Nadir Arada

Analyse Numérique I

EXERCICES RÉSOLUS

Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Table des matières

Chapitre 1

Résolution des équations non linéaires

Exercice 1. Le problème de claculer $\sqrt{2}$ est équivalent à trouver le zéro positif de la fonction $f(x) = x^2 - 2$, i.e. à résoudre une équation non linéaire. Vérifiez que $\alpha = \sqrt{2}$ est un point fixe de la fonction ϕ définie par

$$\varphi(x) = -\tfrac{1}{4}x^2 + x + \tfrac{1}{2}.$$

Montrer alors que pour $x_0 \in [1, 2]$, il existe uma constante $K > 0$ tel que

$$|x_n - \alpha| \leq K^n |x_0 - \alpha| \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Quel est le comportement de la suite $(x_n)_n$ quand n tend vers$+\infty$. Après combien d'approximations a-t-on la garantie d'approcher $\sqrt{2}$ avec une erreur de l'ordre de 10^{-10}.

Solution. Soit α le zéro positif de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$. On a

$$f(1)f(2) = -1 \times 2 = -1 < 0$$

et grâce au théorème de Bolzano, nous déduisons que $\alpha \in]1, 2[$. De l'autre côté, il est facile de voir que

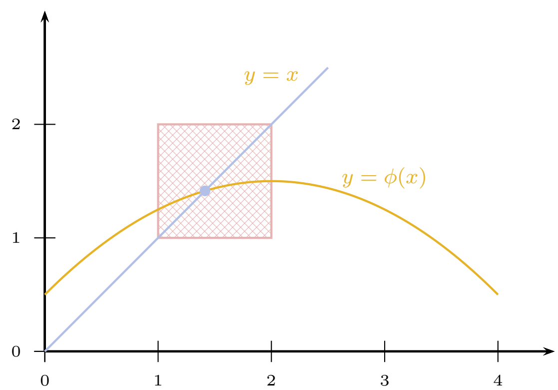
$$f(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(\alpha) = -\tfrac{\alpha^2}{4} + \alpha + \tfrac{1}{2} = \tfrac{2-\alpha^2}{4} + \alpha = \alpha,$$

et donc α est un point fixe de ϕ. La dérivée ϕ' est donnée par $\phi'(x) = \frac{2-x}{2}$ et satisfait

$$0 \leq \phi'(x) \leq \tfrac{1}{2} \qquad \text{pour tout } x \in [1,2],$$

ce qui implique que la fonction ϕ est croissante et que

$$\phi(1) = \tfrac{5}{4} \leq \phi(x) \leq \phi(2) = \tfrac{3}{2} \qquad \text{pour tout } x \in [1,2].$$



Vu que

$$\phi([1,2]) = [\tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2}] \subset [1,2] \qquad \text{et} \qquad \max_{x\in[0,1]} |\phi'(x)| \leq K = \tfrac{1}{2} < 1$$

nous concluons pour $x_0 \in [1,2]$, la suite $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge vers α et satisfait l'estimation d'erreur suivante

$$|x_n - \alpha| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Pour garantir une erreur de $\varepsilon = 10^{-10}$, il suffit d'imposer

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \leq \varepsilon \quad \iff \quad n \geq -\tfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$$

autrement dit $n \geq 34$.

Exercice 2. Soient $a, b, c \in R$ tel que $b^2 - 4ac > 0$ et $a > 0$, et soient $\alpha_1 > \alpha_2$ les racines de $ax^2 + bx + c = 0$.

(a) Vérifier que α_1 et α_2 sont des points fixes de $\phi(x) = ax^2 + (b+1)x + c$.

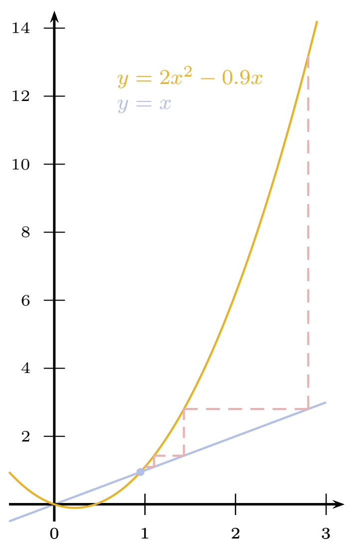
(b) Montrer que α_1 est un point fixe répulsif.

(c) Montrer que α_2 est un point fixe attractif si $b^2 - 4ac < 4$ et indifférent si $b^2 - 4ac = 4$. Quel est l'odre de convergence de la méthode ?

Solution. (a) Soit α un zéro de l'équation. On a alors

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a\alpha^2 + (b+1)\alpha + c = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(\alpha) = \alpha,$$

ce qui montre que α est un point fixe ϕ.



Exemple de point fixe répulsif : $|\phi'(\alpha_1)| > 1$

(b) Il est facile de voir que $\phi'(\alpha_1) = 2a\alpha_1 + b + 1 = \sqrt{b^2 - 4ac} + 1$, et donc

$$|\phi'(\alpha_1)| = \left|\sqrt{b^2 - 4ac} + 1\right| = \sqrt{b^2 - 4ac} + 1 > 1,$$

ce qui implique α_1 est un point fixe répulsif.

