

Nadir Arada

Analyse Numérique I - Cours



Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Table des matières

1	Résolution des équations non linéaires	2
1.1	Objectif	2
1.2	Résultats préliminaires d'Analyse	3
1.3	Méthode de la bisection	4
1.4	Méthode du point fixe	7
1.4.1	Existence et unicité du point fixe	9
1.4.2	Convergence globale de la méthode du point fixe	11
1.4.3	Convergence globale d'ordre supérieur	16
1.4.4	Convergence locale	19
1.5	Méthode de Newton	23
1.5.1	Convergence globale	24
1.5.2	Formule d'erreur pour la méthode de Newton	27
1.5.3	Zéro simple : convergence locale quadratique	27
1.5.4	Zéro multiple : convergence locale linéaire	29
1.5.5	Zéro multiple : Newton modifié et convergence quadratique	30
2	<i>Interpolation et approximation polynômiale</i>	33
2.1	Position du problème	33
2.2	Interpolation de Lagrange	35
2.2.1	Base de Lagrange	35
2.2.2	Existence et unicité du polynôme d'interpolation	37
2.3	Formule d'itération de Newton	38
2.3.1	Différences divisées	38
2.3.2	Calcul effectif des différences divisées	40
2.3.3	Cas des points équidistants : différences finies	41
2.3.4	Calcul effectif des différences finies	42
2.4	Erreur d'interpolation	43

2.4.1	Erreur d'interpolation d'une fonction régulière	43
2.4.2	Erreur d'interpolation : cas d'une distribution uni- forme de points	44
2.5	Phénomène de Runge	48
2.6	Interpolation par intervalles	51
2.6.1	Interpolation linéaire par intervalle	51
2.6.2	Interpolation par intervalle avec des polynômes de degré supérieur	53
2.7	Interpolation par des splines cubiques	53
2.7.1	Détermination du spline naturel	54
2.7.2	Erreur d'interpolation	56
2.8	Méthode des moindres carrés	57

Chapitre 1

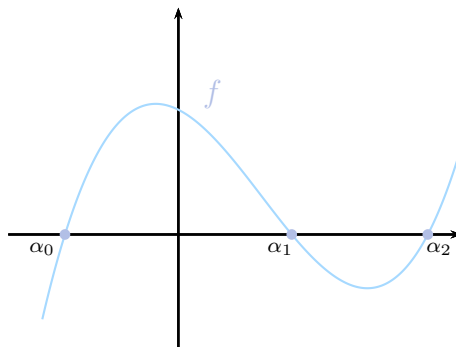
Résolution des équations non linéaires

1.1 Objectif

L'objectif est d'approcher les solutions d'équations de la forme

$$f(x) = 0$$

où f est, au moins, une fonction continue au voisinage de la racine. (Les valeurs α qui vérifient cette équation sont appelés racines de l'équation ou, encore, zéros de la fonction f .)



Pour des cas particuliers de f , par exemple des polynômes de degré 1 ou de degré 2, la résolution de l'équation $f(x) = 0$ peut-être facile. Mais de

manière générale, trouver la solution exacte n'est pas trivial. Par exemple, si f est un polynôme générique de degré supérieur à 4, il n'existe pas de formule explicite pour la solution exacte. Par conséquent, des méthodes itératives qui permettent d'approcher les racines sont considérées.

D'une manière générale, une méthode itérative consiste en une approximation initiale x_0 , désignée par itération initiale, etb en un processus où la nouvelle itération x_{n+1} est obtenue à partir des itérations antérieures x_n, x_{n-1}, \dots . Des suites sont ainsi construites qui, "avec un peu de chance", convergeront vers la solution α de l'équation $f(x) = 0$. Il est évident que s'il y a convergence, alors l'erreur commise $e_n = x_n - \alpha$ tend vers zéro.

Dans ce chapitre, nous passerons en revue un certain nombre méthodes classiques pour l'approximation des solutions d'équations non-linéaires. Nous commencerons par la méthode de la bisection, qui est une méthode géométrique dont l'application nécessite des conditions minimales sur f (continuité et changement de signe dans l'intervalle de travail). Nous considérons ensuite la méthode du point fixe qui consiste à regarder les zéros de f comme des points fixes d'une fonction ϕ . Nous énonçons des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'un point fixe pour ϕ . Nous montrons que ces mêmes conditions garantissent la convergence globale (i.e. pour n'importe quel choix de l'itération initiale dans l'intervalle de travail) de la méthode itérative associée, que cette convergence est linéaire et que, sous des conditions supplémentaires relativement à ϕ , elle est d'ordre supérieur. Nous montrons aussi que sous des hypothèses plus faibles, nous pouvons garantir la convergence locale (i.e. pour une itération initiale choisie dans un voisinage du point fixe) de la méthode.

La méthode de Newton, qui peut-être regardée comme une méthode du point fixe particulière, est ensuite analysée. De la même manière, nous énonçons des résultats de convergence globale, de convergence locale et nous analysons l'ordre de la convergence.

1.2 Résultats préliminaires d'Analyse

Nous rappelons quelques théorèmes classiques qui nous seront utiles dans toute la suite. Nous commençons par un résultat connu permettant de garantir l'existence d'une racine dans un intervalle donné.

Théorème 1. (Bolzano) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Si

$$f(a)f(b) \leq 0$$

alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans $[a, b]$.

Nous énonçons maintenant deux résultats qui nous seront particulièrement utiles dans l'analyse des erreurs d'approximation et des estimations associées.

Théorème 2. (Lagrange) Soit $f \in C^1([a, b])$, i.e. f est dérivable, de dérivée continue dans $[a, b]$. Il existe alors $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(b) = f'(\theta a + (1 - \theta)b)(b - a).$$

Notons que si f est telle que $f(a) = f(b) = 0$, nous obtenons le théorème de Rolle.

Une généralisation du théorème de Lagrange est énoncée ci-dessous.

Théorème 3. (Taylor-Lagrange) Soit $f \in C^{(n+1)}([a, b])$ ($n \geq 1$). Il existe alors $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(\theta a + (1 - \theta)b)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}. \end{aligned}$$

1.3 Méthode de la bisection

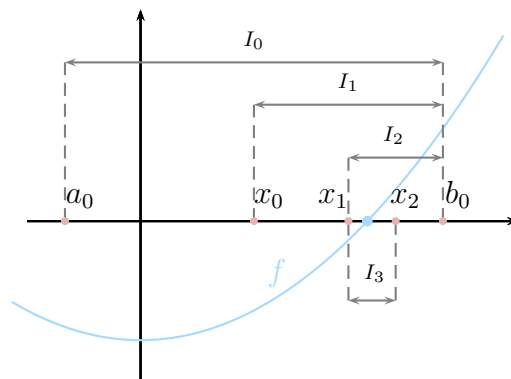
Soit f une fonction continue dans $[a, b]$ tel que $f(a)f(b) \leq 0$. Le cas où $f(a)f(b) = 0$ est trivial car il implique le zéro est ou a ou b . Nous nous intéresserons donc au cas où $f(a)f(b) < 0$. Le théorème de Bolzano garantit l'existence d'au moins un zéro α de f dans $[a, b]$. Supposons, pour simplifier, que α est l'unique zéro de f . L'idée de la méthode de la bisection (encore appelée méthode de la dichotomie) est de construire une suite d'intervalles $I_n = [a_n, b_n]$ satisfaisant

$$I_n \subset I_{n-1} \subset I_1 \subset I_0 = [a, b]$$

et tel que

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad n \rightarrow \infty \quad \alpha.$$

Plus précisément, la stratégie de cette méthode est de diviser l'intervalle considéré I_n en deux sous-intervalles de même longueur et de sélectionner le sous-intervalle I_{n+1} où f change de signe (et où, d'après le théorème de Bolzano, se trouve α). Ce procédé garantit que chaque sous-intervalle I_n choisi contient α et que la suite des points milieux x_n de ces sous-intervalles converge nécessairement vers α , une fois que la longueur des sous-intervalles tend vers zéro.



La méthode peut-être schématisée en un cycle de la manière suivante :

Algorithme

1. Soit $a_0 = a$, $b_0 = b$, $I_0 = [a_0, b_0]$ et $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.
2. Pour $n \geq 0$, si $f(x_n) = 0$, alors x_n est le zéro α .
3. Si $f(x_n) \neq 0$:
 - Si $f(a_n)f(x_n) < 0$, alors $\alpha \in]a_n, x_n[$
 Définir $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$
 - Si $f(x_n)f(b_n) < 0$, alors $\alpha \in]x_n, b_n[$
 Définir $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$
4. Définir $x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.

Remarque 4. La méthode de la bisection étant basée sur le théorème de Bolzano, elle ne s'applique pas si la fonction f ne change pas de signe

(c'est le cas par exemple si le zéro α de f est aussi un extrémum : voir l'exemple traité dans les travaux dirigés et travaux pratiques).

Les conditions de convergence de la méthode de la bisection sont énoncées dans le résultat suivant.

Théorème 5. *Supposons que f est une fonction continue dans $[a, b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$, et que f admet un zéro unique α dans $[a, b]$. Soit $(x_n)_n$ la suite engendrée par la méthode de la bisection et soit $e_n = x_n - \alpha$ l'erreur d'approximation correspondant. Alors*

$$|e_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a)$$

Démonstration. Pour chaque $n \geq 0$, $\alpha \in [a_n, b_n]$. Si $e_n = x_n - \alpha$ est l'erreur à l'itération n , on a

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 (b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_1 - a_1) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b_0 - a_0) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a). \end{aligned}$$

Remarque 6. *i) Pour garantir que*

$$|e_n| \leq \varepsilon, \tag{1.1}$$

où ε est une tolérance donnée, il est suffisant d'imposer que

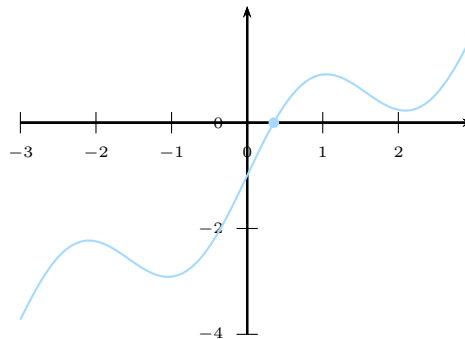
$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a) \leq \varepsilon &\iff (n + 1) \ln \left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) \\ &\iff n + 1 \geq \frac{\ln \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)}{\ln \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln \left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de choisir n tel que

$$n \geq \frac{\ln \left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1. \tag{1.2}$$

ii) La condition précédente est suffisante : L'estimation (1.1) peut-être vérifiée avec un nombre d'itérations inférieur à l'entier défini dans la condition (1.2). Il n'y a pas de contradiction du moment que cette dernière condition est suffisante.

Exemple 7. Nous cherchons à approcher le zéro de la fonction f définie par $f(x) = x - 1 + \sin(2x)$.



En appliquant la méthode de la bisection dans l'intervalle $[-1, 1]$ avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-8}$, nous obtenons la valeur $\alpha = 0.352288462221622$ après 27 itérations.

La méthode de la bisection est intéressante car elle peut s'appliquer à la vaste classe de fonctions f continues et changeant de signe dans l'intervalle de travail, sans exiger d'avantage (comme par exemple que f celle-ci soit dérivable). Cependant, ne pas prendre en compte les variations de ces fonctions peut devenir un handicap. Ceci en plus du fait que la méthode peut-être lente et nécessiter un certain nombre d'itérations avant de converger vers une limite convenable.

Dans les sections ultérieures, nous considérons d'autres classes de méthodes d'approximation qui prennent en compte les variations de f et peuvent-être plus efficaces. Nous commencerons par la méthode du point fixe.

1.4 Méthode du point fixe

Utilisant une calculatrice et commençant avec la valeur 1, appliquons le cosinus de manière répétée. Nous construisons ainsi une suite

$$x_1 = \cos(1) = 0.54030230586814$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \cos(x_1) = 0.85755321584639 \\
 &\vdots \\
 x_{10} &= \cos(x_9) = 0.74423735490056 \\
 &\vdots \\
 x_{20} &= \cos(x_{19}) = 0.73918439977149
 \end{aligned}$$

qui convergera vers $\alpha = 0.73908513 \dots$. Une fois que par définition,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos(x_n) & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

la limite α va satisfaire l'équation

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(x_n) &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \cos\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) \\
 &\iff \alpha = \cos(\alpha)
 \end{aligned}$$

Le point α est appelé point fixe de la fonction cosinus. Ce point peut-être vu comme le zéro de la fonction $f(x) = x - \cos(x)$ et par conséquent, la méthode itérative que nous venons d'utiliser peut-être vue comme une méthode pour calculer les zéros de f .

