الجبر 1 السلسلة 1

التمــرين الأول :

لتكن P, Q, R ثلاث قضايا

اكتب جدول الحقيقة للقضايا التالية

$$(1)\ \ P \vee \bar{P}\ \ ,(2)\ \ \ P \wedge \bar{P}\ \ ,(3)\ \ [P \wedge (P \vee Q)]\ \ ,(4)\ \ [P \vee (P \wedge Q)].$$

ماذا تستنتج؟

التمــرين الثاني :

هل القضايا التالية صحيحة ام خاطئة:

$$(1)\ \ \exists x \in \mathbb{Q}: [x + 1 < 0]\ \ ; (2)\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}: [n + m = 7]$$

$$(3) \forall x \in]0,8] : \left(x > \frac{1}{x} \right) ; (4)\ \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: [1 + xy = x + y \Rightarrow x = 1 \vee y = 1]$$

التمــرين الثالث :

عين نفي القضايا التالية ثم بين ان كانت صحيحة ام خاطئة :

$$(1)\ \ \forall x \in \mathbb{R}: \left[\sqrt{1 + x^2} - |x| \geq 0\right]\ \ , (2)\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \exists y \in \mathbb{R}: y < x$$

$$(3)\ \ \forall x \in \mathbb{R}: [(x^2 - |x| + 1 \geq 0) \wedge (|x| \leq 1)]\ \ , (4)\ \ \ \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+: \frac{x^{2n}}{1 + x} > 1$$

التمــرين الرابع:

استخدم البرهان حالة بحالة في اثبات صحة القضايا التالية

$$(1)\ \ \forall n \in \mathbb{N}: \left[n^3 - n \text{ قاسم ل } 3\right]\ \ , (2)\ \ \forall x \in \mathbb{R}: x - \sqrt{1 + x^2} < 0$$

$$(3)\ \ \forall x \in \mathbb{R}: [|x - 1| \leq x^2 - x + 1]$$

التمــرين الخامس :

لتكن القضية التالية:

$$(P)\ \ \forall x \in \mathbb{R}^*: \left[\left(\frac{x + 1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{x + 1}{x}\right) - 5 > \Rightarrow x \leq 0\right]$$

1- اعطي عكس نقيض القضية (P)

2- هل القضية (P) صحيحة ام خاطئة؟ علل اجابتك

3- اعطي نفي القضية (P)

نفس الاسئلة بالنسبة للقضية : $(Q)\ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2: [x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$ حيث $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2}$

التمــرين السادس:

استخدم البرهان بالمثال المضاد في اثبات خطأ القضايا التالية

$$(1)\ \forall x \in \mathbb{R}^*: \left[x + \frac{1}{x} \geq 2\right]\ ,(2)\ \forall(a,b) \in \mathbb{R}^2: \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$(3)\ \forall x \in]0,1[: \left[\frac{2x}{x^2(1-x^2)} < 1\right]$$

التمــرين السابع :

برهن مستخدما البرهان بالنفي صحة القضايا التالية :

$$(1)\ \forall x \in \mathbb{R}: [4cosx \neq x^2 - 4x + 12]\ ,(2)\ \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \notin \mathbb{N}$$

(3) ليكن ABC مثلث طول اضلاعه 6a ،4a و 3a حيث $a > 0$

برهن أن المثلثABC غير قائم الزاوية

التمــرين الثامن :

لتكن الدالتين العباريتين :

$$(1)\ \forall n \in \mathbb{N}, (P_n) : [(1+x)^n \geq 1 + nx\ , x > 0]\ ; (Q_n) \left[4^n + 1 \text{ قاسم ل } 3\right]$$

1- برهن باستخدام البرهان بالتراجع صحة القضية (P_n)

2- برهن صحة الاستلزام $(\forall n \in \mathbb{N} : Q_n \Rightarrow Q_{n+1})$

3- برهن أن القضية (Q_n) خاطئة.

التمــرين التاسع :

حصل الطلبة أحمد ، علي ، سالم على العلامات التالية: 06،10 و 16.

لتكن القضايا الأربع التالية :

علامة أحمد 06 $\Leftarrow$ علامة علي 10 (P_1)

علامة علي 6 $\Leftarrow$ علامة سالم 10 (P_2)

علامة أحمد ليست 10 $\Leftarrow$ علامة علي 16 (P_3)

علامة سالم 16 $\Leftarrow$ علامة علي 06 (P_4)

املأ الجدول التالي باعتبار صحة القضية من خطئها:

الاحتمال المقترح	(P_1)	(P_2)	(P_3)	(P_4)
علامة احمد 6،علامة علي 10 و علامة سالم 16				
علامة احمد 6،علامة علي 16 و علامة سالم 10				
علامة احمد 10،علامة علي 6 و علامة سالم 16				
علامة احمد 10،علامة علي 16 و علامة سالم 6				
علامة احمد 16،علامة علي 10 و علامة سالم 6				
علامة احمد 16،علامة علي 6 و علامة سالم 10				

اذا كانت القضايا الاربعة صحيحة عين علامة كل طالب.

