المحور الرابع: الدفعات المتساوية بفائدة مركبة

الدفعات المتساوية: هي مجموعة من المبالغ المتساوية في القيمة، والتي تدفع بصفة دورية منتظمة وعلى فترات متساوية (شهر، شهرين، ثلاثي، سداسي، سنوي)، ويطلق على كل مبلغ من هذه المبالغ بمبلغ الدفعة، وقد يأخذ مبلغ الدفعة هذا صورة قسط من القرض أو دفعة من الإيجار.

أنواع الدفعات المتساوية: يمكن أن نميز بين نوعين من الدفعات المتساوية حسب طريقة الدفع إلى:

دفعات متساوية عادية؛

دفعات متساوية فورية.

أولا: الدفعات المتساوية العادية: وتسمى دفعات السداد، وهي تلك الدفعات التي يتم دفعها في نهاية كل فترة زمنية بصفة منتظمة ومتساوية.

1- جملة الدفعات المتساوية

جملة الدفعات هو عبارة عن مجموع هذه الدفعات وفائدتها حتى نهاية مدة الدفعات مجتمعة.

وتحسب جملة دفعات متساوية لأخر المدة وفق العلاقة التالية:

$$\mathrm{V} = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

مثال:

دفعة عادية قيمتها 2000 دج، تدفع مرة في السنة لمدة 5 سنوات، وبمعدل فائدة مركبة سنوي 6 %.

المطلوب: أوجد جملة الدفعة العادية؟

$$\mathrm{V} = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$= 2000\,\frac{(1+0.06)^5 - 1}{0.06}$$

$$= 11\ 274{,}185\ \mathrm{DA}$$

2- حساب عناصر جملة دفعات آخر المدة

أ- حساب قيمة الدفعة (a):

من قانون الجملة لدفعات أخر المدة، يمكن استخلاص قانون الدفعة كما يلي:

$$V = a\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$V \text{ x } t = a\ (1+t)^n - 1$$

$$a = v\frac{t}{(t+1)^n-1} \qquad / \qquad a = \frac{v.t}{(t+1)^n-1}$$

مثال:

أحسب قيمة الدفعة لجملة 7 دفعات سنوية آخر المدة قيمتها: 446140.168، بمعدل فائدة مركبة سنوي 8%.

$$a = \frac{v.t}{(1+t)^n-1}$$

$$= \frac{446140.168\ x\ 0.08}{(1.08)^7-1}$$

= 50000 Da.

ب- حساب معدل الفائدة

لحساب معدل الفائدة المطبق عند توظيف دفعات متساوية لآخر الفترة، يتوجب الرجوع إلى الجدول المالي رقم 3.

لما نقابل القيمة الناتجة عن حاصل القيمة $\frac{v}{a}$ نجد معدل الفائدة.

$$V_n = a\,\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$\boxed{\frac{V_n}{a} = \frac{(1+t)^n-1}{t}}$$

مثال:

قام شخص بإيداع 10 دفعة سنوية لدى أحد البنوك بنهاية كل عام، فإذا كان مقدار الدفعة الواحدة 1300، وبنهاية مدة التوظيف بلغ رصيده 16737.96 دج.

أوجد معدل الفائدة السنوي المعتمد لدى البنك؟

الحل:

لدينا:

10 دفعات = $\mathbf{n}$، $\mathbf{V_5} = 16737.96$ ، $\mathbf{a} = 1300$

$\mathbf{.}t = ?$

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$\frac{\mathbf{16737.96}}{\mathbf{1300}} = \frac{(1+t)^{10}-1}{\boldsymbol{t}}$$

$$12.87535 = \frac{(1+t)^{10}-1}{\boldsymbol{t}}$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم 3، نجد ان القيمة المقابلة لـ: 12.87535 الموجودة في السطر رقم 10، الذي يشير إلى عدد الدفعات، وعند إيجادها نحدد المعدل الذي يوافق عمودها فنجدها تقابل معدل الفائدة 5.5 %.