(c) De manière similaire, on a

$$\phi'(\alpha_2) = 2a\alpha_2 + b + 1 = -\sqrt{b^2 - 4ac} + 1$$

et

$$|\phi'(\alpha_2)| = \left|-\sqrt{b^2 - 4ac} + 1\right|.$$

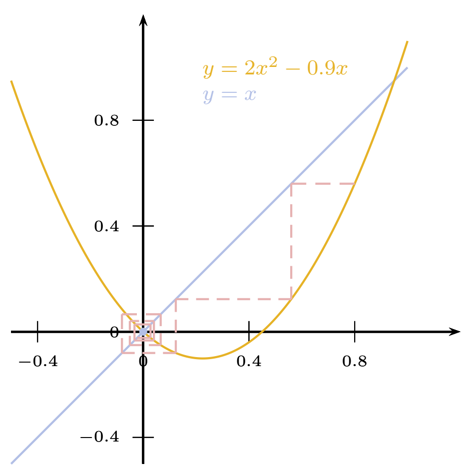
Par conséquent,

$$\begin{aligned}|\phi'(\alpha_2)| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|-\sqrt{b^2-4ac}+1\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \sqrt{b^2-4ac} < 2\\ &\Longleftrightarrow \quad 0 < b^2-4ac < 4.\end{aligned}$$

Ainsi, si $0 < b^2 - 4ac < 4$, alors le point fixe α_2 est attractif, et pour x_0 choisi dans le voisinage de α, la suite $(x_{n+1} = \phi(x_n))_n$ converge vers α. Si

$$\phi'(\alpha_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\sqrt{b^2-4ac}+1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b^2-4ac = 1$$

alors l'ordre de convergence de la méthode est 2. Dans le cas contraire, la convergence est d'ordre 1.



Exemple de point fixe attractif : $|\phi'(\alpha_2)| > 1$

Exercice 3. L'objectif est de calculer le zéro de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 2$ utilisant la méthode du point fixe $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ suivante

$$x_{n+1} = x_n(1 - \tfrac{\omega}{3}) + (x_n)^3(1-\omega) + \tfrac{2\omega}{3(x_n)^2} + 2(\omega - 1), \qquad n \geq 0$$

où $\omega \in R$.

(a) Pour quelles valeurs de ω, le zéro de la fonction f est un point fixe pour la méthode proposée ?

(b) Pour quelles valeurs de ω, la méthode proposée est d'ordre 2 ?

(c) Existe-t-il une valeur ω pour laquelle l'ordre de la méthode est plus supérieur à 2 ?

Solution. (a) Soit α un zéro de f. Alors

$$\begin{aligned}\phi(\alpha) &= \alpha(1-\tfrac{\omega}{3}) + \alpha^3(1-\omega) + \tfrac{2\omega}{3\alpha^2} + 2(\omega-1)\\ &= \alpha + (1-\omega)\left(\alpha^3-2\right) - \tfrac{\omega}{3}\left(\alpha - \tfrac{2}{\alpha^2}\right)\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Par conséquant, α est un point fixe de ϕ pour n'importe quelle valeur de $\omega \in R$.

(b) La méthode est d'ordre 2 si $\phi'(\alpha) = 0$. Vu que

$$\phi'(x) = (1-\tfrac{\omega}{3}) + 3x^2(1-\omega) - \tfrac{4\omega}{3x^3},$$

il vient que

$$\begin{aligned}\phi'(\alpha) = 0 \qquad &\iff \quad 1-\tfrac{\omega}{3}) + 3\alpha^2(1-\omega) - \tfrac{4\omega}{3\alpha^3} = 0\\ &\iff \quad (1-\tfrac{\omega}{3}) + 3\alpha^2(1-\omega) - \tfrac{4\omega}{6} = 0\\ &\iff \quad (3\alpha^2+1)(1-\omega) = 0\\ &\iff \quad \omega = 1\end{aligned}$$

(c) Pour garantir un ordre de convergence égal à 3, il est nécessaire d'imposer les conditions $\phi'(\alpha) = \phi"(\alpha) = 0$. De l'alinéa (b), nous savons $\omega = 1$ est l'unique valeur tel que $\phi'(\alpha) = 0$. De l'autre côté, il est facile de voir que pour cette valeur, on a

$$\phi"(x) = -\tfrac{4}{x^4} \neq 0.$$

Ainsi nous concluons que $\phi"(\alpha) \neq 0$ et la méthode ne peut pas avoir un ordre de convergence supérieur à 2.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x + \beta\, x + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{e}$, $\beta > 0$.

(a) Montrez que $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [-1, 0]$.

(b) Montrez que si $f(x_0) > 0$, alors la méthode de Newton converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{1}{2(1+\beta\, e^{-\alpha})}.$$

Solution. (a) Vu que

$$f(0)f(-1) = \left(1 - \tfrac{1}{e} + \tfrac{\beta}{2}\right)\left(-\tfrac{\beta}{2}\right) < 0,$$

grâce au théorème de Bolzano, nous déduisons qu'il existe $\alpha \in]-1, 0[$ tel que $f(\alpha) = 0$. De l'autre côté, on a

$$f'(x) = e^x + \beta > 0 \qquad \text{pour tout } x \in [-1, 0],$$

ce qui implique que f est croissante et admet donc un zéro unique.

