التمرين 1 :

a) φ خطي $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \forall f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g) & (1) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \varphi(\lambda . f) = \lambda . \varphi(f) & (2) \end{array} \right.$

(1)
$$\varphi(f+g) = (f+g)(0) + (f+g)(1)X + (f+g)(-1)X^2$$
$$= f(0)+g(0) + (f(1)+g(1))X + (f(-1)+g(-1))X^2$$
$$= f(0) + f(1)X + f(-1)X^2 + g(0) + g(1)X + g(-1)X^2 = \varphi(f) + \varphi(g)$$

(2)
$$\varphi(\lambda . f) = (\lambda . f)(0) + (\lambda . f)(1)X + (\lambda f)(-1)X^2$$
$$= \lambda . f(0) + \lambda . f(1)X + \lambda . f(-1)X^2 = \lambda . (f(0) + f(1)X + f(-1)X^2)$$
$$= \lambda . \varphi(f)$$

اذن φ تطبيق خطي من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ في $\mathbb{R}_2[X]$.

b) $f \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(f) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$$f(x) = x(x^2-1) \Rightarrow f(0) = f(1) = f(-1) = 0 \Rightarrow \varphi(f) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

بما أن φ متباين $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$

لكن $f \in \operatorname{Ker}\varphi$ و $f \neq 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ اذن φ غير متباين

c) $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ حيث $f(x) = a + \left(\left(\frac{b+c-2a}{2}\right)x + \frac{b-c}{2}\right)x$

واضح أن $f(0) = a$ ، $f(1) = b$ و $f(-1) = c$

اذن $\varphi(f) = a + bX + cX^2$

بما أن من اجل كل $p = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}[X]$ يوجد $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

بحيث $\varphi(f) = p$ اذن التطبيق φ غامر .

التمرين 2 :

1- f تطبيق خطي داخلي $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \forall (p,q) \in \mathbb{R}_3[X] : f(p+q) = f(p) + f(q) & (i) \\ \forall (\lambda, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_3[X] : f(\lambda . p) = \lambda . f(p) & (ii) \\ \forall p \in \mathbb{R}_3[X] : f(p) \in \mathbb{R}_3[X] & (iii) \end{array} \right.$

(i)
$$f(p+q) = (p+q) + (1-X)(p+q)' = p+q+(1-X)(p'+q')$$
$$= p + (1-X)p' + q + (1-X)q' = f(p) + f(q)$$

(ii)
$$f(\lambda p) = \lambda p + (1-X)(\lambda p)' = \lambda . p + (1-X)(\lambda . p')$$
$$= \lambda (p + (1-X)p') = \lambda f(p)$$

(iii)
$$p \in \mathbb{R}_3[X] \Rightarrow p(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 \Rightarrow p'(X) = b + 2cX + 3dX^2$$
$$f(p) = p + (1-X)p' = a + bX + cX^2 + dX^3 + (1-X)(b + 2cX + 3dX^2)$$
$$= (a+b) + 2cX + (3d-c)X^2 - 2dX^3 \Rightarrow f(p) \in \mathbb{R}_3[X] \quad (*)$$

اذن f تطبيق خطي داخلي في $\mathbb{R}_3[X]$.

2- تعيين أساس لـ $\operatorname{Im} f$ وبعده.

الطريقة الأولى: مما سبق

$$f(p) = a + b + 2cX + (3d-c)X^2 - 2dX^3 = (a+b).1 + c(2X - X^2)$$
$$+ d.(3X^2 - 2X^3) \Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle 1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3 \rangle$$

الطريقة الثانية: بما أن $\mathbb{R}_3[X] = \langle 1, X, X^2, X^3 \rangle \Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) \rangle$

$$f(1) = 1, \; f(X) = 1, \; f(X^2) = 2X - X^2, \; f(X^3) = 3X^2 - 2X^3$$

بما أن $\{1, 2X-X^2, 3X^2-2X^3\}$ لها درجات مختلفة مثنى مثنى فهي جملة حرة ومنه $B_1=\{1, 2X-X^2, 3X^2-2X^3\}$ أساس لـ $\operatorname{Im} f$

وبالتالي $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{card} B_1 = 3$

تعيين أساس لـ $\operatorname{Ker} f$ وبعده.

