حل تمارين سلسلة الأعمال رقم 01.

التمرين 01:

1- كتابة جدول الحقيقة للقضايا.

P	Q	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	(3) $P\wedge(P\vee Q)$	(4) $P\vee(P\wedge Q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0

P	$\bar{P}$	(2) $P\wedge\bar{P}$	(1) $P\vee\bar{P}$
1	0	0	1
0	1	0	1

الإستنتاج:

القضيتان (3) و(4) متكافئتان لأن لهما نفس الحكم (صحيحتان وخاطئتان معًا).

2- إثبات أن الاستلزام المنطقي غير تجميعي باستعمال جدول الحقيقة:

P	Q	R	$Q\Rightarrow R$	$P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)$	$P\Rightarrow Q$	$(P\Rightarrow Q)\Rightarrow R$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0

تذكير: الاستلزام خاطئ في حالة واحدة وهي الصحيح يستلزم الخاطئ.

- من جدول الحقيقة نلاحظ أن القضيتان $P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)$ و $(P\Rightarrow Q)\Rightarrow R$ ليس لهما نفس الحكم دومًا إذن هما غير متكافئتان.

التمرين 02: كتابة القضايا بدلالة المكممات:

1) نضع J: مجموعة طلبة جامعة جيجل

B: مجموعة مصارعي جامعة بجاية

$P(x,y)$: قضية تعني x فاز على y.

إذن القضية (1) تكتب من الشكل: $\exists x\in J,\ \forall y\in B:\ P(x,y)$.

2) (f متزايد تماما على $\mathbb{R}$) $\equiv$ $\left(\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\right)$

التمرين 03:

1- القضية (1) صحيحة لأن:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ 1+|x|\geq 2 \Rightarrow |x|\geq 2-1$$
$$\Rightarrow |x|\geq 1>0$$
$$\Rightarrow |x|>0$$

- القضية (2) صحيحة لأنه

$$\exists 4\in\mathbb{R}:\ \underbrace{\underbrace{1+|4|=5\geq 2}_{V}\ \vee\ \underbrace{|4|<0}_{F}}_{V}$$

2- نفي القضية (1) هو :

$$\overline{(1)} \equiv \overline{(\forall x \in \mathbb{R} : 1+|x| \geq 2 \Rightarrow |x|>0)}$$
$$\equiv \exists x\in\mathbb{R} : \overline{1+|x|\geq 2 \Rightarrow |x|>0}$$
$$\equiv \exists x \in \mathbb{R} : 1+|x|\geq 2 \wedge |x| \leq 0$$

$(\overline{P\Rightarrow Q} \equiv P\wedge\overline{Q})$

- نفي القضية (2) هو :

$$\overline{(2)} \equiv \overline{\exists x\in\mathbb{R} : 1+|x|\geq 2 \vee |x|<0}$$
$$\equiv \forall x\in\mathbb{R} : \overline{1+|x|\geq 2 \vee |x|<0}$$
$$\equiv \forall x\in\mathbb{R} : 1+|x|<2 \wedge |x|\geq 0$$

$(\overline{P\vee Q} \equiv \overline{P}\wedge\overline{Q})$

- عكس نقيض القضية (1) هو :

$$\forall x\in\mathbb{R} : \overline{|x|>0} \Longrightarrow \overline{1+|x|\geq 2} \equiv \forall x\in\mathbb{R} : |x|\leq 0 \Rightarrow 1+|x|<2$$

3- كتابة القضية (2) على شكل إستلزام منطقي : نعلم أن $(P\vee Q \equiv \overline{P}\Rightarrow Q)$ إذن

$$(2) \equiv \exists x\in\mathbb{R} : \overline{1+|x|\geq 2} \Rightarrow |x|<0$$
$$\equiv \exists x\in\mathbb{R} : 1+|x|<2 \Rightarrow |x|<0$$

التمرين 04 : البرهان بدون إستعمال جدول الحقيقة :

(3) $\overline{P}\Rightarrow Q \equiv \overline{\overline{P}}\vee Q$
$\equiv P\vee Q$

(4) $(\overline{Q}\Rightarrow P)\wedge(Q\Rightarrow P) \equiv (\overline{\overline{Q}}\vee P)\wedge(\overline{Q}\vee P)$ // $P\Rightarrow Q \equiv \overline{P}\vee Q$
$\equiv (Q\vee P)\wedge(\overline{Q}\vee P)$ // $\overline{\overline{Q}}\equiv Q$
$\equiv \underbrace{(Q\wedge\overline{Q})}_{\text{خاطئة}}\vee P$
$\equiv P$

التمرين 05 : (طرق البراهين).