(b) Le dérivée seconde de f est donnée par $f"(x) = e^x > 0$. Par conséquent, la méthode de Newton converge pour tout x_0 tel que

$$f(x_0)f"(x_0) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x_0) > 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{f"(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{e^\alpha}{2(e^\alpha+\beta)} = \frac{1}{2(1+\beta\, e^{-\alpha})}.$$

Exercice 5. Soit $f \in C^2([a, b])$, et soit α une racine de f tel que $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ et $f"(\alpha) \neq 0$.

(a) Vu que f peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = (x-\alpha)^2\, h(x) \qquad \text{avec} \quad h(\alpha) \neq 0,$$

vérifier que la méthode de Newton pour l'approximation de α est d'ordre 1.

(b) Considérons la méthode Newton modifiée définie par

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Vérifier que que cette méthode est d'ordre 2.

Solution. (a) La méthode de Newton peut-être considérée comme une méthode du point fixe avec

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Nous savons que si $0 < |\phi'(\alpha)| < 1$, la méthode est d'ordre 1 et que si $\phi'(\alpha) = 0$, alors la méthode est d'ordre 2. De simples calculs montrent que

$$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

où

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)^2\, h(x) \\ f'(x) &= (x-\alpha)\,(2h(x) + (x-\alpha)h'(x)) \\ f''(x) &= 2h(x) + 4(x-\alpha)h'(x) + (x-\alpha)^2 h''(x) \end{aligned} .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \tfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \tfrac{(x-\alpha)^2\, h(x)\big(2h(x)+4(x-\alpha)h'(x)+(x-\alpha)^2h''(x)\big)}{(x-\alpha)^2(2h(x)+(x-\alpha)h'(x))^2} \\ &= \tfrac{h(x)\big(2h(x)+4(x-\alpha)h'(x)+(x-\alpha)^2h''(x)\big)}{(2h(x)+(x-\alpha)h'(x))^2} \end{aligned}$$

et

$$\phi'(\alpha) = \tfrac{2(h(\alpha))^2}{4(h(\alpha))^2} = \tfrac{1}{2} < 1.$$

Dans ce cas, la méthode Newton est donc d'ordre 1.

(b) Pour la méthode de Newton modifiée, nous avons

$$\phi(x) = x - 2\tfrac{f(x)}{f'(x)},$$

ce qui implique que

$$\phi'(x) = 1 - 2\tfrac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = -1 + 2\tfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

et

$$\phi'(\alpha) = -1 + 2\tfrac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}.$$

De l'autre côté, d'après l'alinéa (a), nous avons

$$\tfrac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = \tfrac{1}{2}.$$

Combinant ces deux identités, nous obtenons

$$\phi'(\alpha) = -1 + 2 \times \tfrac{1}{2} = 0.$$

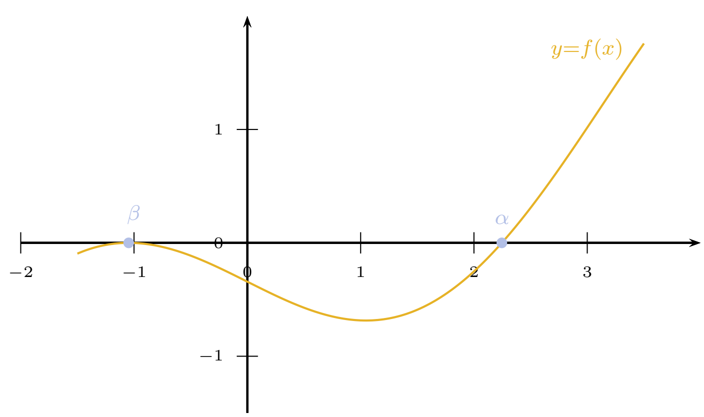
La méthode de Newton modifiée est donc d'ordre 2.

Exercice 6. Considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et remarque qu'elle possède deux zéros dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$.

(a) Utilisant le graphe de f, expliquer pourquoi la méthode de la bissection ne peut-être utilisée que pour approcher une des racines. Après combien d'itérations a-t-on la garantie d'approcher cette racine avec une tolérance de l'ordre de 10^{-10}. (Choisir un intervalle adéquat pour appliquer la méthode).

(b) Écrire la méthode de Newton pour f. Utilisant le graphique, déduire l'ordre de convergence pour les deux racines α et β. (Choisir $x_\alpha = \pi$ et $x_\beta = -\frac{\pi}{2}$ comme itérations initiales.)

Solution. (a) Considérons f dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$. Le graphique de la fonction montre deux zéros : un zéro positif α et un zéro négatif β.