من مبرهنة الأبعاد ($\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$) نجد

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \operatorname{Im} f = 4-3 = 1$$

إذن أي أساس لـ $\operatorname{Ker} f$ يتكون من شعاع واحد

وبما أن $f(1) = f(X) = 1 \Rightarrow f(1-X) = 0$

$\Leftarrow 1-X \in \operatorname{Ker} f$ ومنه $B_2 = \{1-X\}$ أساس لـ $\operatorname{Ker} f$

ملاحظة: يمكن تعيين أساس لـ $\operatorname{Ker} f$ من المعادلة

$f(P) = 0$ ومن $(*)$ نجد $b=-a$ ، $c=0$ ، $d=0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \langle 1-X \rangle$

3- التطبيق f غير متباين لأن $\operatorname{Ker} f = \langle 1-X \rangle$

وغير غامر لأن $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}_3[X]$ ومنه $\dim \operatorname{Im} f \neq \dim \mathbb{R}_3[X]$

4- صحيحة $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \quad (1)$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{card}(B_1 \cup B_2) = \dim \mathbb{R}_3[X] \quad (2) \\ B_1 \cup B_2 \text{ حرة } \quad (3) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \mathbb{R}_3[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$$

لدينا $B_1 \cup B_2 = \{1, 2X-X^2, 3X^2-2X^3, 1-X\} \Leftarrow$

$\operatorname{card} B_1 \cup B_2 = 4$

وكذلك $B_1 \cup B_2$ حرة لأنها ذات درجات مختلفة مثنى مثنى إذن

$$\mathbb{R}_3[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$$

التمرين 3:

1- بما أن $\mathbb{R}^3$ هو نفسه منبع إذن f تشاكل داخلي $B' = \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} \Leftarrow$ أساس لـ $\mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{card} B' = \dim \mathbb{R}^3 \quad (1) \\ B' \text{ حرة } \quad (2) \end{array}\right.$

(1) $B' = \{-7e_1-6e_2, 8e_1+7e_2, 6e_1+6e_2-e_3\} \Rightarrow \operatorname{card} B' = 3$

الاستقلال الخطي لـ B'

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1(-7e_1-6e_2) + \lambda_2(8e_1+7e_2) + \lambda_3(6e_1+6e_2-e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow (-7\lambda_1+8\lambda_2+6\lambda_3)e_1 + (-6\lambda_1+7\lambda_2+6\lambda_3)e_2 - \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

بما أن $\{e_1, e_2, e_3\}$ حرة إذن:

$$\left.\begin{array}{l} -7\lambda_1+8\lambda_2+6\lambda_3=0 \\ -6\lambda_1+7\lambda_2+6\lambda_3=0 \\ -\lambda_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -7\lambda_1+8\lambda_2=0 \\ -6\lambda_1+7\lambda_2=0 \\ \lambda_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=\lambda_2=0 \\ \wedge \\ \lambda_3=0 \end{array}\right.$$

إذن B' حرة فهي أساس لـ $\mathbb{R}^3$ ومنه f تشاكل داخلي

2- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) = x(-7e_1-6e_2)$

$+ y(8e_1+7e_2) + z(6e_1+6e_2-e_3) = (-7x+8y+6z, -6x+7y+6z, -z)$

$fof(e_1) = f(f(e_1)) = f(-7e_1-6e_2) = -7f(e_1)-6f(e_2) = -7(-7e_1-6e_2)-6(8e_1+7e_2) = e_1$

$fof(e_2) = f(f(e_2)) = f(8e_1+7e_2) = 8f(e_1)+7f(e_2) = 8(-7e_1-6e_2)+7(8e_1+7e_2) = e_2$

$fof(e_3) = f(f(e_3)) = f(6e_1+6e_2-e_3) = 6f(e_1)+6f(e_2)-f(e_3) = 6(-7e_1-6e_2)+6(8e_1+7e_2)-(6e_1+6e_2-e_3) = e_3$

اذن: $\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : \quad fof(x,y,z) = (x,y,z) = id_{\mathbb{R}^3}$

ومنه التطبيق العكسي f^{-1} هو f.