Un procédé plus général consiste à transformer $f(x) = 0$ en une équation équivalente $x - \phi(x) = 0$. Par conséquent

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha = \phi(\alpha).$$

Le point α est appelé point fixe de ϕ . A priori, il existe une infinité de possibilités relativement au choix de ϕ . Par exemple, il est facile de voir que pour $\omega \neq 0$, on a

$$f(x) = 0 \iff x = \underbrace{x + \omega f(x)}_{\phi(x)}.$$

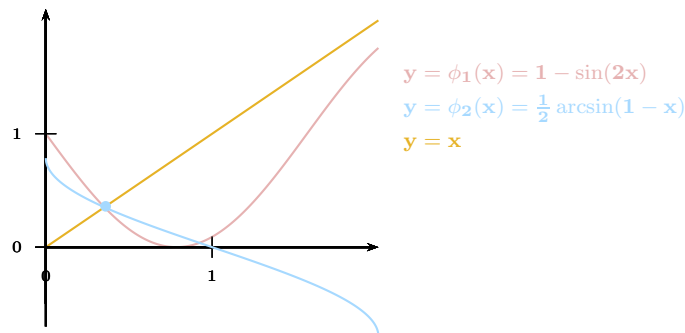
Cependant, et comme nous le verrons plus en avant, certains choix de ϕ sont plus adéquats que d'autres.

La méthode itérative du point fixe est alors définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Choisir une itération initiale } x_0 \\ \text{Itérer } x_{n+1} = \phi(x_n) & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Exemple 8. Considérons l'équation $f(x) = x - 1 + \sin(2x) = 0$. Cette équation peut-être, en particulier, réécrite sous la forme des deux problèmes équivalents suivants

$$x = 1 - \sin(2x) \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} \arcsin(x - 1) \quad x \in [0, 1]$$



1.4.1 Existence et unicité du point fixe

Nous commençons par énoncer des conditions suffisantes sur ϕ garantissant l'existence et l'unicité d'un point fixe.

Théorème 9. Soit $\phi \in C^1([a, b])$.

1. Si ϕ satisfait

$$a \leq \phi(x) \leq b \quad \text{para qualquer } x \in [a, b]$$

alors ϕ admet au moins un point fixe α .

2. Si ϕ est une contraction, i.e. s'il existe $0 < K < 1$ tel que

$$|\phi'(x)| < K \quad \text{pour tout } x \in]a, b[$$

alors le point fixe α est unique.

Démonstration. 1. La fonction g définie par

$$g(x) = \phi(x) - x,$$

est continue dans $[a, b]$ et satisfait

$$g(a)g(b) = (\phi(a) - a)(\phi(b) - b) \leq 0.$$

Grâce au théorème de Bolzano, g admet au moins un zéro dans $[a, b]$, et donc ϕ admet au moins un point fixe.

2. Utilisant le théorème de Lagrange et le fait que ϕ est une contraction, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)| &= |\phi'(\theta x + (1 - \theta)y)| |x - y| \\ &\leq K |x - y| \quad \text{pour tout } x, y \in [a, b], \end{aligned}$$

où $0 < K < 1$. Raisonnons alors par l'absurde et supposons qu'il existe deux points fixes distincts $\alpha_1, \alpha_2 \in [a, b]$. On a alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| < K |\alpha_1 - \alpha_2|,$$

ce qui est impossible et montre que le point fixe est unique.

Exemple 10. La fonction ϕ définie par $\phi(x) = \cos x$ admet un point fixe unique α dans $[0, 1]$. En effet, vu que

$$\phi'(x) = -\sin x \leq 0 \quad \text{dans } [0, 1],$$

il vient que ϕ est décroissante et donc

$$\phi(1) \leq \phi(x) \leq \phi(0) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ceci implique en particulier que

$$0 \leq \cos(1) \leq \phi(x) \leq \cos(0) = 1 \quad \forall x \in [0, 1]$$

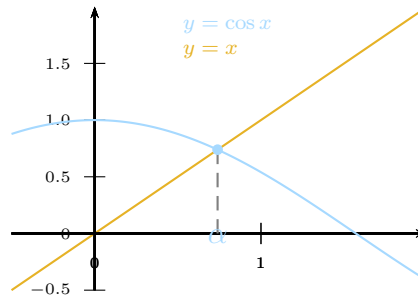
et garantit que l'hypothèse **1.** est vérifiée. De l'autre côté, il est facile de voir que

$$|\phi'(x)| = |-\sin x| = \sin x \leq \sin 1 = K < 1,$$

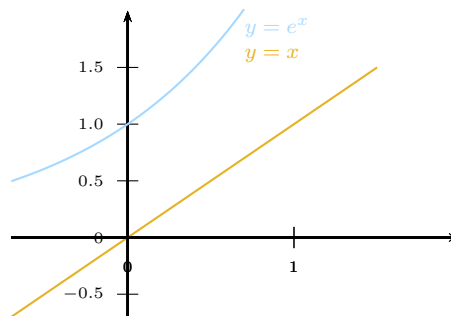
et garantit que l'hypothèse **2.** est aussi vérifiée. D'après le théorème précédent, il existe donc un unique point fixe α .

Comme on peut le voir dans le graphe ci-dessous, ce résultat peut-être confirmé simplement en représentant le graphique de ϕ et vérifiant qu'il

intersecte bien la bissectrice en un unique point (α, α) .



Exemple 11. La fonction ϕ définie par $\phi(x) = e^x$ n'admet aucun point fixe.



1.4.2 Convergence globale de la méthode du point fixe

L'existence et unicité d'un point fixe pour une fonction ϕ n'implique pas nécessairement la convergence de la méthode itérative associée

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (1.3)$$

Cependant, les conditions suffisantes énoncées dans le Théorème 9 et qui ont garanti l'existence et l'unicité du point fixe, sont aussi suffisantes

pour garantir la convergence globale de (1.3). Ceci fait l'objet du résultat suivant.

Théorème 12. *Supposons que ϕ satisfait les hypothèses 1. et 2. du Théorème 9. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par (1.3). Alors pour tout $n \geq 0$, l'erreur $e_n = x_n - \alpha$ satisfait l'estimation suivante*

$$|e_{n+1}| \leq K^{n+1} |e_0|.$$

Par conséquent, $(x_n)_n$ converge vers α et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \phi'(\alpha).$$

Démonstration. Utilisant le théorème de Lagrange, on obtient

$$\begin{aligned} e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha &= \phi(x_n) - \phi(\alpha) \\ &= \phi'(\theta x_n + (1 - \theta)\alpha)(x_n - \alpha) \\ &= \phi'(\theta x_n + (1 - \theta)\alpha) e_n \quad \theta \in]0, 1[, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &= |\phi'(\theta x_n + (1 - \theta)\alpha) e_n| \\ &= |\phi'(\theta x_n + (1 - \theta)\alpha)| |e_n| \\ &\leq K |e_n| \\ &\vdots \\ &\leq K^{n+1} |e_0|. \end{aligned}$$

Prenant en compte le fait que $0 < K < 1$, nous déduisons que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |e_{n+1}| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} K^{n+1} |e_0| = 0,$$

et par conséquent, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |e_{n+1}| = 0.$$

Ainsi, pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge vers α . De manière similaire, vu que

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \phi'(\theta x_{n+1} + (1 - \theta)\alpha)$$

et que ϕ' est une fonction continue, on obtient

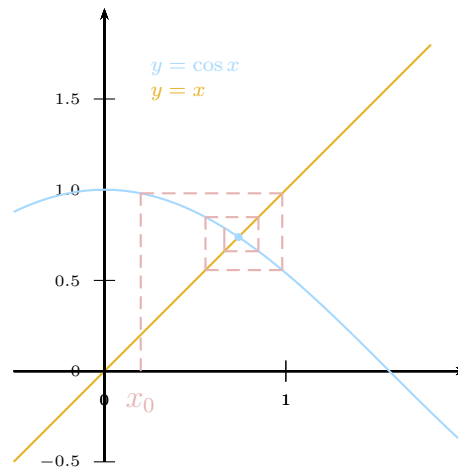
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi'(\theta x_{n+1} + (1 - \theta)\alpha) = \phi'(\alpha).$$

Remarque 13. La convergence énoncée dans le Théorème 12 est globale dans le sens où elle a lieu indépendamment du choix de x_0 dans $[a, b]$.

Exemple 14. Nous cherchons à approcher les zéros de f définie par $f(x) = \cos x - x$.

Solution. Nous avons déjà vérifié dans l'exemple 10 que les hypothèses 1. et 2. sont satisfaites et donc la méthode itérative du point fixe associée converge pour tout $x_0 \in [0, 1]$. Les résultats correspondants à $x_0 = 0.2$ sont présentés ci-dessous.

n	1	2	...	6	...	10	12	...	20
x_n	0.98007	0.55697	...	0.76396	...	0.73198	0.73586	...	0.73895



Convergence de $x_{n+1} = \cos(x_n)$ avec $x_0 = 0.2$

Exemple 15. Nous cherchons à approcher les zéros de f définie par $f(x) = e^{-x} - x$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Solution. Considérons la fonction ϕ définie par $\phi(x) = e^{-x}$ dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$. Une fois que $\phi'(x) = -e^{-x} < 0$, il vient que

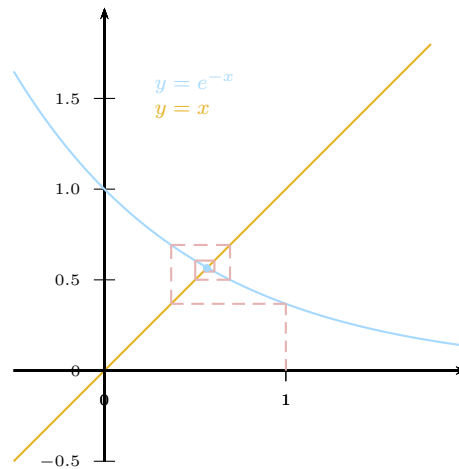
$$\begin{aligned} \phi(1) = \frac{1}{e} &< \phi(x) < \phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} && \text{pour tout } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ \implies \frac{1}{2} &< \phi(x) < 1 && \text{pour tout } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe au moins un point fixe dans $[\frac{1}{2}, 1]$. De l'autre côté, une fois que

$$|\phi'(x)| = e^{-x} \leq \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \quad \text{pour tout } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

nous concluons que le point fixe est unique et que la méthode itérative du point fixe associée converge pour tout $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Les résultats correspondant à $x_0 = 1$ sont présentés dans le tableau suivant.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	0.3679	0.6922	0.5005	0.6062	0.5454	0.5796	0.5601	0.5712



Convergence de $x_{n+1} = e^{-x_n}$ avec $x_0 = 1$

Exemple 16. Nous cherchons à approcher les zéros de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solution. Utilisant des arguments classiques, il est facile de voir que $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_2 = -1$ sont les zéros exacts de f . Pour approcher la racine positive α_1 , remarquons que pour $x \geq 0$, on a

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 2x + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{2x + 3}$$

Considérons la fonction $\phi_1(x) = \sqrt{2x + 3}$ dans l'intervalle $[0, 4]$. Vu que

$$\phi_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0$$

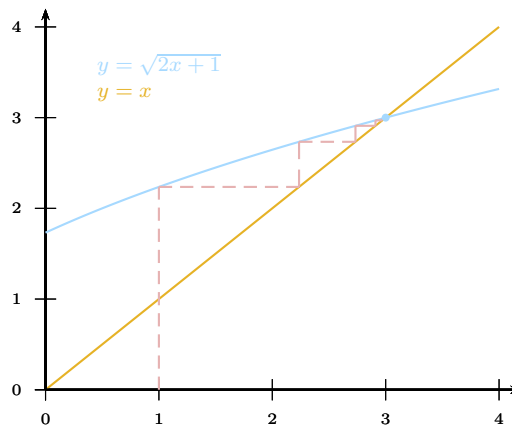
nous déduisons que

$$0 < \phi_1(0) = \sqrt{3} < \phi_1(x) < \phi_1(4) = \sqrt{11} < 4$$

$$|\phi_1'(x)| = \phi_1'(x) \leq \phi_1'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

et donc, la méthode converge vers un point fixe dans $[0, 4]$. Les résultats correspondants à $x_0 = 1$ sont présentés dans ce qui suit

n	1	2	3	4	5	6	9	10
x_n	2.23607	2.73520	2.90982	2.96979	2.98991	2.99664	2.99987	2.99995