1- إثبات أنه : إذا كان $n\in\mathbb{N}$ فردي فإن $n(n+2)$ فردي : نستعمل البرهان المباشر.
لدينا :

$n\in\mathbb{N}$ فردي $\Rightarrow n=2k+1;\ k\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow n(n+2) = (2k+1)(2k+1+2)$
$= (2k+1)(2k+3)$
$= 4k^2+8k+3 = 2(\underbrace{2k^2+4k+1}_{k'})+1,\ k'\in\mathbb{N}$
$= 2k'+1;\ k'\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n(n+2)\in\mathbb{N}$ فردي

2- إثبات أن $\sqrt{29}$ عدد صم : نستعمل البرهان بالنفي (الخلف).
نفرض أن $\sqrt{29}$ ليس عدد صم أي $\sqrt{29}$ عدد ناطق

ومنه $\sqrt{89} = \frac{p}{q}$; $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ و p و q أوليان فيما بينهما.

وعليه $89 = \frac{p^2}{q^2}$

ومنه $p^2 = 89q^2 \quad \ldots\ldots (1)$

إذن 89 يقسم p^2 وبما أن 89 أولي فإن 89 يقسم p وينتج أن $p = 89k ; k \in \mathbb{Z}^*$

وبالتعويض في (1) نجد $89^2k^2 = 89q^2$

ومنه 89 يقسم q^2 وبما أن 89 أولي فإن 89 يقسم q وهذا تناقض مع كون p و q أوليان فيما بينهما (89 يقسم p و يقسم q).

3- إثبات أنه إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن n^2 قابل للقسمة على 4 أو $n^2 - 1$ قابل للقسمة على 4:

نستعمل البرهان بفصل الحالات و نميز حالتين:

- إذا كان $n \in \mathbb{N}$ زوجي: لدينا $n = 2k, k \in \mathbb{N}$

ومنه $n^2 = 4k^2$

وعليه n^2 قابل للقسمة على 4. و هـ م.

- إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فردي: لدينا $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$

ومنه $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

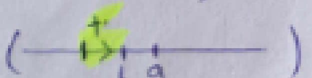
وعليه $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k)$

إذن $n^2 - 1$ قابل للقسمة على 4. و هـ م.

4- إثبات أن: $(\forall \varepsilon > 0 : a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$

نستعمل البرهان بالعكس النقيض أي نبرهن أن:

$$a > b \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : a \geq b + \varepsilon$$



ليكن a و b عددان حقيقيان بحيث $a > b$.

ومنه $\exists \varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0 ; a > b + \frac{a-b}{2}$

إذن $\exists \varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0 : a \geq b + \varepsilon$ و هـ م.

5- إثبات أن $\forall n \in \mathbb{N} : |\sin(nx)| \leq n \sin x$ ، حيث $x \in [0, \pi]$.

نستعمل البرهان بالتراجع:

* من أجل $n = 0$ لدينا $\sin(0x) = \sin(0) = 0 \leq 0 \sin(x) = 0$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

** نفرض صحة الخاصية من أجل $n \geq 0$ أي $|\sin(nx)| \leq n \sin x$.

ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي

$$|\sin((n+1)x)| \leq (n+1) \sin x.$$

لـدينا

$$|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx+x)|$$

$$= |\sin(nx)\cdot\cos x + \cos(nx)\sin x|$$

(المتراجحة المثلثية) $\leq |\sin(nx)\cdot\cos x| + |\cos(nx)\cdot\sin x|$

$$= |\sin(nx)|\cdot\underbrace{|\cos x|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos nx|}_{\leq 1}\cdot|\sin x|$$

$$\leq |\sin(nx)| + |\sin x|$$

(فرضية التراجع) $\leq n\sin(nx) + |\sin x|$

$= n\sin x + \sin x$ // $x\in[0,\pi]: \sin x \geq 0 \Rightarrow |\sin x| = \sin x$