La méthode de la bissection ne peut-être appliquée pour approcher β car la fonction f ne change pas de signe dans son voisinage. De l'autre côté, le graphique montre que $\alpha \in [a, b]$ avec $a = \frac{3}{2}$ et $b = 3$ (et nous pouvons vérifier que $f(a)f(b) < 0$) et donc, l'erreur correspondante à α satisfait l'estimation suivante

$$|x_n - \alpha| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}(b-a) = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+2}.$$

Pour approcher α avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-10}$, il est suffisant d'imposer la condition suivante

$$3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+2} \leq \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geq -\frac{\ln(\frac{\varepsilon}{3})}{\ln(2)} - 2 = 32.802\cdots.$$

Par conséquent, pour $n \geq 33$, nous avons la garantie que l'erreur est de l'ordre de 10^{-10} et on obtient $\alpha \approx 2.2460$.

(b) La méthode de Newton pour f s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \ \text{donné} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{x_n}{2} - \sin x_n + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \cos x_n} = \frac{2\sin x_n - 2x_n\cos x_n - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}}{1 - 2\cos x_n}. \end{cases}$$

Une fois que $f'(\beta) = 0$, nous concluons que la convergence pour β est d'ordre 1. De même, vu que $f'(\alpha) \neq 0$, nous concluons que la convergence pour α est d'ordre 2. Choisissant $x_\alpha = \pi$ et $x_\beta = -\frac{\pi}{2}$ comme points initiaux, nous obtenons une convergence vers $\alpha \approx 2.2460$ en 5 itérations et pour $\beta \approx -1.0472$ en 28 itérations. (Cf. travaux pratiques pour plus de détails et pour l'application de la méthode de Newton modifiée au cas du zéro β.)

Exercice 7. L'objectif est d'approcher le zéro de la fonction f définie par

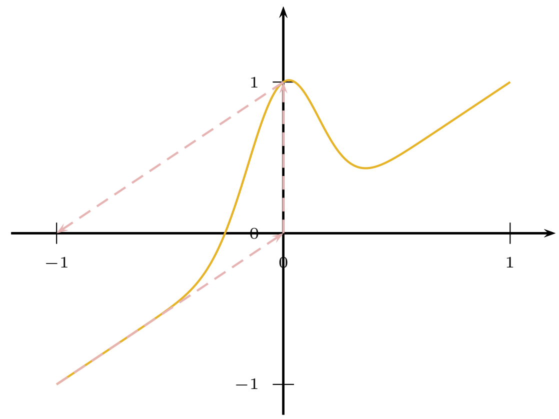
$$f(x) = x + e^{-20x^2}\cos x.$$

(a) Utiliser la méthode de Newton avec $x_0 = 0$ et avec une tolérance égale à 10^{-10}.

(b) Dessiner le graphe de f em $]-1,1[$ et expliquer pourquoi la méthode de Newton ne converge pas pour ce chgoix de x_0.

(c) Utiliser 5 itérations de la méthode de la bissection appliquée à f dans $[-1,1]$ et choisir x_5 comme point initial pour la méthode de Newton.

Solution. Comme on peut le voir sur le graphique, la méthode de Newton avec $x_0 = 0$ présente des oscillations et ne converge pas.



Pour garantir la convergence, on calcule 5 itérations utilisant la méthode de la bissection, ce qui donne $x_5 = -0.2656$. Cette valeur est alors utilisée comme itération initiale pour la méthode de Newton qui converge cette fois-ci vers $\alpha \approx -0.2573$ en 4 itérations. (Cf. travaux pratiques pour plus de détails.)

Chapitre 2

Interpolation et approximation polynômiale

Exercice 1. Considère le tableau suivant relatif aux valeurs d'une fonction f :

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	0.5	1	3.5

Soient P, Q et R les polynômes de degré 2 définis par

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 2.5x + 2, \\ Q(x) &= 0.25(x-2)(x-3) - (x-1)(x-3) + 1.75(x-1)(x-2), \\ R(x) &= 0.5 + 0.5(x-1) + (x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Montrer que P, Q et R interpollent f aux points donnés. Quelle est la relation entre ces polynômes ?

Solution. Il est facile de vérifier que

$$P(1) = 0.5, \qquad P(2) = 1, \qquad P(3) = 3.5,$$

ce qui implique que P est le polynôme d'interpolation de f aux points 1, 2, 3. De manière similaire, on a

$$Q(1) = 0.5, \qquad Q(2) = 1, \qquad Q(3) = 3.5,$$

et

$$R(1) = 0.5, \qquad R(2) = 1, \qquad R(3) = 3.5,$$

et donc, P et Q sont aussi des polynômes d'interpolation de f aux points considérés. Une fois que le polynôme d'interpolation est unique, nous déduisons que

$$P = Q = R.$$

Comme on peut facilement le vérifier, les polynômes Q et R sont, respectivament, la forme de Lagrange et celle de Newton pour le polynôme d'interpolation.

Exercice 2. Soit π_n le polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à n d'une fonction f aux points x_0, x_1, $\cdots$, x_n. Justifier que le polynôme Q_{n+1} défini par

$$Q_{n+1}(x) = \pi_n(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\dots(x_{n+1}-x_n)}(f(x_{n+1}) - \pi_n(x_{n+1})),$$

est le polynôme d'interpolation de f aux points x_0, x_1, $\cdots$, x_n, x_{n+1}.