Convergence de $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$ avec $x_0 = 1$. On approche $\alpha_1 = 3$

De l'autre côté, et afin d'approcher la racine négative α_2 , remarquons que pour $x \neq 2$, on a

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x - 2) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{3}{x-2}$$

Considérons alors la fonction ϕ_2 définie par $\phi_2(x) = \frac{3}{x-2}$ dans l'intervalle $[-2, 0]$. Vu que

$$\phi_2'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$$

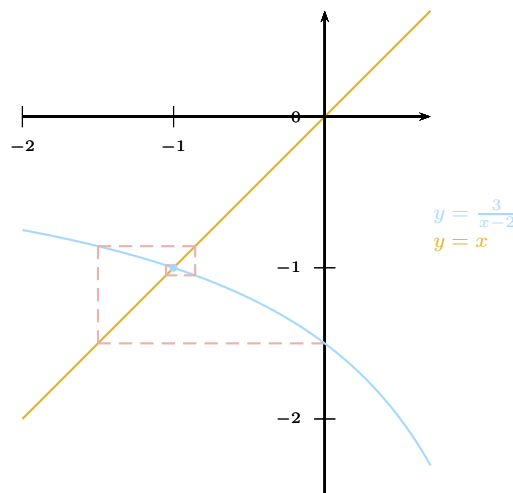
nous déduisons que

$$-2 < \phi_2(0) = -\frac{3}{2} < \phi_2(x) < \phi_2(-2) = -\frac{3}{4} < 0$$

$$|\phi_2'(x)| = -\phi_2'(x) \leq -\phi_2'(-2) = \frac{3}{16} < 1$$

et par conséquent, la méthode converge vers un point fixe dans $[-2, 0]$. Les résultats correspondants à $x_0 = 0$ sont présentés dans ce qui suit

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	-1.5	-0.8571	-1.05	-0.9836	-1.0055	-0.9982	-1.0006	-0.9998



Convergence de $x_{n+1} = \frac{2}{x_n-2}$ avec $x_0 = 0$. Contra-se $\alpha_2 = -1$

1.4.3 Convergence globale d'ordre supérieur

Définition 17. Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels qui converge vers α et soit $e_n = x_n - \alpha$ l'erreur d'approximation à l'itération n .

1. La convergence est linéaire, s'il existe une constante $0 < C < 1$ tel que pour n suffisamment grand on ait

$$|e_{n+1}| \leq C |e_n|.$$

2. La convergence est quadratique, s'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$|e_{n+1}| \leq C |e_n|^2.$$

3. La convergence est d'ordre p , s'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$|e_{n+1}| \leq C |e_n|^p.$$

Théorème 18. Supposons que ϕ satisfait les hypothèses 1. et 2. du Théorème 9. Supposons aussi que $\phi \in C^2([a, b])$ et satisfait

$$\phi'(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \phi''(\alpha) \neq 0.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = \frac{\phi''(\alpha)}{2}.$$

Plus généralement, si $\phi \in C^p([a, b])$ ($p \geq 2$) satisfait

$$\phi'(\alpha) = \phi''(\alpha) = \dots = \phi^{(p-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \phi^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^p} = \frac{\phi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

Démonstration. Utilisant le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on obtient

$$\begin{aligned} e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha &= \phi(x_n) - \phi(\alpha) \\ &= \phi'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}\phi''(\theta x_n + (1-\theta)\alpha)(e_n)^2 \\ &= \frac{1}{2}(e_n)^2\phi''(\theta x_n + (1-\theta)\alpha) \end{aligned}$$

où $\theta \in]0, 1[$. Par conséquent,

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = \frac{1}{2}\phi''(\theta x_n + (1-\theta)\alpha),$$

et vu que ϕ'' est continue, il vient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi''(\theta x_n + (1-\theta)\alpha) = \frac{1}{2}\phi''(\alpha).$$

Exemple 19. Approcher les zéros $x^2 - x$.

Solution. Il est facile de voir $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 1$ sont les racines exactes de $f(x) = 0$. Pour approcher α_1 , remarquons que

$$x^2 - x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x^2$$

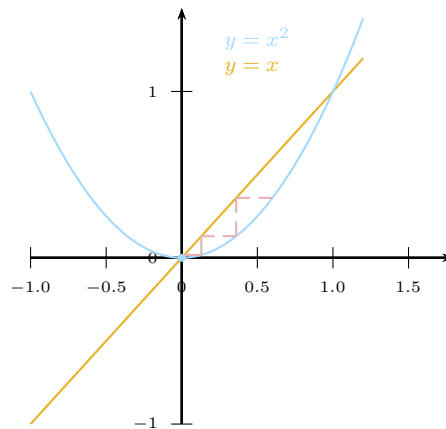
Considérons la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x^2$ dans l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. On a

$$0 \leq \phi(x) \leq \phi\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} < \frac{1}{4}$$

$$|\phi'(x)| = 2|x| \leq \frac{1}{2} < 1,$$

et donc, la méthode converge vers un point fixe dans $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Les résultats correspondants sont présentés dans ce qui suit

n	1	2	3	4	5
x_n	0.36	0.1296	16.8×10^{-3}	2.82×10^{-4}	7.96×10^{-8}
$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2}$	1	1	1	1	1



Convergence quadratique de $x_{n+1} = (x_n)^2$ avec $x_0 = 0.6$

La convergence vers $\alpha_1 = 0$ est quadratique, ce qui est prévisible (cf le Théorème 18) une fois que

$$\phi(\alpha_1) = \phi'(\alpha_1) = 0 \quad \text{et} \quad \phi''(\alpha_1) = 2 \neq 0.$$

Observons aussi que l'itération initiale $x_0 = 0.6$ n'appartient à l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ où ϕ_1 est une contraction. Mais il n'y a pas de contradiction car la condition exigeant que la fonction d'itération soit une contraction est une condition suffisante mais pas nécessaire.

1.4.4 Convergence locale

Définition 20. 1. *Un point fixe α tel que $|\phi'(\alpha)| < 1$ est appelé point fixe attractif. onto fixo atractivo.*

2. *Un point fixe α tel que $|\phi'(\alpha)| > 1$ est appelé point fixe répulsif.*

3. *Un point fixe α tel que $|\phi'(\alpha)| = 1$ est appelé point fixe indifférent.*

Théorème 21. *(Convergence locale - Point fixe attractif) Soit $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe C^1 . Supposons que ϕ admet un point fixe α tel que*

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, la suite $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge vers α et l'erreur $e_n = x_n - \alpha$ satisfait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \phi'(\alpha).$$

Démonstration. Vu que $|\phi'(\alpha)| < 1$ et que ϕ' est continue, il existe une constante $K < 1$ et il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\phi'(x)| < K \quad \forall x \in V_\alpha = [\alpha - \delta, \alpha + \delta].$$

Autrement dit ϕ est une contraction sur V_α . La conclusion est une conséquence du Théorème 9.

Théorème 22. *(Divergence - Point fixe répulsif) Soit $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe C^1 . Supposons que ϕ admet un point fixe α tel que*

$$|\phi'(\alpha)| > 1.$$

Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ ($x_0 \neq \alpha$), la suite $x_{n+1} = \phi(x_n)$ ne converge pas vers α .

Démonstration. Vu que

$$|\phi'(\alpha)| = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left| \frac{\phi(x) - \phi(\alpha)}{x - \alpha} \right| > 1,$$

il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$|\phi(x) - \phi(\alpha)| = |\phi(x) - \alpha| > |x - \alpha| \quad \forall x \in V_\alpha = [\alpha - \delta, \alpha + \delta],$$

et par conséquent, la suite (x_n) est divergente.

Exemple 23. Approcher les zéros de $f(x) = 2x^2 - 1.9x$ en utilisant la méthode du point fixe et étudier sa convergence.

Solution. Il est facile de voir que $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0.95$ sont les racines exactes de $f(x) = 0$. Pour approcher ces racines, remarquons que

$$x^2 - 1.9x = 0 \quad \iff \quad x = x^2 - 0.9x.$$

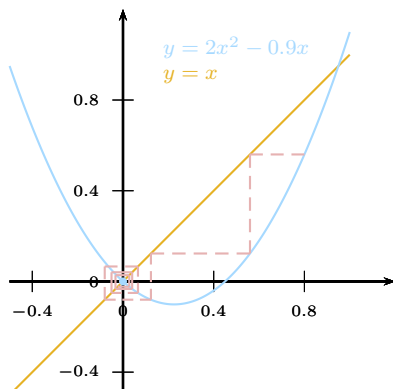
Considérant la fonction $\phi(x) = x^2 - 0.9x$, on peut vérifier que la méthode du point fixe associée converge si x_0 est choisi dans un certain intervalle. Les résultats numériques correspondants à $x_0 = 0.8$ sont présentés dans ce qui suit :

n	1	2	3	4	5	6
x_n	0.56	0.1232	-0.08052	0.08544	-0.0623	0.05599

Remarquons que même si l'itération initiale $x_0 = 0.8$ est "éloignée" de $\alpha_1 = 0$, la méthode itérative converge. Ce résultat est prévisible si on prend en compte le Théorème 21 vu que

$$|\phi'(\alpha_1)| = |4\alpha_1 - 0.9| = 0.9 < 1$$

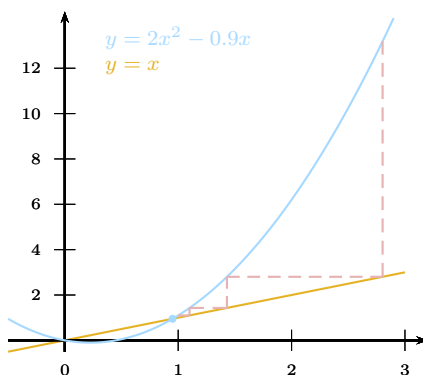
et que le point fixe $\alpha_1 = 0$ est attractif.



Convergence de $x_{n+1} = 2x_n^2 - 0.9x_n$ avec $x_0 = 0.8$

De manière similaire, nous présentons dans ce qui suit les résultats obtenus avec $x_0 = 1$:

n	1	2	3	4
x_n	1.1	1.43	2.8028	13.189



Divergence de $x_{n+1} = 2x_n^2 - 0.9x_n$ avec $x_0 = 1$

Contrairement au premier cas, nous observons que même si l'itération initiale $x_0 = 1$ est suffisamment "proche" de $\alpha_2 = 0.95$, la méthode itérative diverge. Ce résultat était aussi prévisible si on prend en compte le Théorème 22 et le fait que

$$|\phi'(\alpha_2)| = |4\alpha_2 - 0.9| = 2.9 > 1.$$

Le point fixe $\alpha_2 = 0.95$ est répulsif.

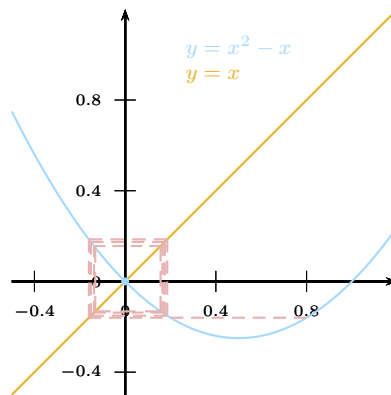
Exemple 24. Approcher les zéros de $f(x) = x^2 - 2x$ en utilisant la méthode du point fixe et étudier sa convergence.