ج- حساب عدد الدفعات (عدد الفترات)

يمكننا إيجاد عدد الدفعات بطريقتين:

1- طريقة الجدول المالي رقم 3، كما مر علينا في إيجاد معدل الفائدة؛

2- اعتماد طريقة اللوغاريتمات.

$$V_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\frac{V_n \times t}{a} = (1+t)^n - 1$$

$$\frac{V_n \times t}{a} + 1 = (1+t)^n$$

$$\text{Log}\,\left(\frac{V_n \times t}{a} + 1\right) = \log(1+t)^n$$

$$\text{Log}\,\left(\frac{V_n \times t}{a} + 1\right) = n \log(1+t)^n$$

$$\boxed{n = \frac{\log\left(\frac{V_n \times t}{a} + 1\right)}{\log(1+t)}}$$

مثال:

أحسب عدد الدفعات لبنك حصل على دفعات متساوية للقروض الممنوحة بقيمة 2000 دج، لجملة انتجت بعد عدد من الفترات مبلغا قدر بـ: 26360 دج، بمعدل فائدة هو 6%.

الحل:

$$n = \frac{\log\left(\frac{v.t}{a} + 1\right)}{\log(1+t)}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{26360.0.06}{2000} + 1\right)}{\log(1.06)}$$

$$n = \frac{\log\,(1{,}7908)}{\log(1.06)}$$

$n = 10$ سنوات

د- القيمة الحالية لدفعات آخر المدة

ويقصد بها قيمتها في بداية المدة، على أساس معدل فائدة مركبة معين.

وتحسب القيمة الحالية لمجموع دفعات آخر المدة وفق العلاقة التالية:

$$\text{Va} = a\frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

مثال:

أحسب القيمة السنوية لدفعة سنوية تقدر بـ: 5000، لمدة 6 سنوات، ومعدل فائدة مركب سنوي يقدر بـ 5 %.

الحل:

$$\text{Va} = a\frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

$$\text{Va} = 5000\ \frac{1 - (1+0.05)^{-6}}{0.05}$$

= 25378.4603 Da.

ثانيا: دفعات متساوية فورية

هي مبالغ تودع دوريا في بداية كل فترة بغرض تكوين رأس مال أو تسديد قرض ما أيضا.

1- القيمة المكتسبة لدفعات أول المدة:

هي القيمة المحصلة أو المكتسبة في نهاية التوظيف لعدد من الدفعات.

وتحسب جملة دفعات متساوية لأول المدة وفق العلاقة التالية:

$$\text{V} = a\frac{(1+t)^{n} - 1}{t}\ (1+t)$$

مثال:

يوظف شخص في بنك مبلغ 50000 دج بداية كل سنة، وهذا لمدة 6 سنوات، وبمعدل فائدة سنوي مركب قدر بـ: 4 **%**.

المطلوب:

أحسب جملة ما تجمع لهذا الشخص؟

الحل:

$$V = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}\ (1+t)$$

$$V = 50000\frac{(1+0.04)^6 - 1}{0.04}\ (1+0.04)$$

V= 344914.726

2- حساب عناصر جملة دفعات أول المدة

أ- حساب قيمة الدفعة a:

من علاقة الجملة اول المدة لدينا:

$$\mathbf{V = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}\ (1+t)}$$

$$v.t = a\,[(1+t)^n - 1\,](1+t)$$

$$a = \frac{v.t}{[(1+t)n - 1]\ (1+t)}$$

مثال:

ما هي قيمة الدفعة لشخص أودع 10 دفعات متساوية في بداية كل سنة، بمعدل فائدة سنوي مركب 2%، حيث قدرت الجملة في نهاية مدة الإيداع بـ: 22337.43 دج.

