد حقيقي غير معدوم. راينا ان f تماثل. يكفي اثبات f تقابل؟

يمكن اثبات بسهولة ان f متباين.

f غامر لان: $\forall\ y \in IR: \exists ?x\in IR: y= f(x).$

$$y= f(x) \Leftrightarrow y= ax \Leftrightarrow x=\frac{1}{a}y \Rightarrow$$ f غامر $\Rightarrow$ f تشاكل

<u>مثال3</u> نعتبر $(G, .)$ زمرة و $a\in G$ و $f : G \to G$ تطبيق معرف بـ: $f(x)=a.x.a^{-1}$ حيث a^{-1} نظير a.

بين ان f تشاكل أي تماثل و تقابل.

f متباين لان:

$$\forall\ x, x' \in G: f(x)= f(x') \Leftrightarrow a.x.a^{-1}= a.x'.a^{-1} \Leftrightarrow a.x.a^{-1}.a= a.x'.a^{-1}.a.$$

$$\Leftrightarrow a.x.e= a.x'.e \Leftrightarrow a.x = a.x' \Leftrightarrow a^{-1} .a.x = a^{-1} .a.x' \Leftrightarrow e.x = e.x' \Leftrightarrow x = x'$$

f غامر لان:

$$\forall\ y \in G: \exists ?a\in G: y= f(a).$$

$$y= f(a) \Leftrightarrow y= a.x.a^{-1} \Leftrightarrow y.a= a.x.a^{-1}.a \Leftrightarrow y.a= a.x.e \Leftrightarrow y.a= a.x \Leftrightarrow a^{-1}.y.a= a^{-1}.a.x$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}.y.a= e.x \Leftrightarrow x=a^{-1}.y.a \Rightarrow$$ f غامر $\Rightarrow$ f تشاكل

<u>4.3 الزمرة الجزئية Le Sous groupe</u>

<u>تعريف</u>

لتكن $(G, *)$ زمرة و H جزء من G نقول عن H انها زمرة جزئية من G اذا تحقق:

1- $H \neq \varnothing$ $(e\in H)$.

2- $\forall\ a, b \in H : a*b \in H$

3- $\forall\ a \in H :\ a' \in H$ حيث a' هو نظير a بالعملية $(*)$.

<u>مثال1</u>: نعتبر الزمرة $(Z, +)$ حيث Z هي مجموعة الاعداد الصحيحة.

نعتبر المجموعة: $H=\{x\in Z : x=2k\ /\ k\in Z\}$ أي H هي مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية يرمز لها 2Z.

أي $x\in H \Leftrightarrow \exists k\in Z : x=2k$. لنثبت ان H زمرة جزئية من G=Z.

- $e=0\in H$ لان 0 عدد زوجي.
- $\forall\ x, y\in H \Rightarrow x+y\in H$ بالفعل لدينا:

$$x \in H \Leftrightarrow x=2k\ /\ k\in Z$$

$$\text{et } y \in H \Leftrightarrow y=2k'\ /\ k'\in Z$$

بالجمع طرف لطرف

$$x+y=2k+2k'=2(k+k')=2k''\ /\ k''=k+k' \Rightarrow x+y\in H$$

- $\forall\ x \in H \Rightarrow x' =-x\in H$

$$x \in H \Leftrightarrow x=2k\ /\ k\in Z \Rightarrow -x=-2k = 2(-k)=2k'\ /\ k'=-k \Rightarrow -x \in H$$

<u>ملاحظة</u>:

1- بنفس الطريقة يمكن اثبات ان المجموعة: $H=\{x\in Z : x=nk / k\in Z\}$ زمرة جزئية من الزمرة (Z,+)
يرمز لها nZ.
2- اذا كانت $(G, *)$ زمرة و H جزء من G حيث $(H, *)$ زمرة فان H زمرة جزئية من G.
مثال2: IR_+^* زمرة جزئية من (IR*, x).
مثال3: **Z** زمرة جزئية من (IR, +).