Solution. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x_i) &= \pi_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \cdots, n, \\ Q_{n+1}(x_{n+1}) &= \pi_n(x_{n+1}) + (f(x_{n+1}) - \pi_n(x_{n+1})) = f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Par conséquent, Q_{n+1} est le pôlynome d'interpolation de f aux points x_0, x_1, $\cdots$, x_n, x_{n+1}.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(\pi x)$, $x \in [-1, 1]$.

1) Déterminer Π_n le polynôme d'interpolation de f aux $(n+1)$ points équidistants x_0, x_1, $\cdots, x_n$, pour $n = 4$, 5 et 8.

2) Dessiner, pour $n = 4$, 5 et 8, la fonction erreur $|E_n(x)| = |f(x) - \Pi_n(x)|$. Commenter.

3) Dessiner, pour $n = 4$, 5 et 8, la fonction $\omega_n(x) = \frac{\pi^n}{(n+1)!} |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|$. Comparer avec le résultat obtenu en 2).

4) Justifier de manière rigoureuse que $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n(x) = 0$, pour tout $x \in$

$[-1, 1]$.

Solution. Remarquez que les $(n+1)$ points équidistants dans $[-1, 1]$ sont donnés par $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $i = 0, 1, \cdots, n$.

1) Utilisant l'interpolation de Newton avec des différences divisées pour $n = 4$, nous obtenons le tableau suivant

-1	0				
-0.5	-1	$\frac{-1-0}{-0.5-(-1)} = -2$			
0	0	$\frac{0-(-1)}{0-(-0.5)} = 2$	$\frac{2-(-2)}{0-(-1)} = 4$		
0.5	1	$\frac{1-0}{0.5-0} = 2$	$\frac{2-2}{0.5-(-0.5)} = 0$	$\frac{0-4}{0.5-(-1)} = -\frac{8}{3}$	
1	0	$\frac{0-1}{1-0.5} = -2$	$\frac{-2-2}{1-0} = -4$	$\frac{-4-0}{1-(-0.5)} = -\frac{8}{3}$	0

Le polynôme d'interpolation correspondant est alors donné par

$$\begin{aligned} \Pi_4(x) &= 0-2(x+1) + 4(x+1)(x+0.5)-\tfrac{8}{3}(x+1)(x+0.5)x \\ &\quad +0(x+1)(x+0.5)x(x-0.5) \\ &= -2(x+1) + 4(x+1)(x+0.5) - \tfrac{8}{3}(x+1)(x+0.5)x \\ &= -\tfrac{8}{3}(x+1)x(x-1) \end{aligned}$$

Vu que les points d'interpolation sont équidistants, le polynôme Π_4 peut-être aussi obtenu en utilisant des différences finies au lieu des différences divisées. Le tableau correspondant est le suivant :

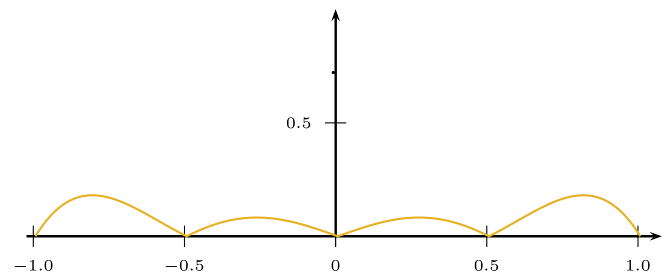
-1	0				
-0.5	-1	$-1-0=-1$			
0	0	$0-(-1)=1$	$1-(-1)=2$		
0.5	1	$1-0=1$	$1-1=0$	$0-2=-2$	
1	0	$0-1=-1$	$-1-1=-2$	$-2-0=-2$	0

Le polynôme d'interpolation correspondant s'écrit

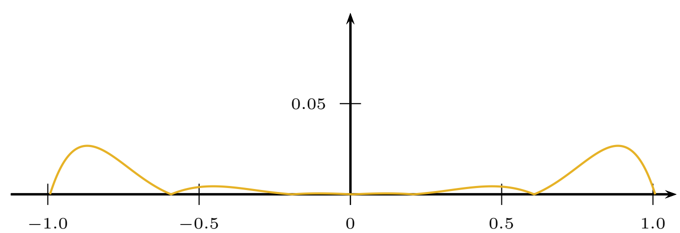
$$\begin{aligned} \Pi_4(x) &= 0-\tfrac{1}{1!(0.5)}(x+1) + \tfrac{2}{2!(0.5)^2}(x+1)(x+0.5) \\ &\quad -\tfrac{2}{3!(0.5)^3}(x+1)(x+0.5)x + \tfrac{0}{4!(0.5)^4}(x+1)(x+0.5)x(x-0.5) \\ &= -\tfrac{8}{3}(x+1)x(x-1) \end{aligned}$$

Les polynômes d'interpolation de degré 5 et 8 peuvent être obtenus d'une manière similaire.

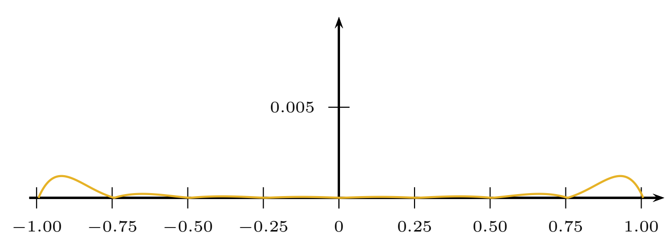
2) Les figures (a), (b) et (c) montrent les fonctions d'erreur (en module) pour $n = 4, 5$ et 8. Nous notons une diminution de l'erreur quand le nombre de points d'interpolation augmente. Nous notons aussi que l'erreur à l'intérieur de l'intervalle est plus petit que l'erreur dans le voisinage des extrémités.