Solution. Il est facile de voir que $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 2$ sont les racines exactes de $f(x) = 0$. Pour approcher α_1 , remarquons que

$$x^2 - 2x = 0 \iff x = x^2 - x.$$

Considérant la fonction d'itération $\phi(x) = x^2 - x$, on peut vérifier que la méthode du point fixe converge pour x_0 choisis dans un certain intervalle. Les résultats numériques correspondant à $x_0 = 0.8$ sont présentés dans ce qui suit :

n	1	2	3	4	5	6
x_n	-0.16	0.1856	-0.1512	0.1740	-0.1437	0.1644



Convergence lente de $x_{n+1} = 2x_n^2 - x_n$ avec $x_0 = 0.8$

La méthode itérative converge certes, mais très lentement. Ce résultat était prévisible vu que

$$|\phi'(\alpha_1)| = |4\alpha_1 - 1| = 1$$

et que le point fixe $\alpha_1 = 0$ est indifférent.

1.5 Méthode de Newton

Soit $f \in C^1([a, b])$ et soit $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. La méthode de Newton peut-être considérée comme un cas particulier de la méthode du point fixe, où il est possible d'obtenir une convergence quadratique. Soit ϕ_N la fonction définie par

$$\phi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \text{pour } x \text{ tel que } f'(x) \neq 0. \quad (1.4)$$

Il est facile de vérifier que si $f'(\alpha) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \phi_N(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha \\ &\iff \alpha \text{ ponto fixo de } \phi_N \end{aligned}$$

La méthode de Newton se résume alors au schéma itératif suivant

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

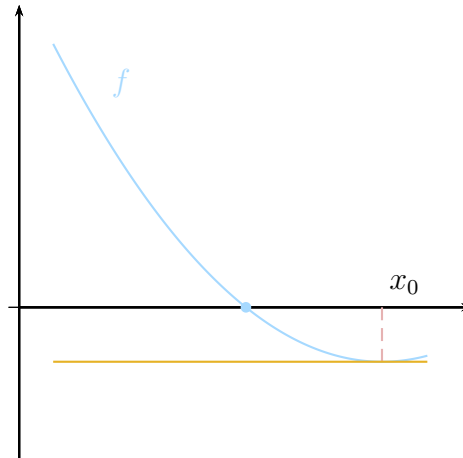


Géométriquement, x_{n+1} est défini comme le point d'intersection de l'axe des abscisses (Ox) et de la droite définie par

$$y(x) = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n),$$

qui passe par le point $(x_n, f(x_n))$ avec une pente égale à $f'(x_n)$.

La convergence de la méthode dépend des propriétés de la fonction et du choix de l'itération initiale x_0 . Il est clair que nous ne pouvons pas avoir d'itération x_n où $f'(x_n) = 0$ car, dans ce cas, nous aurons une tangente parallèle à l'axe des abscisses (Ox) et qui ne pourra jamais l'intersecter (Cf. la figure suivante).



1.5.1 Convergence globale

En général, et comme toute méthode du type point fixe, la méthode de Newton ne converge pas pour n'importe quel choix de l'itération initiale x_0 , mais seulement pour des valeurs de x_0 "suffisamment" proches de α . Cependant, la convergence globale ($x_0 \in [a, b]$ quel que soit) est garantie pour des fonctions f possédant une certaine forme de concavité.

Théorème 25. Soit $f \in C^2([a, b])$ tel que

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$
3. $f''(x) > 0$ ou $f''(x) < 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Alors, pour tout $x_0 \in [a, b]$ tel que

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

la suite de Newton converge vers le zéro α de f dans $[a, b]$.

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$\begin{aligned} f(a) &< 0 \\ f(b) &> 0 \\ f'(x) &> 0 \quad \text{para quelque } x \in [a, b] \\ f''(x) &> 0 \quad \text{para quelque } x \in [a, b]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si x_0 satisfait $f(x_0)f''(x_0) > 0$ alors $f(x_0) > 0$ et, vu que f est croissante, nous déduisons que

$$x_0 > \alpha, \tag{1.6}$$

où α est l'unique zéro de f . Il vient alors que

$$\begin{aligned} f(x_0) > f(\alpha) = 0 &\implies \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > 0 \\ &\implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

De l'autre côté, appliquant le théorème de Taylor-Lagrange autour de x_0 , on obtient

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{1}{2}f''(\zeta_0)(\alpha - x_0)^2 \\ \iff 0 &= f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{1}{2}f''(\zeta_0)(\alpha - x_0)^2 \\ \iff f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) &= -\frac{1}{2}f''(\zeta_0)(\alpha - x_0)^2 \end{aligned}$$

et vu que $f'' > 0$, nous concluons que

$$f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) < 0.$$

Divisant cette expression par $f'(x_0) > 0$, il vient que

$$\begin{aligned} \alpha - x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < 0 &\iff \alpha - x_1 < 0 \\ &\iff x_1 < \alpha. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Prenant en compte (1.6), (1.8), (1.7) et reproduisant les mêmes arguments à l'ordre n et $n + 1$, nous obtenons que

$$\alpha < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0.$$

La suite est donc décroissante et minorée, elle converge vers une limite β . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) &\iff \beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \\ &\iff f(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit β est un zéro de f . Ce dernier étant unique, nous déduisons que $\beta = \alpha$.

Théorème 26. *Supposons que $f \in C^2([a, b])$ satisfait les hypothèses 1., 2. et 3. du Théorème 25. Si f satisfait*

$$4. \quad \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a \quad \text{et} \quad \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a,$$

alors pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite de Newton converge vers α , le zéro de f dans $[a, b]$.

Démonstration. Pour simplifier, supposons que les conditions données dans (1.5) sont satisfaites. Si $x_0 \in]\alpha, b]$, alors $f(x_0) > f(\alpha) = 0$ et nous sommes dans les conditions du Théorème 25. Si $x_0 \in [a, \alpha[$, on considère la fonction d'itération ϕ_N définie par (1.4). Il est facile de voir que

$$\phi'_N(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

et vu que $f(x) < f(\alpha) = 0$ pour tout $x \in [a, \alpha]$ et que $f''(x) > 0$, nous concluons que

$$\phi'_N(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, \alpha].$$

Par conséquent, la fonction ϕ_N est décroissante dans cet intervalle et

$$\phi_N(\alpha) < \phi_N(x_0) = x_1 < \phi_N(a) \iff \alpha < x_1 \leq \phi_N(a).$$

Or, en prenant en compte 4., nous avons

$$\phi_N(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} < a + (b - a) = b.$$

Ceci implique que x_1 appartient à l'intervalle $]\alpha, b[$ et satisfait donc $f(x_1) > f(\alpha) = 0$, ce qui donne

$$f(x_1)f''(x_1) > 0.$$

La conclusion est alors une conséquence du Théorème 25.

1.5.2 Formule d'erreur pour la méthode de Newton

Soit $f \in C^2([a, b])$. Appliquant le théorème de Taylor-Lagrange autour de x_n , il existe ζ_n dans le voisinage de x_n tel que

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(\zeta_n)(\alpha - x_n)^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(\zeta_n)(\alpha - x_n)^2. \end{aligned}$$

Divisant par $f'(x_n)$, il vient que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \alpha - x_n + \frac{1}{2} \frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)} (\alpha - x_n)^2 \\ &= \alpha - x_{n+1} + \frac{1}{2} \frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)} (\alpha - x_n)^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbf{e}_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2} \frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)} (\alpha - x_n)^2 = \frac{1}{2} \frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)} (\mathbf{e}_n)^2,$$

et donc

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_{n+1}| &= \left| -\frac{1}{2} \frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)} (\mathbf{e}_n)^2 \right| \\ &= \frac{1}{2} \frac{|f''(\zeta_n)|}{|f'(x_n)|} (\mathbf{e}_n)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{|f'(x_n)|} (\mathbf{e}_n)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{\min_{x \in [a, b]} |f'(x)|} (\mathbf{e}_n)^2 \end{aligned}$$

1.5.3 Zéro simple : convergence locale quadratique

Comme déjà indiqué dans la section 1.5.1, la méthode de Newton est généralement sensible au choix de x_0 , celui-ci devant appartenir à un voisinage de α . Cette exigence peut paraître paradoxale vu que, précisément, la valeur de α est ce que nous cherchons. Mais dans la pratique, une itération initiale convenable peut-être obtenue en utilisant quelques itérations de la méthode de la bisection (Cf. travaux pratiques).

Dans le résultat suivant, nous montrons que si x_0 est choisi de manière approprié, et si α est un zéro simple, alors la convergence de la méthode

de Newton est garantie et est quadratique.

Théorème 27. *Supposons que $f \in C^2([a, b])$ admet un zéro α tel que $f'(\alpha) \neq 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que para $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, la suite de Newton*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge vers α . La convergence est d'ordre 2 et l'erreur $e_n = x_n - \alpha$ satisfait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Démonstration. Vu que

$$\phi'_N(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0,$$

nous déduisons que α est un point fixe attractif pour ϕ_N . Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, la suite

$$x_{n+1} = \phi_N(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge vers α . Utilisant des arguments similaires à ceux de la section précédente, nous pouvons montrer que

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)} (e_n)^2,$$

où $\zeta_n \in]x_n, \alpha[$. Ainsi

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Exemple 28. Approcher le zéro de la fonction f définie par $f(x) = e^{-x} - x$ dans $[0, 1]$ en utilisant la méthode de Newton.

Solution. Comme on peut le voir dans le tableau ci-dessous, la méthode itérative définie par

$$\begin{cases} x_0 = 0.5 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1} = \frac{(x_n + 1)e^{-x_n}}{e^{-x_n} + 1} \end{cases}$$

converge en 3 itérations et est beaucoup plus rapide que la méthode du point fixe considérée pour le même problème. (Cf. les travaux pratiques pour d'autres exemples.)

n	1	2	3	4
x_n	0.56631111218	0.5671433029	0.5671434285	0.5671434285

1.5.4 Zéro multiple : convergence locale linéaire

Définition 29. Une fonction continue f possède un zéro α de multiplicité $m \geq 2$, s'il existe une fonction h continue tel que se existir uma função h contínua tal que

$$h(\alpha) \neq 0 \quad \text{e} \quad f(x) = (x - \alpha)^m h(x)$$

Comme conséquence de cette définition, on peut voir que si h est de classe C^m dans le voisinage de α , alors

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0. \quad (1.9)$$

Let fait que $f'(\alpha) = 0$ pose quelques doutes relatifs à l'applicabilité de la méthode de Newton. Cependant, le résultat suivant montre que la méthode converge, mais plus lentement (convergence linéaire).

Théorème 30. Supposons que $f \in C^m([a, b])$ admet un zéro α de multiplicité $m \geq 2$, i.e. un zéro tel que la condition (1.9) soit satisfaite. Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, la suite de Newton converge vers α . La convergence est d'ordre 1 et l'erreur $e_n = x_n - \alpha$ satisfait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \frac{1}{m}.$$

Démonstration. Vu que α est de multiplicité $m \geq 2$, il existe $h \in C^2([a, b])$ tel que

$$f(x) = (x - \alpha)^m h(x) \quad \text{avec } h(\alpha) \neq 0,$$

et donc

$$\phi_N(x) = x - \frac{(x-\alpha)h(x)}{mh(x)+(x-\alpha)h'(x)}.$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \phi'_N(x) &= 1 - \frac{(h(x)+(x-\alpha)h'(x))(mh(x)+(x-\alpha)h'(x))}{(mh(x)+(x-\alpha)h'(x))^2} \\ &\quad + \frac{(x-\alpha)h(x)(mh(x)+(x-\alpha)h'(x))'}{(mh(x)+(x-\alpha)h'(x))^2} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\phi'_N(\alpha) = 1 - \frac{m(h(\alpha))^2}{(mh(\alpha))^2} = 1 - \frac{1}{m} < 1.$$

Ceci implique la convergence de $(x_n)_n$ avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \phi'_N(\alpha) = 1 - \frac{1}{m}.$$

1.5.5 Zéro multiple : Newton modifié et convergence quadratique

Comme indiqué dans la section précédente, la convergence dans le cas d'un zéro multiple n'est pas quadratique mais linéaire. Cependant, une petite modification dans le schéma de la méthode de Newton permet d'obtenir une convergence d'ordre 2. (Cf. travaux dirigés et travaux pratiques pour plus d'exemples.)

Théorème 31. *Supposons que $f \in C^2([a, b])$ admet un zéro α de multiplicité $m \geq 2$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, la suite de Newton modifiée définie par*

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, \dots$$

converge de manière quadratique vers α .