5.3 الزمرة Z/nZ

1- نعتبر العلاقة R المعرفة على Z بـ: $x,y \in Z : xRy \Leftrightarrow \exists k\in Z : x-y=2k$
يمكن اثبات بسهولة ان R علاقة تكافؤ. تعيين أصناف تكافؤ كل من 0، 1، 2، 3،....

$\bar{0}=\{x\in Z : xR0\}=\{x\in Z : x-0=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=2k / k\in Z \}=\{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

$\bar{1}=\{x\in Z : xR1\}=\{x\in Z : x-1=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=2k+1 / k\in Z \}=\{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$

$\bar{2}=\{x\in Z : xR2\}=\{x\in Z : x-2=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=2k+2 / k\in Z \}=\{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

$\bar{3}=\{x\in Z : xR3\}=\{x\in Z : x-3=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=2k+3 / k\in Z \}=\{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$

نجد ان:

$\bar{0}=\bar{2}=\bar{4}=\bar{6}= ...\overline{-2}=\overline{-4}=\overline{-6}=...= \overline{2k} = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

$\bar{1}=\bar{3}= \bar{5}=\bar{7}=...= \overline{-1}=\overline{-3}=\overline{-5}=... = \overline{2k+1} = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$

أي يوجد صنفي تكافؤ بالعلاقة R هما $\bar{1}$ و $\bar{0}$. نرمز لمجموعة أصناف التكافؤ بالرمز Z/R او Z/2Z أي ان:

$Z/2Z = \{\{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}, \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}\}= \{\bar{0},\bar{1}\}$

الزمرة Z/2Z

نعتبر المجموعة $Z/2Z= \{\bar{0},\bar{1}\}$. نعرف على هذه المجموعة العملية $(\bar{+})$ بـ:

$$\bar{x}, \bar{y}\in Z/2Z : \bar{x} \mathbin{\bar{+}} \bar{y} = \overline{x+y}$$

$$\bar{0} \mathbin{\bar{+}} \bar{0} = \bar{0},\ \bar{1} \mathbin{\bar{+}} \bar{0} = \bar{1},\ \bar{0} \mathbin{\bar{+}} \bar{1} = \bar{1} \text{ et } \bar{1} \mathbin{\bar{+}} \bar{1} = \bar{2}=\bar{0}.$$

العملية $(\bar{+})$ تبديلية و تقبل$\bar{e}=\bar{0}$ كعنصر حيادي. نظير $\bar{0}$ هو $\bar{0}$ و نظير $\bar{1}$ هو $\bar{1}$.
بالتالي **$(Z/2Z, \bar{+})$ زمرة تبديلية**.

2- نعتبر العلاقة R المعرفة على Z بـ: $x,y \in Z : xRy \Leftrightarrow \exists k\in Z : x-y=3k$
يمكن اثبات بسهولة ان R علاقة تكافؤ. تعيين أصناف تكافؤ كل من 0، 1، 2، 3....

$\bar{0}=\{x\in Z : xR0\}=\{x\in Z : x-0=3k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=3k / k\in Z \}=\{...,-6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

$\bar{1}=\{x\in Z : xR1\}=\{x\in Z : x-1=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=3k+1 / k\in Z \}=\{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

$\bar{2}=\{x\in Z : xR2\}=\{x\in Z : x-2=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=3k+2 / k\in Z \}=\{..., -7, -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

$\bar{3}=\{x\in Z : xR3\}=\{x\in Z : x-3=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=3k+3 / k\in Z \}=\{...,-6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

$\bar{4}=\{x\in Z : xR1\}=\{x\in Z : x-4=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=3k+4 / k\in Z \}=\{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

نجد ان:

$\bar{0}=\bar{3}=\bar{6}=\bar{9} =...\overline{-3}=\overline{-6}=\overline{-9}=...\overline{3k} = \{...,-6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

$\bar{1}=\bar{4}=\bar{7}=\overline{10}=...\overline{-2}=\overline{-5}=\overline{-8}=...= \overline{3k+1} = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

$\bar{2}=\bar{5}=\bar{8}=\overline{11}=...=\overline{-1}=\overline{-4}=\overline{-7}=...= \overline{3k+2} = \{..., -7, -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