(a) Fonction d'erreur $E_4(x) = |\sin(\pi x) - \Pi_4(x)|$



(b) Fonction d'erreur $E_5(x) = |\sin(\pi x) - \Pi_5(x)|$

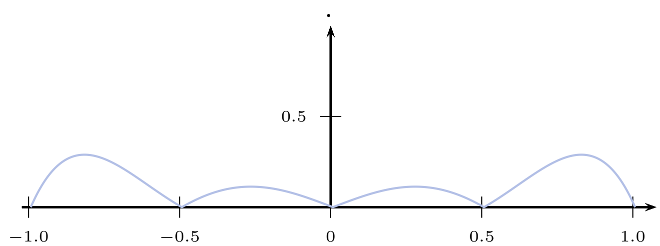


(c) Fonction d'erreur $E_8(x) = |\sin(\pi x) - \Pi_8(x)|$

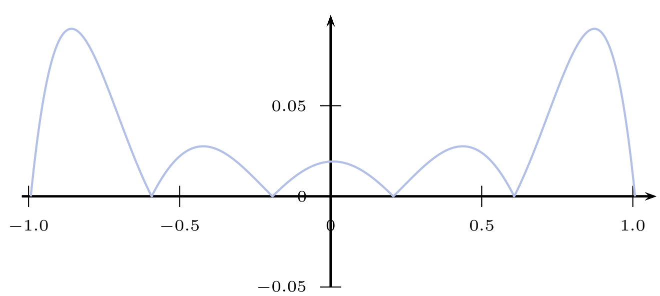
(c) Dans les figures (d), (e) et (f) est représentée la fonction

$$\omega_n(x) = \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

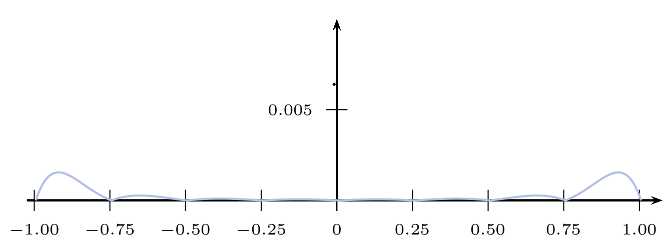
pour $n = 4$, 5 et 8. Nous notons que le comportement de cette fonction est similaire à celui de la fonction d'erreur E_n et que le maximum décroit quand n croît. Nous notons aussi que $\omega_n \geq E_n$.



(d) Fonction $\omega_4(x) = \frac{\pi^5}{5!} \left|\Pi_{i=0}^{4}(x - x_i)\right|$



(e) Fonction $\omega_5(x) = \frac{\pi^6}{6!} \left|\Pi_{i=0}^{5}(x - x_i)\right|$



(f) Fonction $\omega_8(x) = \frac{\pi^9}{9!} \left|\Pi_{i=0}^{8}(x - x_i)\right|$

3) Ces observations sont prévisibles. Nous savons (cf. cours) que la fonction d'erreur $E_n(x) = \sin(\pi x) - \Pi_n(x)$ satisfait

$$|E_n(x)| \leq \frac{\max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|.$$

Vu que $|f^{(n+1)}(x)| = \left| (\sin(\pi x))^{(n+1)} \right| \leq \pi^{n+1}$, nooous déduisons que

$$|E_n(x)| \leq \frac{\pi^n}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| = \omega_n(x).$$

De l'autre côté, vu que les points sont équidistants, nous avons

$$\left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \leq n! \frac{h^{n+1}}{4},$$

où $h = \frac{2}{n}$. Par conséquent, nous obtenons

$$|E_n(x)| \leq \frac{\pi^{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Exercice 4. Considère la fonction de Runge définie par

$$f(x) = \tfrac{1}{x^2+1}, \qquad x \in [-5, 5].$$

1) Déterminer Π_n, le polynôme d'interpolation de f aux $(n+1)$ points équidistants $x_0,\ x_1,\ \cdots, x_n$, avec $n = 5$ et 10. Dessiner la fonction d'erreur $|E_n(x)| = |f(x) - \Pi_n(x)|$ correspondante. Commenter.

2) Déterminer Π_n, le polynôme d'interpolation de f aux $(n+1)$ points de Chebyshev, avec $n = 5$ e 10. Dessiner la fonction d'erreur $|E_n(x)|$ correspondante. Comparer avec l'aliéa précédente.

3) Déterminer Π_1^h, le polynôme linéaire par morceaux, qui interpolle f avec 5 et 10 sous-intervalles. Estimer l'erreur correspondante. Commenter.