Démonstration. Soit $h \in C^2([a, b])$ tel que

$$f(x) = (x - \alpha)^m h(x) \quad \text{avec } h(\alpha) \neq 0$$

et soit

$$\begin{aligned} \phi_{NM}(x) &= x - m \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{m(x-\alpha)^m h(x)}{(x-\alpha)^{m-1}(mh(x) + (x-\alpha)h'(x))} \\ &= x - \frac{m(x-\alpha)h(x)}{mh(x) + (x-\alpha)h'(x)}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\phi'_{NM}(\alpha) = 1 - \frac{m(h(\alpha))^2}{m(h(\alpha))} = 0,$$

ce qui implique la convergence quadratique de $(x_n)_n$ avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{1}{2} \phi''_{NM}(\alpha) = \frac{h'(\alpha)}{mh(\alpha)}.$$

Exemple 32. Approcher le zéro de la fonction f définie par $f(x) = e^x - x - 1$ dans $[-1, 1]$ utilisant la méthode de de Newton et la méthode de Newton modifiée.

Solution. Il est facile de vérifier que $\alpha = 0$ est un zéro de f . Comme on peut le voir dans le tableau suivant, la méthode itérative définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n - 1}{e^{x_n} - 1} = x_n - 1 + \frac{x_n}{e^{x_n} - 1}, \end{cases}$$

converge vers $\alpha = 0$ et la convergence est linéaire.

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	0.58198	5	0.04380	9	2.7750×10^{-3}	13	1.7416×10^{-4}
2	0.31906	6	0.02206	10	1.3881×10^{-3}	14	8.8041×10^{-5}
3	0.16800	7	0.01107	11	6.9411×10^{-4}	15	4.2610×10^{-5}
4	0.08635	8	0.00555	12	3.4703×10^{-4}	16	1.9142×10^{-6}

Convergence de la méthode de Newton pour $f(x) = e^x - x - 1$ avec $x_0 = 1$

n	$\frac{e_{n+1}}{e_n}$	n	$\frac{e_{n+1}}{e_n}$	n	$\frac{e_{n+1}}{e_n}$	n	$\frac{e_{n+1}}{e_n}$
1	0.58	5	0.51	9	0.5	13	0.5
2	0.55	6	0.51	10	0.5	14	0.5
3	0.53	7	0.5	11	0.5	15	0.48
4	0.51	8	0.5	12	0.5	16	0.045

Ordre de convergence de la méthode de Newton

Ce résultat est prévisible vu que $f'(0) = 0$, i.e. $\alpha = 0$ é de multiplicité 2. Considérant alors la méthode de Newton modifiée définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - 2 \frac{e^{x_n} - x_n - 1}{e^{x_n} - 1} = x_n - 2 + 2 \frac{x_n}{e^{x_n} - 1} \end{cases}$$

on peut garantir la convergence en à peine 4 iterations.

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	0.16305	2	0.00448	3	4.6904×10^{-6}	4	1.3453×10^{-6}

Méthode de Newton modifiée pour $f(x) = e^x - x - 1$ avec $x_0 = 1$

Chapitre 2

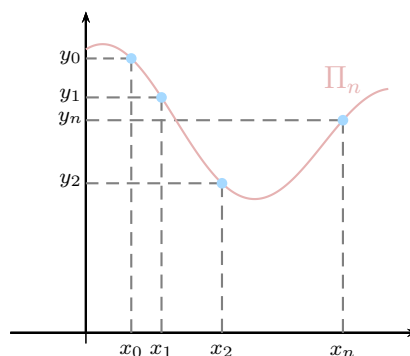
Interpolation et approximation polynomiale

2.1 Position du problème

Il existe plusieurs raisons qui peuvent nous amener à vouloir approcher une fonction f par une autre fonction \tilde{f} : son expression peut-être compliquée, elle peut ne pas avoir de bonnes propriétés de régularité, elle peut-être définie partiellement (par exemple à travers certains points sélectionnés), etc. Considérons le tableau suivant

x_0	x_1	x_2	\cdots	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	\cdots	y_{n-1}	y_n

où x_0, x_1, \dots, x_n sont distincts.



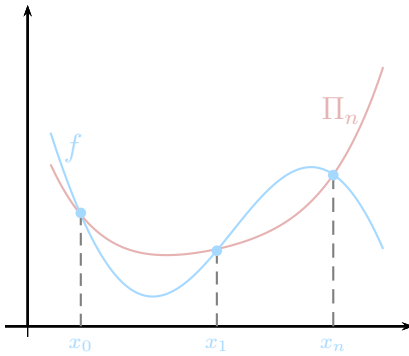
Exemple d'un polynôme d'interpolation de degré 3

Il paraît naturel d'exiger que \tilde{f} satisfasse

$$\tilde{f}(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Une telle fonction s'appelle fonction d'interpolation aux points x_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Plusieurs classes de fonctions d'interpolation peuvent être considérées. Dans ce chapitre, nous nous restreignons aux polynômes d'interpolation. Donc, considérant le tableau précédent, nous cherchons un polynôme Π_n de degré n tel que

$$\Pi_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$



Exemple d'interpolation d'une fonction continue

Écrivant $\Pi_n x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, et prenant en compte la condition, on obtient le système

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

et de manière équivalente, on a le système matriciel suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

où la matrice est connue comme la matrice de Vandermonde. L'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation est équivalente à assurer que le système est possible et déterminé pour x_0, x_1, \dots, x_n distincts.

2.2 Interpolation de Lagrange

2.2.1 Base de Lagrange

Soit $P_n[x]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Considérez les polynômes $\varphi_k \in P_n[x]$, $k = 0, 1, \dots, n$, définis par

$$\varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{cases} \varphi_k(x_k) = 1, \\ \varphi_k(x_i) = 0 \end{cases} \quad \text{se } i \neq k.$$

Autrement dit

$$\varphi_k(x_i) = \delta_{ik},$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker.

Théorème 33. Soient x_0, x_1, \dots, x_n , $n+1$ points distincts. Alors la famille $(\varphi_k)_{k=0,1,\dots,n}$ est une base de $P_n[x]$ et tout $P_n \in P_n[x]$ s'écrit sous la forme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n P_n(x_k) \varphi_k(x).$$

Démonstration. Supposons que

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Choisissant $x = x_i$, $i = 0, \dots, n$, on obtient

$$0 = \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(x_i) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \delta_{ik} = \alpha_i$$

prouvant ainsi que la famille $(\varphi_k)_{k=0,1,\dots,n}$ est linéairement indépendante. De l'autre côté, soit $P_n \in P_n[x]$ et soit Q_n le polynôme défini par

$$Q_n = \sum_{k=0}^n P_n(x_k) \varphi_k.$$

Il est clair que $Q_n \in P_n[x]$ et que

$$(P_n - Q_n)(x_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Le polynôme $P_n - Q_n$ admet donc $(n + 1)$ racines et est de degré inférieur ou égal à n . Il est donc nécessairement identiquement nul, i.e. $Q_n \equiv P_n$. Autrement dit

$$P_n = \sum_{k=0}^n P_n(x_k) \varphi_k,$$

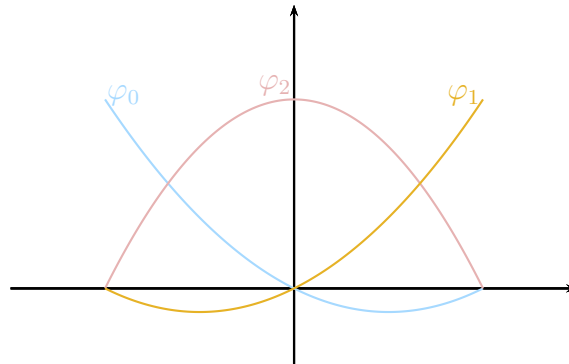
montrant ainsi que $(\varphi_k)_{k=0,1,\dots,n}$ est une famille génératrice de $P_n[x]$.

Exemple 34. Pour $n = 1$, $x_0 = -1$ et $x_1 = 1$, les polynômes de la base Lagrange sont donnés par

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = -\frac{1}{2}(x-1), \\ \varphi_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{1}{2}(x+1). \end{cases}$$

Exemple 35. Pour $n = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, les polynômes de la base Lagrange sont donnés par

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{2}x(x-1) \\ \varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -(x+1)(x-1) \\ \varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{2}x(x+1) \end{cases}$$



Base de Lagrange para $n = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$

2.2.2 Existence et unicité du polynôme d'interpolation

Le polynôme d'interpolation peut-être facilement décrit une fois la base $(\varphi_k)_k$ correspondante connue. Ce polynôme, appelé polynôme d'interpolation de Lagrange, est défini dans ce qui suit.

Théorème 36. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n, n + 1$ points distincts et soient y_0, y_1, \dots, y_n , les valeurs associées. Le polynôme $\Pi_n \in P_n[x]$ défini par

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \varphi_k(x),$$

est l'unique polynôme d'interpolation aux points $x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Démonstration. Il est facile de vérifier que pour tout $i = 0, 1, \dots, n$, on a

$$\Pi_n(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k \varphi_k(x_i) = y_i \varphi(x_i) = y_i,$$

ce qui prouve que Π_n est un polynôme d'interpolation aux points x_i . Pour établir l'unicité, supposons qu'il existe un polynôme $Q_n \in P_n[x]$ tel que $Q_n(x_i) = y_i$. Alors $\Pi_n - Q_n \in P_n[x]$ satisfait

$$(\Pi_n - Q_n)(x_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ainsi, $\Pi_n - Q_n$ admet $(n + 1)$ racines et est de degré inférieur ou égal à n . Il est donc nécessairement identiquement nul, i.e. $Q_n \equiv \Pi_n$.

Exemple 37. Considère la fonction $f(x) = \sin x$ dans $[0, 3\pi]$.

1. Degré $n = 1$ avec $x_0 = 0$ et $x_1 = 3\pi$. On a

$$f(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x_1) = 0.$$

Le polynôme d'interpolation de f aux points x_0 et x_1 est donné par

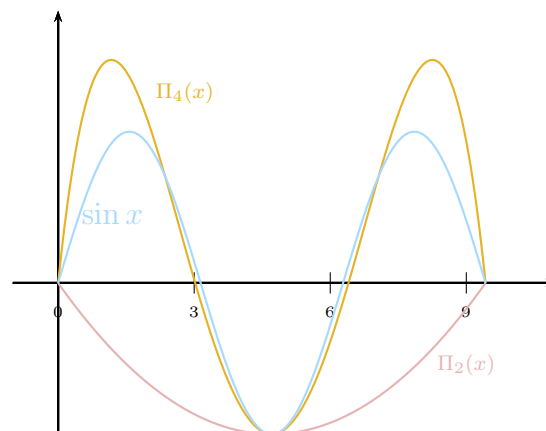
$$\Pi_1(x) = f(x_0) \times \varphi_0(x) + f(x_1) \varphi_1(x) = 0.$$

2. Degré $n = 2$ avec $x_0 = 0, x_1 = \frac{3\pi}{2}$ et $x_2 = 3\pi$. On a

$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = -1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = 0.$$

Le polynôme d'interpolation de f aux points x_0, x_1 et x_2 est donné par

$$\begin{aligned}\Pi_2(x) &= f(x_0) \times \varphi_0(x) + f(x_1)\varphi_1(x) + f(x_2)\varphi_2(x) \\ &= f(x_1)\varphi_1(x) = -\varphi_1(x) \\ &= -\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{4}{9\pi^2}x(x-3\pi)\end{aligned}$$



Interpolation de $f(x) = \sin x$ dans $[0, 3\pi]$

2.3 Formule d'itération de Newton

Il s'agit d'une formule alternative pour le calcul du polynôme d'interpolation, basée sur une construction successive à partir des polynômes de degrés inférieurs.

2.3.1 Différences divisées

Commençons par introduire la notion de différence divisée.

Définition 38. Le coefficient de x^n dans le polynôme de Lagrange Π_n est noté

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

et s'appelle différence divisée d'ordre n des données $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$.