أي يوجد 3 أصناف تكافؤ بالعلاقة R هما $\bar{2}$ و $\bar{1}$ و $\bar{0}$. نرمز لمجموعة أصناف التكافؤ بالرمز Z/3Z أي ان

$$Z/3Z = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

<u>الزمرة Z/3Z</u>

نعتبر المجموعة $Z/3Z = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. نعرف على هذه المجموعة العملية $(\mp)$ بـ:

$$\bar{x}, \bar{y} \in Z/2Z : \bar{x} \mp \bar{y} = \overline{x+y}$$

$$\bar{0} \mp \bar{0} = \bar{0},\ \bar{1} \mp \bar{0} = \bar{1},\ \bar{0} \mp \bar{1} = \bar{1} \text{ et } \bar{2} \mp \bar{0} = \bar{2},\ \bar{0} \mp \bar{2} = \bar{2},\ \bar{1} \mp \bar{1} = \bar{2}$$

$$\bar{2} \mp \bar{1} = \bar{1} \mp \bar{2} = \bar{3} = \bar{0},\ \bar{2} \mp \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}.$$

العملية $(\mp)$ تبديلية و تقبل $\bar{e} = \bar{0}$ كعنصر حيادي. نظير $\bar{0}$ هو $\bar{0}$ و نظير $\bar{1}$ هو $\bar{2}$ و نظير $\bar{2}$ هو $\bar{1}$.

بالتالي $(Z/3Z, \mp)$ زمرة تبديلية.

بشكل عام من اجل عدد طبيعي n غير معدوم

العلاقة R المعرفة على Z بـ: **$x,y \in Z : xRy \Leftrightarrow \exists k \in Z : x-y=nk$** علاقة تكافؤ و مجموعة أصناف التكافؤ هي:

$$Z/nZ = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-2}, \overline{n-1}\}$$

نعرف على هذه المجموعة العملية $(\mp)$ بـ:

$$\bar{x}, \bar{y} \in Z/2Z : \bar{x} \mp \bar{y} = \overline{x+y}$$

$(Z/nZ, \mp)$ زمرة تبديلية عنصرها الحيادي $\bar{e} = \bar{0}$ و نظير $\bar{a}$ هو $\overline{n-a}$.

<u>4 الحلقة L'anneau</u>

<u>1.4 تعريف</u> ليكن T قانون تركيب داخلي في مجموعة A:

نقول إن T توزيعي بالنسبة ل * إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (x,y,z) \in E^3)\, xT(y*z) = (xTy)*(xTz) \quad (1)$$

$$(x*y)Tz = (xTz)*(yTz) \quad (2)$$

إذا كان القانون T تبادلي فإن إحدى الخاصيتين (1) أو (2) كافية.

<u>أمثلة :</u>

1- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في كل من $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$.

2- الجمع ليس توزيعيا بالنسبة للضرب:

$$x + (y \times z) \neq (x+y) \times (x+z)$$

3- الاتحاد توزيعي بالنسبة للتقاطع. و التقاطع توزيعي بالنسبة للاتحاد في $P(E)$.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

<u>2.4 تعريف الحلقة</u>

لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين * و T نقول إن $(A,*,T)$ حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

*) $(A,*)$ زمرة تبادلية.

*) T تجميعي.

*) T توزيعي بالنسبة ل *

ملاحظات:

*) إذا كان القانون T تبادلي. نقول إن الحلقة A تبادلية.

*) إذا كان للقانون T عنصر محايد، نقول إن الحلقة A واحدية.

*) نرمز عادة للقانون * ب " + " وللقانون T ب "$\times$" ونرمز في هذه الحالة للعنصر المحايد ل * ب 0 أو 0_A ويسمى صفر حلقة. ونرمز للعنصر المحايد ل T ب 1 أو 1_A.