السلسلة 02 (المجموعات،العلاقات و التطبيقات)

التــمــريــن 1:

لتكن B, A و D اجزاء من E

1- برهن تكافؤ القضيتين

$$A \cup B = A \cap D \Leftrightarrow B \subset A \subset D$$

2- نعرف الفرق بين المجموعات بـ $A - B = \{x \in E, x \in A \wedge x \notin B\}$

و الفرق التناظري بـ: $A\Delta B = (A \cup B) - (B \cap A)$

برهن مستخدما عكس النقيض القضايا التالية :

$$(1)\ \ A \cup B = B \cap A \Rightarrow A = B$$

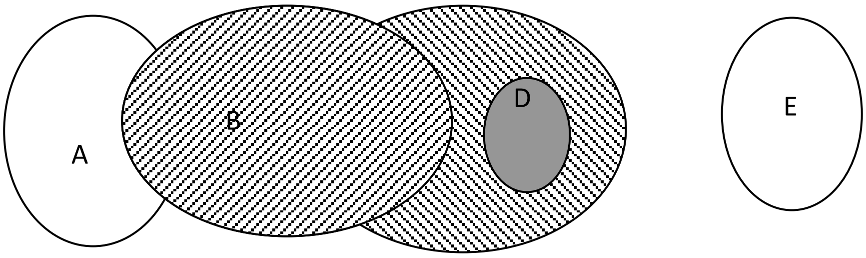
$$(2)\ \ A \cup B = A \cup D \wedge A \cap B = A \cap D \Rightarrow B = D$$

$$(3)\ \ A\Delta B = A\Delta D \Rightarrow B = D$$

التــمــريــن 2 :

لتكن $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E\}$ مبينة في الشكل.نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ على $\mathcal{M}$بـ

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}^2 : X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap B \neq \phi \ .$$



عين بيان العلاقة $\Gamma = \{(X, Y) \in \mathcal{M}^2 : X\mathcal{R}Y\}$. هل العلاقة انعكاسيه ؟ تناظرية ؟ضد تناظرية ؟متعدية ؟

التــمــريــن 3 :

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$

1- برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$

2- من اجل $a \in \mathbb{R}$ حدد عدد العناصر الموجودة في صنف التكافؤ $\dot{a}$

- يمكن استخدام جدول تغيرات الدالة xe^{-x}

التــمــريــن 4 :

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تناظرية و متعدية على E . ما رأيك في هذا البرهان ؟بين اين الخلل

$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \ car\ \mathcal{R}\ est\ symétrique$ (تناظرية)

$[\![x\mathcal{R}y\ et\ y\mathcal{R}x]\!] \Rightarrow x\mathcal{R}x\ car\ \mathcal{R}\ est\ transitive$ (متعدية)donc $\mathcal{R}$ est réflexive(انعكاسية)

التــمــريــن 5 :

لتكن $\ll$ علاقة ثنائية معرفة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$[\![(x, y) \ll (x', y') \Leftrightarrow [|x - x'| \leq y' - y]\,]\!].$$

برهن أن $\ll$ علاقة ترتيب .هل العنصرين : $(1,5)$ ، $(3,4)$ مرتبطين بالعلاقة و استنتج ان كان الترتيب كلي؟

التـمـريـن 6 :

لتكن التطبيقات التالية :

$f:\mathbb{N}\Rightarrow\mathbb{N}$ $\quad$ $g:\mathbb{N}\Rightarrow\mathbb{N}$ $\quad$ $h:]-1,1[\Rightarrow\mathbb{R}$

$n\Rightarrow f(n)=2n$ $\quad$ $n\Rightarrow g(n)=E\left(\frac{n}{2}\right)$ الجزء الصحيح E $\quad$ $x\Rightarrow h(x)=\frac{2x}{1-x^2}$.

1- عين التطبيقات gof و fog ثم قارن بينهما.

2- برهن أن التطبيق f متباين و غير غامر و أن g غامر و غير متباين.

3- برهن أن التطبيق h تقابلي و عين التطبيق العكسي h^{-1} .

توجيه : يمكن استخدام جدول التغيرات

التـمـريـن 7 :

ليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تطبيق معرف بـ $f(x)=x^2-1$

1- احسب الصورة المباشرة $f(\{-1,1\})$ ماذا تستنتج؟

2- احسب الصورة العكسية $f^{-1}(\{-2\})$ ماذا تستنتج؟

3- برهن أن $f([0,\infty[)=[-1,\infty[$

4- ليكن $g:[0,\infty[\longrightarrow[-1,\infty[$ تطبيق معرف بـ $g(x)=f(x)$

برهن أن التطبيق g تقابلي و عين التطبيق العكسي g^{-1}

التـمـريـن 8 :

ليكن التطبيق $f:E\Rightarrow F$ برهن الخواص التالية :

1- $\forall A\in\mathcal{P}(E):A\subset f^{-1}f(A)$

2- f متباين $\Leftrightarrow\forall A\in\mathcal{P}(E):A=f^{-1}f(A)$.

توجيه : لإثبات التباين نختار $f(x)=f(x'),A=\{x\},A'=\{x'\}$

التـمـريـن 9 : يترك للطالب

ليكن التطبيق $\mathcal{P}(E)\Rightarrow\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$: حيث $B\subset E\wedge A\subset E$ معرف

$\forall X\in\mathcal{P}(E):f(X)=(X\cap A,X\cap B)$

1- برهن أن التطبيق f متباين اذا و فقط اذا كانت $A\cup B=E$

2- برهن أن التطبيق f غامر اذا و فقط اذا كانت $A\cap B=\emptyset$

2- استنتج أن التطبيق f تقابلي اذا و فقط اذا كانت $B=C_EA$