Vu que

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i},$$

on a

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)}$$

Proposition 39. Soit Π_n le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par

$$\Pi_n(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

et soit Π_{n+1} le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par

$$\Pi_{n+1}(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n, n+1.$$

Alors

$$\Pi_{n+1}(x) = \Pi_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Démonstration. Soit Q_{n+1} le polynôme défini par

$$Q_{n+1}(x) = \Pi_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Pour tout x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, on a

$$(Q_{n+1} - \Pi_{n+1})(x_i) = \Pi_n(x_i) - \Pi_{n+1}(x_i) = y_i - y_i = 0.$$

De l'autre côté, les polynômes Q_{n+1} et Π_{n+1} ont le même coefficient de degré supérieur. Ainsi

$$Q_{n+1} - \Pi_{n+1} \text{ est de degré } n \text{ et possède } n + 1 \text{ zéros}$$

et donc

$$Q_{n+1} = \Pi_{n+1}.$$

Conséquence.

$$\Pi_0(x) = y_0$$

$$\begin{aligned}\Pi_1(x) &= \Pi_0(x) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &= y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_2(x) &= \Pi_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)\end{aligned}$$

Par récurrence, nous déduisons la forme de Newton avec des différences divisées pour le polynôme d'interpolation

$$\begin{aligned}\Pi_n(x) &= y_0 \\ &\quad + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).\end{aligned}$$

2.3.2 Calcul effectif des différences divisées

On peut prouver qu'une différence d'ordre n est liée avec deux différences d'ordre $(n - 1)$ de la manière suivante

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Se basant sur ce résultat, on utilise en pratique le tableau des différences divisées

x_0	$y_0 = f[x_0]$			
x_1	$y_1 = f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$y_2 = f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$y_3 = f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

TABLE 2.1 – Organisation des différences divisées de Newton

Exemple 40. Considère la fonction f définie par $f(x) = \sin(\pi x)$ dans $[-1, 1]$ et soit Π_4 le polynôme d'interpolation de degré 4 aux points $x_i = -1 + \frac{i}{2}$, $i = 0, 1, \dots, 4$.

Le tableau des des différences divisées est donné par

-1	0				
-0.5	-1	$\frac{-1-0}{-0.5-(-1)} = -2$			
0	0	$\frac{0-(-1)}{0-(-0.5)} = 2$	$\frac{2-(-2)}{0-(-1)} = 4$		
0.5	1	$\frac{1-0}{0.5-0} = 2$	$\frac{2-2}{0.5-(-0.5)} = 0$	$\frac{0-4}{0.5-(-1)} = -\frac{8}{3}$	
1	0	$\frac{0-1}{1-0.5} = -2$	$\frac{-2-2}{1-0} = -4$	$\frac{-4-0}{1-(-0.5)} = -\frac{8}{3}$	0

Le polynôme d'interpolation correspondant est alors donné par

$$\begin{aligned} \Pi_4(x) &= 0 - 2(x+1) + 4(x+1)(x+0.5) - \frac{8}{3}(x+1)(x+0.5)x \\ &\quad + 0(x+1)(x+0.5)x(x-0.5) \\ &= -2(x+1) + 4(x+1)(x+0.5) - \frac{8}{3}(x+1)(x+0.5)x \end{aligned}$$

2.3.3 Cas des points équidistants : différences finies

Considère la suite de données $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$. On définit l'opérateur Δy_i

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

et, de manière récursive, l'opérateur d'ordre supérieur $\Delta^k y_i$

$$\Delta^k y_i = \Delta(\Delta^{k-1} y_i) \quad k = 2, \dots$$

La forme d'interpolation de Newton avec des différences divisées est valable dans le cas d'une distribution quelconque de points. Si la distribution est uniforme de pas h , on peut prouver que

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{1}{n! h^n} \Delta^n y_0.$$

Par conséquent, on obtient la forme de Newton avec des différences finies pour le polynôme d'interpolation

$$\begin{aligned}\Pi_n(x) &= y_0 \\ &+ \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) \\ &+ \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) \\ &+ \dots \\ &+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\end{aligned}$$

2.3.4 Calcul effectif des différences finies

Dans la pratique, on utilise le tableau des différences finies

x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_0			
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$		
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$

TABLE 2.2 – Organisation des différences finies de Newton

Exemple 41. Considère la fonction f définie par $f(x) = \sin(\pi x)$ dans $[-1, 1]$ et soit Π_4 le polynôme d'interpolation de degré 4 aux points $x_i = -1 + \frac{i}{2}$, $i = 0, 1, \dots, 4$.

Le tableau des des différences finies est donné par
Le polynôme d'interpolation correspondant est alors donné par

$$\begin{aligned}\Pi_4(x) &= 0 - \frac{1}{1!(0.5)}(x + 1) + \frac{2}{2!(0.5)^2}(x + 1)(x + 0.5) \\ &\quad - \frac{2}{3!(0.5)^3}(x + 1)(x + 0.5)x + \frac{0}{4!(0.5)^4}(x + 1)(x + 0.5)x(x - 0.5) \\ &= -2(x + 1) + 4(x + 1)(x + 0.5) - \frac{8}{3}(x + 1)(x + 0.5)x.\end{aligned}$$

-1	0				
-0.5	-1	$-1 - 0 = -1$			
0	0	$0 - (-1) = 1$	$1 - (-1) = 2$		
0.5	1	$1 - 0 = 1$	$1 - 1 = 0$	$0 - 2 = -2$	
1	0	$0 - 1 = -1$	$-1 - 1 = -2$	$-2 - 0 = -2$	0

2.4 Erreur d'interpolation

2.4.1 Erreur d'interpolation d'une fonction régulière

Théorème 42. Soit $f \in C^{n+1}([a, b])$ et soit Π_n le polynôme d'interpolation de f aux points x_0, x_1, \dots, x_n . Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\zeta(x) \in [a, b]$ tel que l'erreur d'interpolation $f - \Pi_n$ satisfait

$$f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Démonstration. 1. Si $x = x_i, i = 0, 1, \dots, n$, alors le résultat est toujours vrai.

2. Si $x \neq x_i$, on considère la fonction

$$F(t) = f(t) - \Pi_n(t) - \frac{f(x) - \Pi_n(x)}{\omega_n(x)} \omega_n(t),$$

où

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Il est facile de voir que

$$F(x) = 0 \quad \text{e} \quad F(x_i) = 0 \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, n$$

et donc

$$F \text{ possède au moins } n + 2 \text{ zéros dans } [a, b].$$

Appliquant le théorème de Rolle, il vient que

F' possède au moins $n + 1$ zéros dans $[a, b]$

F'' possède au moins n zéros dans $[a, b]$

\vdots

$F^{(n+1)}$ possède au moins 1 zéros dans $[a, b]$.

Il existe alors $\zeta \in]a, b[$ tel que

$$F^{(n+1)}(\zeta) = 0.$$

Vu que

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - \Pi_n^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - \Pi_n(x)}{\omega_n(x)} (\omega_n(t))^{(n+1)} \\ &= f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - \Pi_n(x)}{\omega_n(x)} (n+1)!, \end{aligned}$$

nous concluons que

$$f^{(n+1)}(\zeta) - \frac{f(x) - \Pi_n(x)}{\omega_n(x)} (n+1)! = 0.$$

Autrement dit

$$f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \omega_n(x).$$

2.4.2 Erreur d'interpolation : cas d'une distribution uniforme de points

Théorème 43. Soit $f \in C^{n+1}([a, b])$ et soit Π_n le polynôme d'interpolation f aux points équidistants $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ définis par

$$x_i = a + i h \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

L'erreur d'interpolation $f - \Pi_n$ satisfait

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \Pi_n(x)| \leq \max_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}.$$

Démonstration. Du théorème précédent, nous savons que pour tout

$x \in [a, b]$ il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que

$$\begin{aligned} |f(x) - \Pi_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \\ &= \frac{|f^{(n+1)}(\zeta)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \\ &\leq \frac{\max_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|. \end{aligned}$$

Il nous manque d'estimer $\left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$. Vu que $x \in]x_0, x_n[$, il existe un intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ tel que $x \in]x_i, x_{i+1}[$. Supposons pour simplifier que $x \in]x_0, x_1[$. Alors

$$|x - x_2| \leq |x - x_1| + |x_1 - x_2| \leq 2h$$

$$|x - x_3| \leq |x - x_2| + |x_2 - x_3| \leq 3h$$

...

$$|x - x_n| \leq |x - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_n| \leq nh,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| &= |(x - x_0)(x - x_1)| \prod_{i=2}^n |x - x_i| \\ &\leq |(x - x_0)(x - x_1)| (2h)(3h) \cdots (nh) \\ &= (x - x_0)(x_1 - x) n! h^{n-1}. \end{aligned}$$

Dans l'intervalle $[x_0, x_1]$, la fonction $(x - x_0)(x_1 - x)$ atteint son maximum au point $x^* = \frac{x_0 + x_1}{2}$ et donc

$$\begin{aligned} (x - x_0)(x_1 - x) &\leq (x^* - x_0)(x_1 - x^*) \\ &= \frac{1}{4}(x_1 - x_0)^2 = \frac{h^2}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq \left(\frac{h^2}{4} \right) (n! h^{n-1}) = \frac{h^{n+1}}{4} n!,$$

et

$$\begin{aligned} |f(x) - \Pi_n(x)| &\leq \frac{\max_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \\ &\leq \frac{\max_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|}{4^{(n+1)}} h^{n+1} \end{aligned}$$

Remarque 44. *Ce résultat est intéressant si la quantité*

$$E_n = \frac{\max_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|}{4^{(n+1)}} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Il est suffisant, par exemple, qu'il existe $M > 0$ indépendant de n tel que

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq M.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = 0,$$

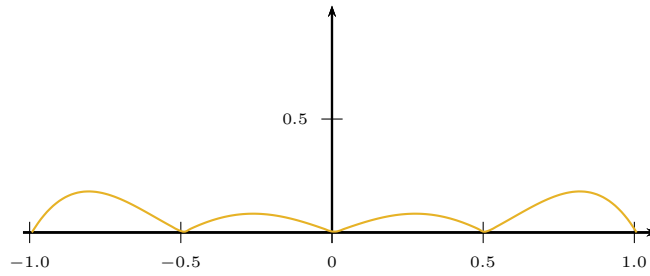
ce qui garantit la convergence de la méthode pour un nombre de points d'interpolation suffisamment élevé.

Exemple 45. Considérez la fonction f définie par $f(x) = \sin(\pi x)$ dans $[-1, 1]$ et soit Π_n le polynôme d'interpolation de degré n aux points équidistants $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Vu que

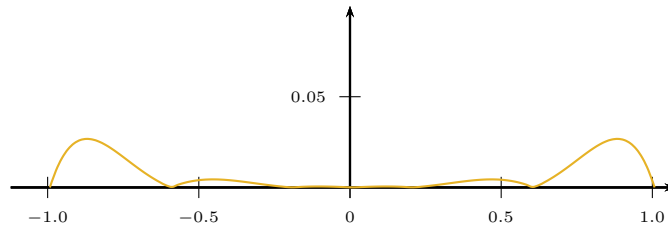
$$|f^{(n+1)}(x)| \leq \pi^{n+1} \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1]$$

il vient que l'erreur d'interpolation satisfait

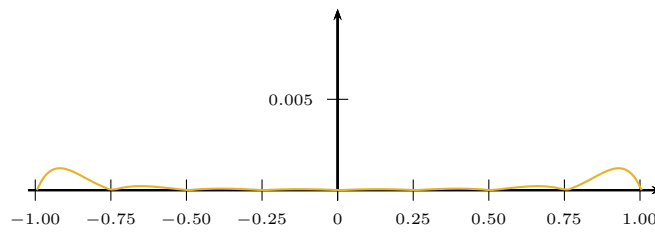
$$\begin{aligned} \max_{x \in [-1,1]} |\sin(\pi x) - \Pi_n(x)| &\leq \frac{\pi^{n+1}}{4^{(n+1)}} \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{4^{(n+1)}} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{n+1} \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$



(a) Fonction d'erreur $E_4(x) = |\sin(\pi x) - \Pi_4(x)|$



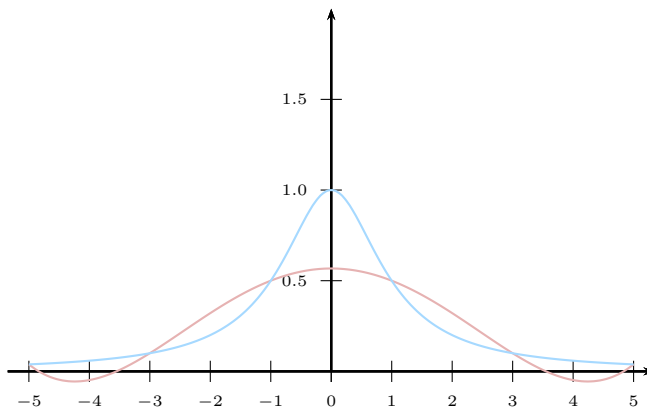
(b) Fonction d'erreur $E_5(x) = |\sin(\pi x) - \Pi_5(x)|$