Solution. 1) Soit Π_n le polynôme d'interpolation de f aux $(n+1)$ points équidistants $x_i = -5 + \frac{10i}{n}$, $i = 0, 1, \cdots, n$. Utilisant la formule d'interpolation de Newton avec des différences finies pour $n = 5$, nous obtenons le tableau suivant

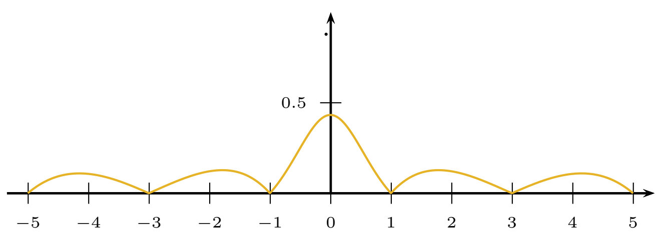
-5	$\frac{1}{26}$					
-3	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{65}$				
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{22}{65}$			
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{48}{65}$		
3	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{48}{65}$	
5	$\frac{1}{26}$	$-\frac{4}{65}$	$\frac{22}{65}$	$\frac{48}{65}$	$\frac{48}{65}$	0

Le polynôme d'interpolation est alors donné par

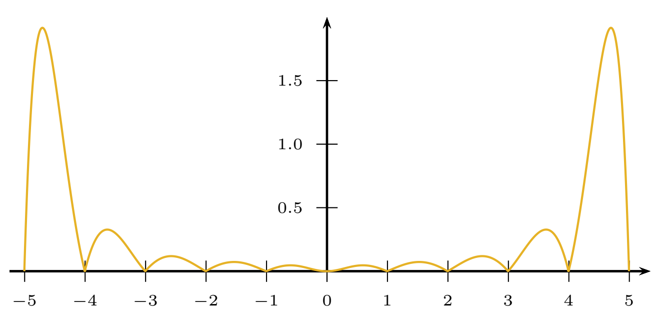
$$\begin{aligned}\Pi_5(x) &= \tfrac{1}{26} + \tfrac{4}{65}(x+5) + \tfrac{22}{65}(x+1)(x+3) - \tfrac{48}{65}(x+5)(x+3)(x+1) \\ &\quad + \tfrac{48}{65}(x+5)(x+3)(x+1)(x-1).\end{aligned}$$

Le polynôme d'interpolation de degré 10 peut-être obtenu de manière similaire.

Les figures (g) et (h) montrent les fonctions d'erreur pour 5 e 10. Nous notons les oscillations au voisinage des extrémités de l'intervalle. Ces oscillations augmentent quand le nombre de points d'interpolation augmentent.



(g) Points équidistants- Fonction d'erreur $E_5(x) = \left|\frac{1}{1+x^2} - \Pi_5(x)\right|$



(h) PPoints équidistants- Fonction d'erreur $E_{10}(x) = \left|\frac{1}{1+x^2} - \Pi_{10}(x)\right|$

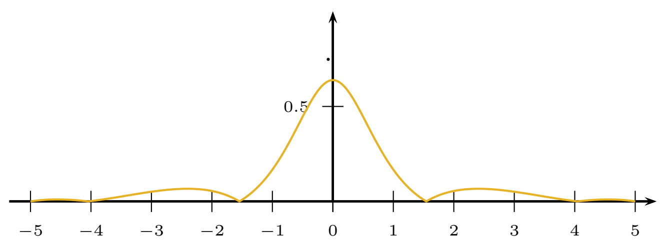
2) Pour remédier à ces perturbations, on considère les points de Chebychev définis par

$$x_i = -5\cos(\frac{\pi i}{n}), \qquad i = 0, 1, \cdots, n.$$

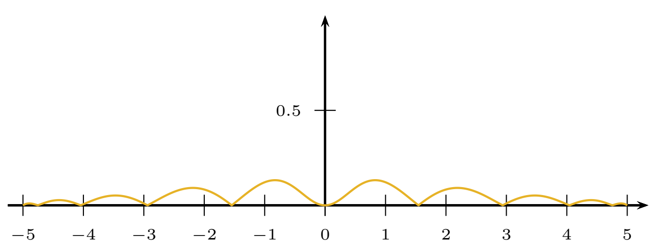
Pour déterminer Π_n, le polynôme d'interpolation de f aux points de Chebychev, et vu que ces points ne sont pas équidistants, on peut utiliser les différences divisées de Newton. Pour $n = 5$, le tableau correspondant est le suivant :

-5	0.038461538					
-4.045084972	0.057594688	0.020036495				
-1.545084972	0.295221465	0.095050711	0.021712319			
1.545084972	0.295221465	0	-0.017003188	-0.005914765		
4.045084972	0.057594688	-0.095050711	-0.017003188	0	0.000653920	
5	0.038461538	-0.020036495	0.021712319	0.005914765	0.000653920	0

Comme on peut le voir dans les figures ci-dessous, les oscillations disparaîssent et l'erreur diminue quand le nombre de points de Chebychev croît.