$= (n+1)\sin x$. وهو م

التمرين 06: ماسح الجدول:

(P_4)	(P_3)	(P_2)	(P_1)	الاحتمال المقترح
✗	✗	✓	✓	علامة احمد 6، علامة علي 10 و علامة سالم 16
✓	✓	✓	✗	علامة احمد 6، علامة علي 16 و علامة سالم 10
✓	✓	✗	✓	علامة احمد 10، علامة علي 6 و علامة سالم 16
✓	✓	✓	✓	علامة احمد 10، علامة علي 16 و علامة سالم 6
✓	✗	✓	✓	علامة احمد 16، علامة علي 10 و علامة سالم 6
✓	✗	✓	✓	علامة احمد 16، علامة علي 6 و علامة سالم 10

- إذا كانت القضايا الأربعة صحيحة فإن علامات كل طالب هي:
علامة احمد هي 10 وعلامة علي هي 16 وعلامة سالم هي 6 (حسب الجدول)

التمرين 07:

1- إثبات أن $A=B$: لـدينا:

$$B = \{(t+1, 4t+3);\ t\in\mathbb{R}\}$$

$x=t+1$ $= \{(x, 4x-1);\ x\in\mathbb{R}\}$ // $4t+3 = 4(t+1)-1$

$y=4x-1$ $= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y = 4x-1\}$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x-y=1\} = A$$

2- أ) $A=\{0,x\}$، نعين $P(A)$ و $P(P(A))$.

- $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{x\}, A\}$.

$$P(P(A)) = \Big\{\phi, \{\phi\}, \{\{0\}\}, \{\{x\}\}, \{A\}, \{\phi,\{0\}\}, \{\phi,\{x\}\}, \{\phi, A\}, \{\{0\},\{x\}\}, \{\{0\}, A\},$$
$$\{\{x\}, A\}, \{\phi,\{0\},\{x\}\}, \{\phi,\{0\},A\}, \{\phi,\{x\},A\}, \{\{0\},\{x\},A\}, P(A)\Big\}.$$

ع-ب - إثبات أن: $A\subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$.

$\Rightarrow$ نستعمل البرهان المباشر أي نفرض أن $A\subset B$ ونبرهن أن $C_EB\subset C_EA$

ليكن $x\in E$ لدينا:

$$x\in C_EB \Rightarrow x\notin B \overset{A\subset B}{\Longrightarrow} x\notin A \Rightarrow x\in C_EA$$

ومنه $C_EB\subset C_EA$ وهو م

$\Leftarrow$ نستعمل البرهان بالنفي (الخلف) أي نفرض أن نفي الاستلزام صحيح أي $C_EB\subset C_EA$ و $A\not\subset B$ ومنه:

$$\exists x: x\in A \wedge x\notin B \Rightarrow \exists x: x\in A \wedge x\in C_EB.$$

$$\overset{C_EB\subset C_EA}{\Longrightarrow} \exists x: x\in A \wedge x\in C_EA$$

$$\Rightarrow \exists x: x\in A \wedge x\notin A$$ تناقض.

ومنه الاستلزام صحيح.

3-ج: $A_n =]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}], n\in\mathbb{N}^*$:

- إثبات أن $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تجزئة لـ $]0,1]$.

لدينا:

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تجزئة لـ $]0,1]$ $\Leftrightarrow$ a- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تغطية أي $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n =]0,1]$

b- $\forall n,m\in\mathbb{N}^*: n\neq m \Rightarrow A_n\cap A_m = \phi$.

a) $\subseteq$ لدينا:

$$x\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*: x\in A_n$$
$$\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*: \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \quad // A_n =]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}].$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \leq 1$$
$$\Rightarrow x\in]0,1]$$ وهو م.