(c) Fonction d'erreur $E_8(x) = |\sin(\pi x) - \Pi_8(x)|$

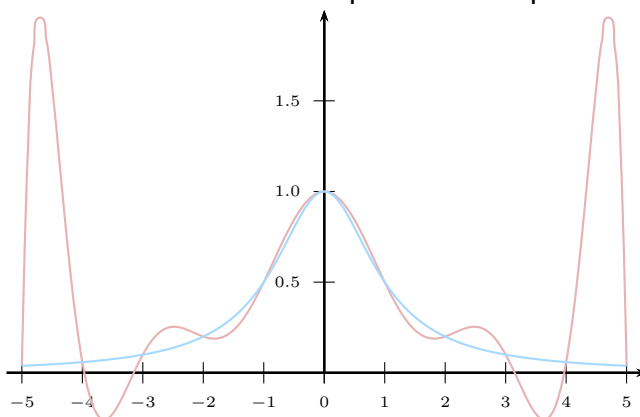
2.5 Phénomène de Runge

Considère la fonction de Runge définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dans $[-5, 5]$ et soit Π_n le polynôme d'interpolation de f aux points équidistants $x_i = -5 + \frac{10i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

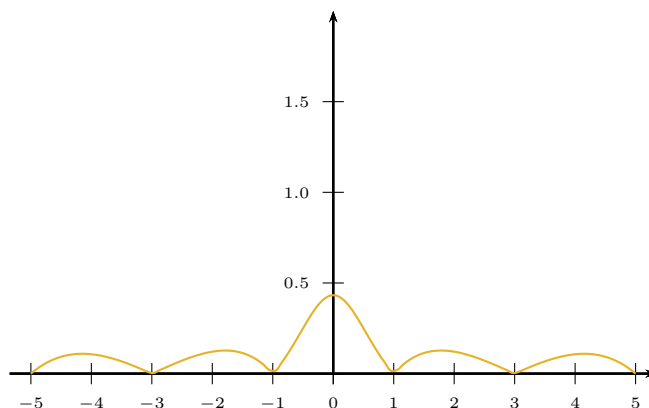


Interpolation de la fonction de Runge avec 6 points équidistants

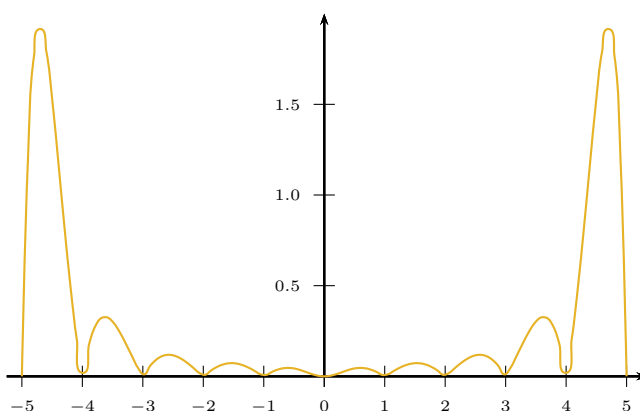
Dans le cas de points équidistants, le polynôme d'interpolation présente des oscillations dans le voisinage des extrémités de l'intervalle. Ces oscillations augmentent avec le nombre de points d'interpolation.



Interpolation de la fonction de Runge avec 11 points équidistants



Points équadistants- Fonction d'erreur $E_5(x) = \left| \frac{1}{1+x^2} - \Pi_5(x) \right|$

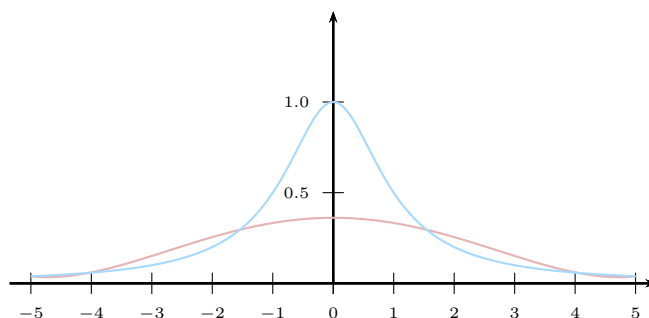


Points équadistants- Fonction d'erreur $E_{10}(x) = \left| \frac{1}{1+x^2} - \Pi_{10}(x) \right|$

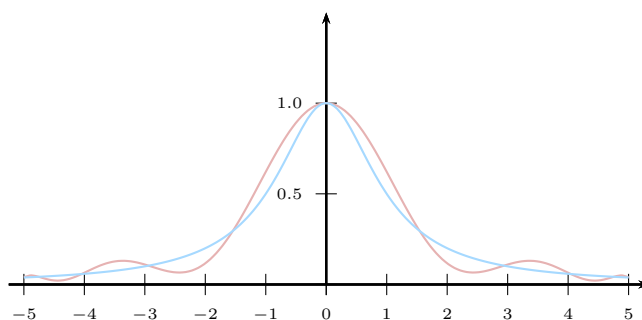
Remède. Le phénomène de Runge peut-être évité si on considère une distribution adéquate des noeuds d'interpolation. En particulier, on peut considérer les points de Chebyshev définis dans $[a, b]$ par

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ces points appartiennent à $[a, b]$, ne sont pas équadistants et s'accroissent près des extrémités de l'intervalle.

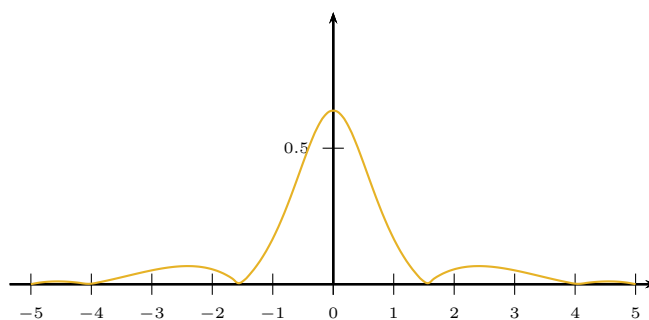


Interpolation de la fonction de Runge avec 6 points de Chebychev

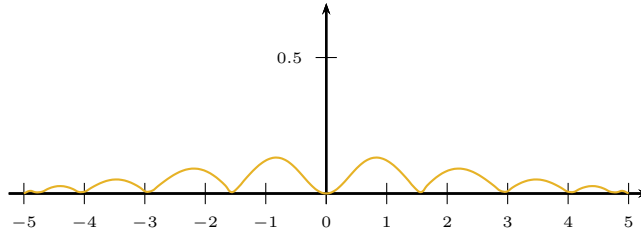


Interpolation de la fonction de Runge avec 11 points de Chebychev

Contrairement à ce qui se passe dans le cas de points équidistants, les oscillations disparaissent et l'erreur diminue quand le nombre des points de Chebychev augmente.



Points de Chebychev- Fonction d'erreur $E_5(x) = \left| \frac{1}{1+x^2} - \Pi_5(x) \right|$



Points de Chebyshev- Fonction d'erreur $E_{10}(x) = \left| \frac{1}{1+x^2} - \Pi_{10}(x) \right|$

2.6 Interpolation par intervalles

2.6.1 Interpolation linéaire par intervalle

L'interpolation utilisant les points de Chebyshev est une méthode d'approximation précise et bien adaptée dans le cas de fonctions régulières et dont l'expression analytique est connue. Si la fonction n'est pas régulière ou si elle est connue en des points qui ne coïncident pas avec les noeuds de Chebyshev, on peut considérer un autre type d'interpolation appelé interpolation linéaire par intervalle.

Plus précisément, soient $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $(n + 1)$ points qui divisent l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

L'idée est d'approcher f par une fonction continue qui, en chaque sous-intervalle I_k , est donné par le segment qui relie les deux points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. Cette fonction, notée Π_1^h , est un polynôme de degré 1 sur chaque sous-intervalle et son expression est donnée par

$$\Pi_1^h(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \quad x \in I_k.$$

Théorème 46. Soit $f \in C^2([a, b])$ et soient $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, $(n + 1)$ points qui divisent l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ de longueur $h = \frac{b-a}{n}$. Alors,

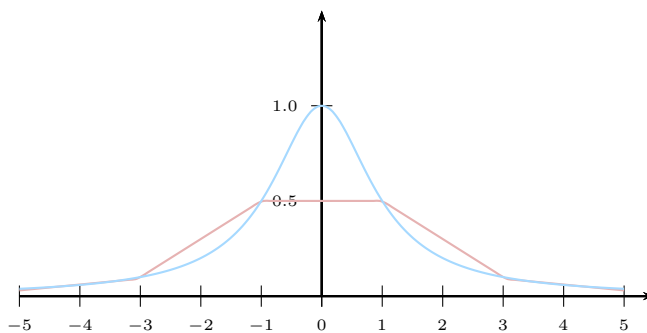
$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \Pi_1^h(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

Démonstration. De la formule d'erreur d'interpolation pour une fonction régulière, nous déduisons que sur chaque sous-intervalle I_k , on a

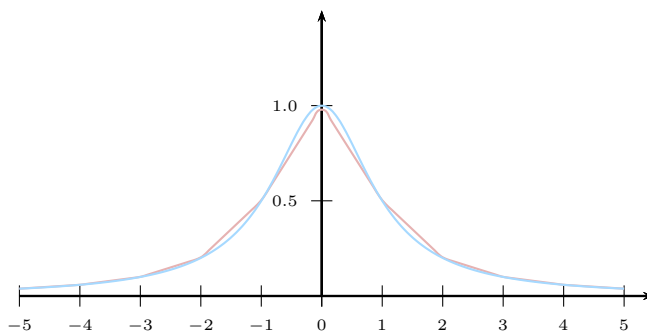
$$\max_{x \in I_k} |f(x) - \Pi_i^h(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{t \in I_k} |f'''(t)|.$$

Le résultat est alors une conséquence directe de cette estimation.

Exemple 47. Considérons les fonctions Π_1^h linéaires par section qui interpolent la fonction de Runge dans $[-5, 5]$ avec 5 et 10 sous-intervalles.



Interpolation de la fonction de Runge par Π_1^h avec $h = 2$



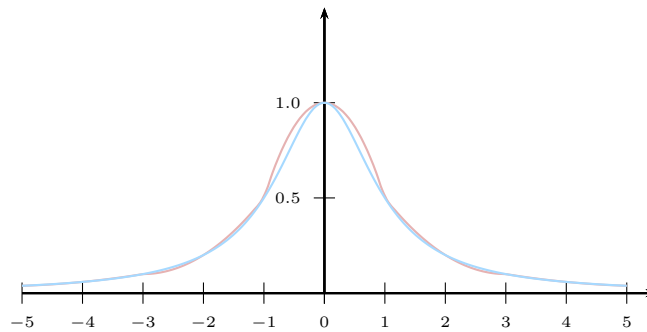
Interpolation de la fonction de Runge par Π_1^h avec $h = 1$

2.6.2 Interpolation par intervalle avec des polynômes de degré supérieur

Si $f \in C^{(n+1)}([a, b])$, au lieu d'une interpolation linéaire, on peut considérer des polynômes d'interpolation de degré supérieur dans chaque sous-intervalle. De la même manière, on obtient l'estimation d'erreur suivante

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \Pi_i^h(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

Exemple 48. Considère le polynôme Π_2^h de degré 2 qui interpole la fonction de Runge dans $[-5, 5]$ avec 5 sous-intervalles.



Interpolation de la fonction de Runge par Π_2^h avec $h = 2$

2.7 Interpolation par des splines cubiques

L'inconvénient principal de l'interpolation par intervalles est que la fonction ainsi obtenue n'est en général pas plus qu'une fonction continue. Il existe beaucoup d'applications où il est préférable avoir une fonction d'approximation régulière avec, au moins, une dérivée continue. D'où l'intérêt de considérer la classe des splines cubiques.