التمرين 4:

1- تعيين أساس لـ $V = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x-2y+z = y-2t = 0\}$

$(x,y,z,t)\in V \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-2t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2t \\ x-4t+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2t \\ z=-x+4t \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y,z,t) = (x,2t,-x+4t,t) = x(1,0,-1,0)+t(0,2,4,1)$

$\Rightarrow V = \langle (1,0,-1,0),(0,2,4,1) \rangle$

من السهل اثبات ان $\{U_1=(1,0,-1,0), U_2=(0,2,4,1)\}$ حرة فهي اساس لـ V و $\dim V = 2$

2- تعيين تطبيق من $\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}^4$ بحيث $Im f = V$ و $Ker f = \{(x,y,z);\ x=y=z\}$

لدينا $Ker f = \langle (1,1,1) \rangle$

يمكن تعيين عدة تطبيقات خطية فمثلا إذا اخذنا الأساس القانوني $\{e_1,e_2,e_3\}$ لـ $\mathbb{R}^3$ فنعرف f بـ:

$f(1,1,1) = (0,0,0)$, $f(e_2) = U_1$ و $f(e_3) = U_2$

مع اثبات ان $B' = \{(1,1,1), e_2, e_3\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$

$\forall(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3 : \lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow$

$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1+\lambda_3=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

اذن B' أساس لـ $\mathbb{R}^3$ ومنه معرف جيدا.

التمرين 5:

1- نفرض ان $Im f = Ker f \Rightarrow \dim Im f = \dim Ker f$ ولدينا $\dim E = \dim Ker f + \dim Im f$

اذن $\dim Im f = 2$، نفرض ان $B = \{V_1,V_2\}$ أساس لـ $Im f$

$V_1 \in Im f \Rightarrow \exists U_1 \in E : V_1 = f(U_1) \ \wedge V_1\in Ker f \Rightarrow f(V_1) = 0_E$

$V_2 \in Im f \Rightarrow \exists U_2 \in E : V_2 = f(U_2) \ \wedge V_2\in Ker f \Rightarrow f(V_2) = 0_E$

لإثبات ان $\{V_1,V_2,U_1,U_2\}$ أساس لـ E يكفي اثبات انها حرة

$\forall(\lambda_1,\lambda_2,\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^4 : \lambda_1V_1+\lambda_2V_2+\alpha_1U_1+\alpha_2U_2 = 0_E \Rightarrow$

$\lambda_1 f(V_1)+\lambda_2 f(V_2)+\alpha_1 f(U_1)+\alpha_2 f(U_2) = \alpha_1V_1+\alpha_2V_2 = f(0_E) = 0_E$

$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$

اذن $\lambda_1V_1+\lambda_2V_2 = 0_E \Leftarrow \lambda_1=\lambda_2=0$ ومنه $\{V_1,V_2,U_1,U_2\}$ أساس لـ E.

$\forall x\in E, \exists(\lambda_1,\lambda_2,\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^4 : x = \lambda_1V_1+\lambda_2V_2+\alpha_1U_1+\alpha_2U_2 \Rightarrow$

$fof(x) = \lambda_1 fof(V_1)+\lambda_2 fof(V_2)+\alpha_1 fof(U_1)+\alpha_2 fof(U_2) = 0_E \Rightarrow fof = 0$

2- نفرض ان $\dim Im f = 2$ و $fof = 0$

لدينا $B_1 = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ أساس لـ E بحيث

$B = \{f(e_1), f(e_2)\}$ أساس لـ $Im f$

العلم $E = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle \Longleftarrow Im f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) \rangle$

لدينا: X من $Ker f \iff f(X) = O_E$

$f(f(e_1)) = f \circ f(e_1) = O_E \Rightarrow f(e_1) \in Ker f$

$f(f(e_2)) = f \circ f(e_2) = O_E \Rightarrow f(e_2) \in Ker f$

$\dim Ker f = \dim E - \dim Im f = 2$

$$\left.\begin{array}{ll} B \subset Ker f & (1) \\ card\, B = \dim Ker f & (2) \\ \text{B حرة} & (3) \end{array}\right\} \iff \text{B أساس لـ } Ker f$$

والشروط كلها محققة اذن B اساس لـ $Ker f$

لدينا $Im f = \langle f(e_1), f(e_2) \rangle = Ker f$

$\Longrightarrow Im f = Ker f$

وهو المطلوب.