أمثلة

1- كل من $(\mathbb{Z},+,\times),(\mathbb{Q},+,\times),(\mathbb{R},+,\times),(\mathbb{C},+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

2- $(F(X,\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

3- نعتبر المجموعة $A=IR^2$ مزودة بالعمليتين $\oplus$ و $\otimes$ المعرفتين بـ:

$$(a,b),(a',b')\in A:(a,b)\oplus(a',b')=(a+a',b+b')$$

$$(a,b),(a',b')\in A:(a,b)\otimes(a',b')=(a.a',b.b')$$

يمكن اثبات ان $(IR^2,\oplus,\otimes)$ حلقة تبديلية واحدية حيث: عنصرها الحيادي بالجمع : $0_{IR^2}=(0,0)$ و عنصرها الحيادي بالضرب : $1_{IR^2}=(1,1)$.

خاصية: اذا كانت $(A,+,x)$ حلقة فان:

$$(\forall a\in A):a\times 0=0\times a=0$$

3.4 قواعد الحساب في حلقة

اذا كانت $(A,+,.)$ حلقة واحدية فان:

1- $\forall a\in A : a.(-1)=(-1).a=-a$

2- $\forall a\in A : a.(-b)=(-b).a=-(ab)$

3- $a^0=1$ (اصطلاحا) و $a^n=a.a...a$ (n مرة) $\forall a\in A$:.

4- $\forall a,b,c\in A : a.(b-c)=a.b-a.c$ et $(a-b).c=a.c-b.c$

5- $\forall a,b\in A : (a+b)^2=a^2+a.b+b.a+b^2$ اذا كانت (.) تبديلية او $a.b=b.a$ نتحصل على $(a+b)^2=a^2+2a.b+b^2$

6- اذا كانت (.) تبديلية او $a.b=b.a$ فان دستور ثنائي الحد ينص على ان:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k . b^{n-k} \quad ou \quad C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

4.4 قواسم الصفر Les diviseurs de zero

تعريف

لتكن (., +, A) حلقة واحدية و $a\in A$. نقول عن a انه **قاسما للصفر** اذا كان $a\neq 0$ و يوجد $b\in A$ حيث $b\neq 0$ و يحقق: $a.b=0$ و $b.a=0$.

تعريف

لتكن (., +, A) حلقة واحدية . نقول عن A انها **حلقة تامة** اذا كانت لا تملك قواسما للصفر.

ملاحظة: a, b قاسمان للصفر اذا كانا غير معدومان و جداؤهما معدوما.

مثال1: الحلقات التالية:

$(\mathbb{C},+,\times);(\mathbb{R},+,\times);(\mathbb{Q},+,\times);(\mathbb{Z},+,\times)$ هي حلقات لا تملك قواسم للصفر وبالتالي هي حلقات تامة. لانه لا يوجد عددان غير معدومان و جداؤهما معدوما في كل مجموعة من هذه المجموعات.

مثال2: نعتبر الحلقة $(IR^2,\oplus,\otimes)$ في المثال 3 السابق حيث:

$(a,b), (a',b') \in A: (a, b) \oplus (a', b') = (a+a', b+b'),\ \ (a, b) \otimes (a', b') = (a.a', b.b')$

. العنصران مثلا : (0, 1) و (1, 0) قاسمان للصفرلانهما غير معدومين ولكن دينا $(1, 0) \otimes (0, 1)=(0, 0)$. اذن $(IR^2,\oplus,\otimes)$ حلقة غير تامة.

5.4 العناصر القابلة للقلب Les éléments inversibles

تعريف

لتكن (., +, A) حلقة واحدية و $a\in A$. نقول عن a انه **قا بل للقلب** اذا كان $a\neq 0$ و يوجد $b\in A$ حيث $b\neq 0$ و يحقق: $a.b=b.a=1$ و يرمز لمجموعة العناصر القابلة للقلب بـ U(A) او A*

مثال1: في الحلقة (., +, Z) العناصر القابلة للقلب هي 1 و -1. أي $Z^*=U(Z)=\{1, -1\}$

مثال2: في الحلقة $(IR^2,\oplus,\otimes)$ اذا كان $(a,b)\in A$ حيث $a=0$ او $b=0$ فان (a, b) غير قابل للقلب أي العناصر القابلة للقلب هي الثنائيات (a,b) حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

مثال3: في الحلقات $(\mathbb{C},+,\times);(\mathbb{R},+,\times);(\mathbb{Q},+,\times)$ كل الاعداد غير المعدومة قابلة للقلب$R^*=R-\{0\}$

5. الحقل Le Corps

تعريف

لتكن K مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين (+) و (.) نقول عن (., +, K) انها **حقلا** او جسما اذا تحقق:

1- (., +, K) حلقة واحدية.
2- لكل عنصر غير معدوم من K نظيرا (مقلوبا) بالعملية (.).