Soient alors $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, $(n + 1)$ points que divisent l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Définition 49. *Un spline cubique d'interpolation est une fonction g tel que*

$$g(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

Dans chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, g coïncide avec un polynôme de degré 3,

$$g \in C^2[a, b].$$

2.7.1 Détermination du spline naturel

Soit g_i un polynôme de degré 3 qui coïncide avec g dans $[x_i, x_{i+1}]$. Dans ce sous-intervalle la fonction g_i'' est un polynôme de degré 1 et est déterminée par deux valeurs

$$\mathbf{m}_i = g_i''(x_i) \quad \text{et} \quad \mathbf{m}_{i+1} = g_i''(x_{i+1})$$

Autrement dit, pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on a

$$g_i''(x) = \mathbf{m}_{i+1} \frac{x-x_i}{h_i} + \mathbf{m}_i \frac{x_{i+1}-x}{h_i}$$

avec $h_i = x_{i+1} - x_i$. Intégrant une première, et après une seconde fois, on obtient

$$g_i'(x) = \mathbf{m}_{i+1} \frac{(x-x_i)^2}{2h_i} - \mathbf{m}_i \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + a_i$$

$$g_i(x) = \mathbf{m}_{i+1} \frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + \mathbf{m}_i \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + a_i(x-x_i) + b_i,$$

où a_i et b_i sont des constantes à déterminer. Utilisant le fait que x_i et x_{i+1} sont des points d'interpolation, il vient que

$$\begin{cases} g_i(x_i) = y_i \\ g_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases} \iff \begin{cases} y_i = \mathbf{m}_i \frac{h_i^2}{6} + b_i \\ y_{i+1} = \mathbf{m}_{i+1} \frac{h_i^2}{6} + a_i h_i + b_i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b_i = y_i - \mathbf{m}_i \frac{h_i^2}{6} \\ a_i = \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{h_i}{6}(\mathbf{m}_{i+1} - \mathbf{m}_i). \end{cases}$$

Par conséquent, pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$, le spline cubique g_i s'écrit

$$\begin{aligned} g_i(x) &= \frac{\mathbf{m}_i}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{\mathbf{m}_{i+1}}{6h_i} (x - x_i)^3 \\ &\quad + \frac{1}{h_i} \left(y_i - \mathbf{m}_i \frac{h_i^2}{6} \right) (x_{i+1} - x) \\ &\quad + \frac{1}{h_i} \left(y_{i+1} - \mathbf{m}_{i+1} \frac{h_i^2}{6} \right) (x - x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

De l'autre côté, vu que g' est continue, pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, on a

$$g'_i(x_i) = g'_{i-1}(x_i) \quad \Longleftrightarrow \quad -\mathbf{m}_i \frac{h_i}{2} + a_i = \mathbf{m}_i \frac{h_{i-1}}{2} + a_{i-1}.$$

Par conséquent, pour $i = 1, \dots, n-1$, les coefficients \mathbf{m}_i satisfont les équations

$$h_{i-1} \mathbf{m}_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1}) \mathbf{m}_i + h_i \mathbf{m}_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right).$$

On a $n+1$ inconnues $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{n-1}, \mathbf{m}_n$ et $n-1$ équations. Nous avons besoin de deux conditions supplémentaires. Il existe pour cela plusieurs possibilités. Par exemple,

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_n = 0 \quad \text{spline cubique naturel.}$$

Remarque 50. Le système obtenu peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_{n-2} \\ \mathbf{m}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{n-2} \\ \mathbf{s}_{n-1} \end{bmatrix},$$

où

$$\mathbf{s}_i = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right),$$

et où \mathbf{A} est une matrice tridiagonale dépendant de h_i , $i = 1, \dots, n-1$

définie par

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-1} + h_n) \end{bmatrix}.$$

2.7.2 Erreur d'interpolation

Théorème 51. Soit $f \in C^4([a, b])$ et soit g un spline cubique d'interpolation de f . On a les estimations suivantes de l'erreur d'approximation

$$\max_{x \in [a, b]} \|f(x) - g(x)\| \leq \frac{5}{384} h^4 \max_{x \in [a, b]} \|f^{(4)}(x)\|,$$

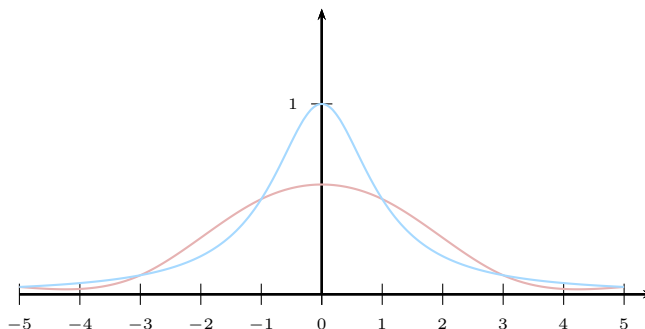
$$\max_{x \in [a, b]} \|f'(x) - g'(x)\| \leq \frac{1}{24} h^3 \max_{x \in [a, b]} \|f^{(4)}(x)\|,$$

$$\max_{x \in [a, b]} \|f''(x) - g''(x)\| \leq \frac{3}{8} h^2 \max_{x \in [a, b]} \|f^{(4)}(x)\|,$$

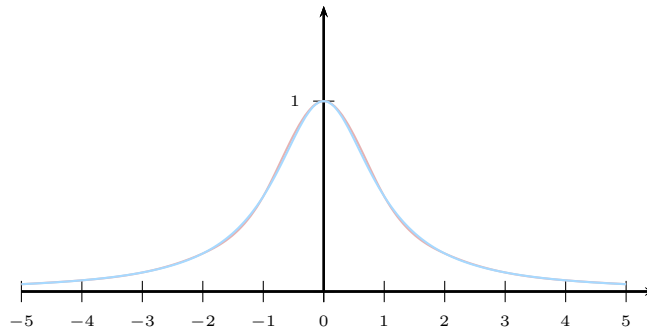
$$\max_{x \in [a, b]} \|f^{(3)}(x) - g^{(3)}(x)\| \leq \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) h \max_{x \in [a, b]} \|f^{(4)}(x)\|,$$

où $h = \max_{i=0, \dots, n-1} h_i$ et $\beta = \frac{h}{\min_i h_i}$.

Ce résultat montre que non seulement f mais aussi ses dérivées d'ordre 1, 2 et 3 sont approchées de manière précise quand h tend vers zéro.



Interpolation par un spline cubique naturel de la fonction de Runge avec $n = 5$



Interpolation par un spline cubique naturel de la fonction de Runge avec $n = 10$

2.8 Méthode des moindres carrés

Comme déjà indiqué dans les sections antérieures, augmenter le degré du polynôme d'interpolation de Lagrange ne garantit pas une meilleure approximation d'une fonction donnée. Un remède possible est de considérer une interpolation par intervalles (interpolation linéaire par intervalles par exemple). Cependant, ces méthodes ne sont pas indiquées si on veut extrapoler des informations à partir des données disponibles, i.e. si on veut engendrer de nouvelles valeurs correspondant à des points extérieurs à l'intervalle où se trouvent les points d'interpolation.

Considérons $n + 1$ points x_0, x_1, \dots, x_n et des mesures associées y_0, y_1, \dots, y_n . Pour $1 \leq m \ll n$, on cherche un polynôme P_m de degré m qui approche les données au sens des moindres carrés, autrement dit tel que

$$\sum_{i=0}^n |y_i - P_m(x_i)|^2 \leq \sum_{i=0}^n |y_i - Q_m(x_i)|^2,$$

pour tout polynôme Q_m de degré m . S'il existe, le polynôme P_m est appelé approximation dans le sens des moindres carrés des données $(x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$.

Vu que $m < n$, il n'est en général pas possible de garantir que $P_m(x_i) = y_i$ pour tout i .

Si $P_m(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, le problème o problema des moindres carrés peut-être réécrit sous la forme

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_m) = \min_{b_i, i=0,1,\dots,m} \Phi(b_0, b_1, \dots, b_m),$$

où Φ est définie par

$$\Phi(b_0, b_1, \dots, b_m) = \sum_{i=0}^n |y_i - (b_0 + b_1x_i + \cdots + b_mx_i^m)|^2.$$

Le vecteur (a_0, a_1, \dots, a_m) où Φ atteint son minimum doit satisfaire les conditions nécessaires d'optimalité

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_i}(a_0, a_1, \dots, a_m) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Pour simplifier, supposons que $m = 1$. Alors

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^n (y_i^2 + b_0^2 + b_1^2 x_i^2 + 2b_0 b_1 x_i - 2b_0 y_i - 2b_1 x_i y_i).$$

Des conditions nécessaires d'optimalité

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = \frac{\partial \Phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0,$$

nous déduisons que (a_0, a_1) satisfait le système linéaire

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{cases}$$

et que la solution s'écrit

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{D} \left(\sum_{i=0}^n y_i \sum_{j=0}^n x_j^2 - \sum_{j=0}^n x_j \sum_{i=0}^n x_i y_i \right), \\ a_1 = \frac{1}{D} \left((n+1) \sum_{i=0}^n x_i y_i - \sum_{j=0}^n x_j \sum_{i=0}^n y_i \right), \end{cases}$$

où

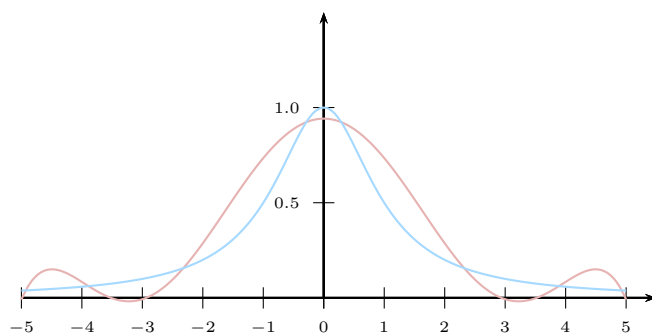
$$D = (n + 1) \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2.$$

Le polynôme correspondant $P_1(x) = a_0 + a_1x$ est la fameuse droite de régression.

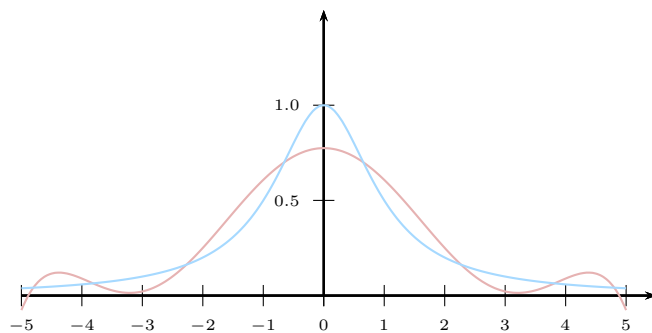
Dans le cas général, on obtient le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(n + 1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + \cdots + a_m \sum_{i=0}^n (x_i)^m = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + \cdots + a_m \sum_{i=0}^n (x_i)^{m+1} = \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=0}^n (x_i)^m + a_1 \sum_{i=0}^n (x_i)^{m+1} + \cdots + a_m \sum_{i=0}^n (x_i)^{2m} = \sum_{i=0}^n (x_i)^m y_i. \end{array} \right.$$

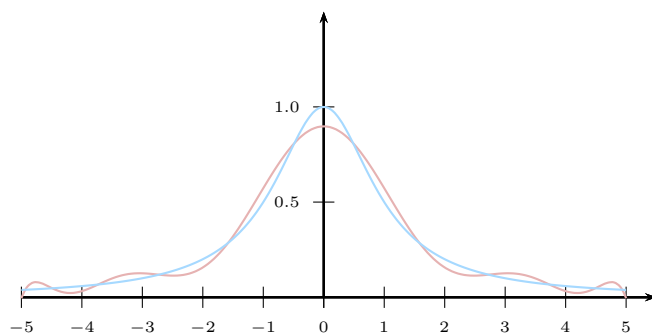
Remarquons que quand $m = n$, le polyôme obtenu par la méthode des moindres carrés coïncide avec le polynôme d'interpolation de Lagrange.



Fonction de Runge : approximation par la méthode des moindres carrés avec
 $m = 6$ et $n = 20$



Fonction de Runge : approximation par la méthode des moindres carrés avec
 $m = 6$ et $n = 100$



Fonction de Runge : approximation par la méthode des moindres carrés avec
 $m = 10$ et $n = 100$