Points de Chebychev- Fonction d'erreur $E_5(x) = \left|\frac{1}{1+x^2} - \Pi_5(x)\right|$



Points de Chebychev- Fonction d'erreur $E_{10}(x) = \left|\frac{1}{1+x^2} - \Pi_{10}(x)\right|$

3) Considérons les polynômes Π_1^h linéairs par morceaux et qui interpollent la fonction Runge dans $[-5,5]$ avec n sous-intervalles. Dans chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, le polynôme d'interpolation Π_1^h est de degré 1. Il est facile de voir que

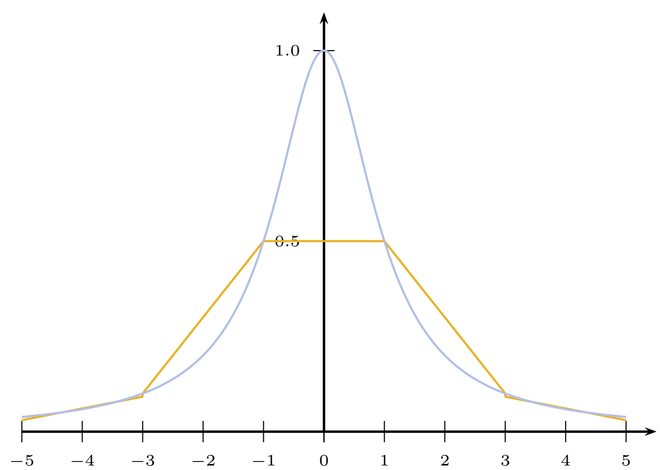
$$\Pi_1^h(x) = f(x_i) + \tfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i) \qquad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Pour $n=5$, on a 5 sous-intervalles de même longueur $h=2$, et 5 polynômes associés. Substituant dans l'expression précédente, il vient que

$$\begin{aligned}\Pi_1^h(x) &= f(x_0) + \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\,(x-x_0)\\ &= f(-5) + \tfrac{f(-3)-f(-5)}{-3+5}\,(x+5)\\ &= \tfrac{2}{65}\,x + \tfrac{5}{26} \qquad\qquad \text{si } x \in [x_0,x_1] = [-5,-3]\end{aligned}$$

De manière similaire, on obtient

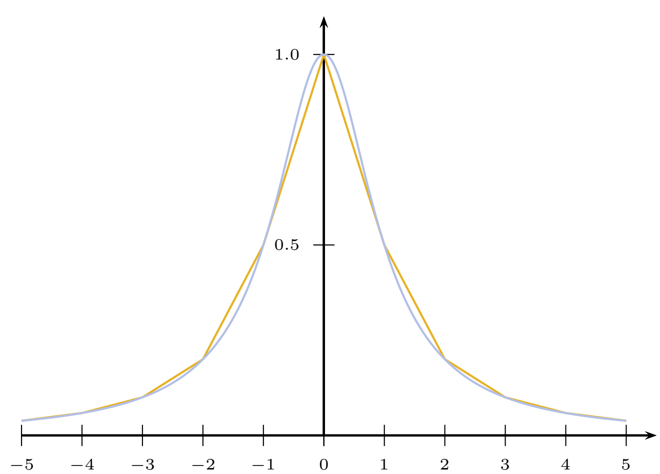
$$\Pi_1^h(x) = \begin{cases} \frac{2}{65}\,x + \frac{5}{26} & \text{si } x \in [x_0,x_1] = [-5,-3] \\ \frac{1}{5}\,x + \frac{7}{10} & \text{si } x \in [x_1,x_2] = [-3,-1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [x_2,x_3] = [-1,1] \\ -\frac{1}{5}\,x + \frac{7}{10} & \text{si } x \in [x_3,x_4] = [1,3] \\ -\frac{2}{65}\,x + \frac{5}{26} & \text{si } x \in [x_4,x_5] = [3,5] \end{cases}$$



Interpolation par intervalle de la fonction de Runge par Π_1^h avec $h=2$

Quand le nombre de sous-intervalles augmente, et que h diminue, l'approximation est meilleure. Si $n = 10$, on a 10 sous-intervalles de longueur $h = 1$. Le polynôme d'interpolation est donné par

$$\Pi_1^h(x) = \begin{cases} \frac{9x+62}{442} & \text{si } x \in [x_0, x_1] = [-5, -4] \\ \frac{7x+38}{170} & \text{si } x \in [x_1, x_2] = [-4, -3] \\ \frac{x+4}{10} & \text{si } x \in [x_2, x_3] = [-3, -2] \\ \frac{3x+8}{10} & \text{si } x \in [x_3, x_4] = [-2, -1] \\ \frac{x+2}{2} & \text{si } x \in [x_4, x_5] = [-1, 0] \\ \frac{2-x}{2} & \text{si } x \in [x_5, x_6] = [0, 1] \\ \frac{8-3x}{10} & \text{si } x \in [x_6, x_7] = [1, 2] \\ \frac{4-x}{10} & \text{si } x \in [x_7, x_8] = [2, 3] \\ \frac{38-7x}{170} & \text{si } x \in [x_8, x_9] = [3, 4] \\ \frac{62-9x}{442} & \text{si } x \in [x_9, x_{10}] = [4, 5] \end{cases}$$



Interpolation par intervalles de la fonction de Runge par Π_1^h avec $h = 1$

Nous notons qu'il n'y a pas d'oscillations près des extrémités de l'intervalle, contrairement au cas de l'interpolation *globale* (i.e. avec un polynôme d'interpolation défini sur tout l'intervalle).