مثال1:

كل من $(\mathbb{C},+,\times),(\mathbb{R},+,\times),(\mathbb{Q},+,\times)$ جسم تبادلي.

خاصية:

إذا كان p أولي فإن $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ جسم تبادلي.

حيث العمليتين (+) و (x) معرفتين بـ:

$$\bar{x}, \bar{y} \in Z/pZ : \bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y},\ \bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y}.$$

البرهان: نبرهن الخاصية من اجل p=3 ويكون البرهان بنفس الطريقة في الحالة العامة.

تكون $(Z/3Z, +, \times)$ حقلا اذا حققت الشرطين (1) و (2) التاليين:

1 - $(Z/3Z, +)$ حلقة واحدية تبديلية. أي $(Z/3Z, +)$ زمرة تبديلية و العملية $(\times)$ تبديلية و تجميعية و توزيعية على العملية (+) و تملك عنصرا حياديا بالضرب $(\times)$.

2 - لكل عنصر $\bar{x}$ يختلف عن $\bar{0}$ نظيرا (مقلوبا) بالعملية $(\times)$.

1- رأينا سابقا ان $(Z/3Z, +)$ زمرة تبديلية عنصرها الحيادي بالجمع $\bar{0}$.

العملية $(\times)$ تبديلية :

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in Z/3Z : \bar{x} \times \bar{y} = \bar{y} \times \bar{x}$?

$\bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y} = \overline{y \times x} = \bar{y} \times \bar{x}.$

العملية $(\times)$ تجميعيّة؟

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in Z/3Z : \bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = (\bar{x} \times \bar{y}) \times \bar{z}$?

$\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = \bar{x} \times (\overline{y \times z}) = \overline{x \times (y \times z)} = \overline{(x \times y) \times z} = \overline{(x \times y)} \times \bar{z} = (\bar{x} \times \bar{y}) \times \bar{z}.$

العملية $(\times)$ توزيعية على (+)؟

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in Z/3Z : \bar{x} \times (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} \times \bar{y}) + (\bar{x} \times \bar{z})$?

$\bar{x} \times (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} \times (\overline{y+z}) = \overline{x \times (y+z)} = \overline{x \times y + x \times z} = \overline{x \times y} + \overline{x \times z} = (\bar{x} \times \bar{y}) + (\bar{x} \times \bar{z}).$

العنصر الحيادي بالعملية $(\times)$ هو $\bar{1}$ لان:

$\forall \bar{x} \in Z/3Z : \bar{x} \times \bar{1} = \overline{x \times 1} = \bar{x}$ et $\bar{1} \times \bar{x} = \overline{1 \times x} = \bar{x}.$

2- ليكن $\bar{x}$ عنصرا يختلف عن $\bar{0}$، أي ان $x \neq 3k$ أي ان x *لا يقبل القسمة على 3 و بما ان 3 عدد اولي فان*

x اولي مع 3 *حسب نظرية في مجموعة الاعداد الصحيحة تسمى نظرية بيزوت Bizout فانه يوجد عددان صحيحان x' و x''* حيث $\boldsymbol{x \times x' + 3 \times x'' = 1}$ و بالتالي :

$$\overline{x \times x' + 3 \times x''} = \bar{1} \Leftrightarrow \bar{x} \times \overline{x'} + \bar{3} \times \overline{x''} = \bar{1} \Leftrightarrow \bar{x} \times \overline{x'} + \bar{0} \times \overline{x''} = \bar{1}$$
$$\Leftrightarrow \bar{x} \times \overline{x'} = \bar{1}$$

و منه $\overline{x'}$ نظير $\bar{x}$ بالعملية $(\times)$.

و منه Z/3Z حقل تبديلي.