$\supseteq$ لدينا:

$$x\in]0,1] \Rightarrow 0 < x \leq 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x} \geq 1$$
$$\Rightarrow 1\leq [\tfrac{1}{x}] \leq \tfrac{1}{x} < [\tfrac{1}{x}]+1$$; $[\cdot]$ هو الجزء الصحيح --- (I)

$(I) \Rightarrow \exists n=\left[\frac{1}{x}\right]\in\mathbb{N}^* : \; n \leqslant \frac{1}{x} < n+1$

المقلوب $\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}^* : \; \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}^* : \; x\in A_n$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. وهو م

b) لإثبات b) نستعمل البرهان بالعكس النقيض أي نفرض أن

$A_n\cap A_m \neq \emptyset \Rightarrow n=m$

لدينا: $A_n\cap A_m \neq\emptyset \Rightarrow \exists x : \; x\in A_n \wedge x\in A_m$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n} \;\wedge\; \frac{1}{m+1} < x \leqslant \frac{1}{m}$

$\Rightarrow n \leqslant \frac{1}{x} < n+1 \;\wedge\; m \leqslant \frac{1}{x} \leqslant m+1$

$\Rightarrow n = m = \left[\frac{1}{x}\right]$. وهو م.

التمرين 08:

(الفرق) $A-B=\{x\in E; x\in A \wedge x\notin B\}$

(الفرق التناظري). $A\Delta B = (A\cup B) - A\cap B$.

1- تعيين المجموعات

* $A - C_E A = \{x\in E;\; x\in A \wedge x\notin C_E A\} = \{x\in E; x\in A\} = A$.
* $A - A = \{x\in E:\; x\in A \wedge x\notin A\} = \emptyset$.
* $A\Delta E = (A\cup E)-(A\cap E) = E - A = C_E A$.
* $A\Delta C_E A = (A\cup C_E A)-(A\cap C_E A) = E - \emptyset = E$.
* $A\Delta A = (A\cup A)-(A\cap A) = A - A = \emptyset$.

2- إثبات أن $A\Delta B = B \Leftrightarrow A=\emptyset$

$\Leftarrow$ نستعمل البرهان المباشر: نفرض أن $A=\emptyset$ ونبرهن أن $A\Delta B = B$

لدينا $A\Delta B = \emptyset\Delta B = (\emptyset\cup B)-(\emptyset\cap B) = B - \emptyset = B$ وهو م

$\Rightarrow$ نفرض بالنفي أن $A\Delta B = B \wedge A \neq \emptyset$ ومنه نميز حالتين

أ) حالة $A\cap B=\emptyset$: لدينا $A\Delta B = A\cup B - A\cap B = A\cup B = B$

ومنه $A\subset B$

لكن $A\neq\emptyset$ ومنه $A\cap B\neq\emptyset$ تناقض

ب) وحالة $A\cap B\neq\emptyset$: ومنه $\exists x : x\in A\cap B$

وعليه $\exists x = x\in B \wedge x\notin (A\cup B)-(\underline{A\cap B})$

إذن $\exists x : x\in B \wedge x\notin A\Delta B$ وهو تناقض $B=A\Delta B$.

التمرين 09:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

- 1: $(1,0) \in D$ لأن $1^2+0^2 = 1 \leq 1$

$(0,1) \in D$ لأن $0^2+1^2 = 1 \leq 1$

$(1,1) \notin D$ لأن $1^2+1^2 = 2 > 1$

2- إثبات أن D لا يمكن كتابتها على شكل جداء ديكارتي لمجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$:

نفرض بالنفي أن $D = A \times B$ حيث $A \subset \mathbb{R}$ و $B \subset \mathbb{R}$

لدينا $(1,0) \in D = A\times B$ ومنه $1 \in A$ و $0 \in B$ .... (1)

و $(0,1) \in D = A \times B$ ومنه $0 \in A$ و $1 \in B$ .... (2)

من (1) و (2) نجد أن $1 \in A$ و $1 \in B$.

ومنه $(1,1) \in A \times B = D$ وهذا تناقض لأن $(1,1) \notin D$.