الحل:

$$a = \frac{v.t}{[(1+t)^n - 1](1+t)}$$

$$a = \frac{22337.43 \; x \; 0.02}{[(1+0.02)^{10} - 1](1+0.02)}$$

$$= 2000 \text{ DA}$$

ب- حساب معدل الفائدة:

لحساب معدل الفائدة المطبق عند توظيف دفعات متساوية لأول الفترة، يتوجب الرجوع إلى الجدول المالي رقم 3. بالرجوع للقيمة المقابلة لـ $\mathbf{n}$ وللقيمة $\frac{v}{a} + \mathbf{1}$ نجد معدل الفائدة المقابل لهما.

$$v = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}(1+t)$$

$$\frac{v}{a} = \frac{(1+t)^{n+1} - 1 - t}{t}$$

$$\frac{v}{a} = \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - \frac{t}{t}$$

$$\frac{v}{a} = \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - 1$$

$$\frac{v}{a} + 1 = \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t}$$

مثال:

تم توظيف مبلغ قيمته 3500 دج في بداية كل سنة، فكانت الجملة تعادل: 17446.48 دج.

المطلوب:

أحسب معدل الفائدة المطبق؟

الحل:

لدينا:

$$\frac{v}{a} + 1 = \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t}$$

$$\frac{17446.48}{3500} + 1 = \frac{(1+t)^{5}-1}{t}$$

$$5.9847 = \frac{(1+t)^{5}-1}{t}$$

بالبحث عن قيمة $\frac{v}{a} + 1$ المقابلة لـ: 5 دفعات في الجدول المالي رقم (3) نجدا معدل الفائدة الذي يقابلها 9 %.

ج- حساب عدد الدفعات

انطلاقا من علاقة الجملة لدفعات أول المدة:

$$V = a\frac{(1+t)^{n} - 1}{t}(1+t)$$

$$V = a[\frac{(1+t)^{n+1} - 1 - t}{t}]$$

$$V = a[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}]-1$$

$$\frac{v}{a}+1=[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}]$$

$$(\frac{v}{a}+1)\ t=(1+t)^{n+1}-1$$

$$(\frac{v\ t}{a}+t+1)=(1+t)^{n+1}$$

$$\text{Log}\ (\frac{v\ t}{a}+t+1)=\text{Log}(1+t)^{n+1}$$

$$n+1=\frac{\text{Log}(\frac{v\ t}{a}+t+1)}{\text{Log}(1+t)}$$

$$n=\frac{\text{Log}(\frac{v\ t}{a}+t+1)}{\text{Log}(1+t)}-1$$

مثال:

أودع شخص مبلغا أول المدة يقدر بـ: 500 دج، بمعدل فائدة 8 %.

أحسب عدد الدفعات إذا علمت أن جملة هذه الدفعات أنتجت جملة تقدر بـ: 7822.74ج.

الحل:

$$n=\frac{\text{Log}(\frac{v\ t}{a}+t+1)}{\text{Log}(1+t)}-1$$

$$n=\frac{\text{Ln}(\frac{7822.74x0.08}{500}+0.08+1)}{\text{Ln}(1+0.08)}-1$$

$$n=\frac{Log(2.3316384)}{\text{Log}(1.08)}-1$$

n=11-1

n= 10.

د- حساب القيمة الحالية لدفعات أول المدة

ويقصد بها قيمتها في بداية المدة، على أساس معدل فائدة مركبة معين.

وتحسب القيمة الحالية لمجموع دفعات أول المدة وفق العلاقة التالية:

$$\mathrm{Va} = a\,\frac{\mathbf{1-(1+}\boldsymbol{t}\mathbf{)}^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{t}}\,(1+t)$$

مثال:

ما هي القيمة الحالية لمجموع دفعات سنوية في بداية الفترة تقدر ب:650 دج، وعددها 20 على أساس معدل فائدة مركبة سنوي 7.5%.

الحل:

$$\mathrm{Va} = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\,(1+t)$$

$$\mathrm{Va} = 650\,\frac{1-(1+0.075)^{-20}}{0.075}\,(1+0.075)$$

Va = 7123.40

بالتوفيق