جـامـعـــــــــــة الصديق بن يحي جـيـجـــــــــــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات الجبر 1

السلسلة الثانية

التمرين الاول

لتكن A, B و D ثلاثة مجموعات جزئية من E :

1) برهن التكافؤ: $[A \cup B = A \cup D$ و $A \cap B = A \cap D \Leftrightarrow B = D]$

2) حل و ناقش المعادلة $A \cup X = B$ ذات المجهول $X \in \mathcal{P}(E)$.

التمرين 2 :

لتكن A مجموعة جزئية من E .نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ على $\mathcal{P}(E)$ بـ

1) برهن أن $\mathcal{R}$ هي علاقة تكافؤ.

2) من أجل $X \in \mathcal{P}(E)$ نرمز بـ $\dot{X}$ لصنف تكافؤه .

أ) برهن أنه اذا كان $Y \in \dot{X}$ فان $Y = (X \setminus A) \cup B$ حيث $B \in \mathcal{P}(A)$.

ب) برهن أنه اذا كان $Y = (X \setminus A) \cup B$ حيث $B \in \mathcal{P}(A)$ فان $X \cup A = Y \cup A$ و استنتج $\dot{X}$.

التمرين 3 :

نعرف على $\mathbb{R}^2$ العلاقة $\precsim$ بـ :

$$\left[(x,y) \precsim (x',y') \Leftrightarrow \left(\left(x < x' ou\ x = x' et\ y \leq y'\right)\right)\right]$$

برهن أن $\precsim$ هي علاقة ترتيب . هل الترتيب كلي أم جزئي؟

التمرين 4 :

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تناظرية و متعدية على E . ماذا تقول عن البرهان التالي :

$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x\ car\ \mathcal{R}\ est\ symétrique$ (تناظرية)

$[[x\mathcal{R}y\ et\ y\mathcal{R}x]] \Rightarrow x\mathcal{R}x\ car\ \mathcal{R}\ est\ transitive$ (متعدية) donc $\mathcal{R}$ est réflexive (انعكاسية)

التمرين 5 :

لتكن التطبيقات التالية :

$f: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ $\quad g: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ $\quad h: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Z}$

$n \Rightarrow f(n) = 2n$ $\quad n \Rightarrow g(n) = E\left(\frac{n}{2}\right)$ $\quad n \Rightarrow h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}\ si\ n\ pair \\ -\frac{n+1}{2}\ si\ n\ impair \end{cases}$.

حيث $E(x)$ الجزء الصحيح للعدد x .

1) عين التطبيقات fog و gof .

2) ادرس التباين ، التغامر و التقابل للتطبيقات f و g .

3) برهن أن التطبيق h تقابلي و عين التطبيق العكسي h^{-1} .

التمرين 6 :

لتكن E,F,G ثلاثة مجموعات، $f_1, f_2: E \to F$ و $g: E \to F$. نفرض أن $g \circ f_1 = g \circ f_2$ و g متباين. برهن أن $f_1 = f_2$

التمرين 7 :

ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرف بـ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1- أحسب المجموعة $(\{-1,0,1\})$ هل التطبيق f متباين؟

2- برهن أن: $\forall x \in \mathbb{R}: |f(x)| < 1$. هل التطبيق f غامر؟. استنتج $f(\mathbb{R})$.

3- احسب المجموعات $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ و $f([-1,0[)$

Université Mohamed Seddik Benyahia Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département : Mathématiques et Informatique

Algèbre 1

Série de TD N° 2

Exercice 1 :

Soient A, B et D trois ensembles de E :

1) montrer que : $[A \cup B = A \cup D \text{ et } A \cap B = A \cap D \Leftrightarrow B = D]$

2) discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 2 :

Soit A sous ensemble de E .on définit une relation sur $\mathcal{P}(E)$

$[X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A]$

1) montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) soit $X \in \mathcal{P}(E)$ et $\dot{X}$ sa classe d'équivalence.

i) montrer que si $Y \in \dot{X}$ alors $Y = (X \setminus A) \cup \mathrm{B}$ ou $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(A)$.

ii) montrer que si $Y = (X \setminus A) \cup \mathrm{B}$ ou $B \in \mathcal{P}(A)$ alors $X \cup A = Y \cup A$ en déduire $\dot{X}$.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation

$$\left[(x,y) \lesssim (x',y') \Leftrightarrow \left(\left(x < x' ou\ (x = x' et\ y \leq y'\right)\right)\right)\right]$$

Montrer que $\lesssim$ une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation symétrique et transitive sur E. que penser vous de cette démonstration :

$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x\ car\ \mathcal{R}\ est\ symétrique$ (تناظرية)

$[\![x\mathcal{R}y\ et\ y\mathcal{R}x]\!] \Rightarrow x\mathcal{R}x\ car\ \mathcal{R}\ est\ transitive$ (متعدية)donc $\mathcal{R}$ est réflexive(انعكاسية)

Exercice 5 :

Soient les applications suivantes :

$f: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ $\qquad g: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ $\qquad h: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Z}$

$$n \Rightarrow f(n) = 2n \qquad n \Rightarrow g(n) = E\left(\frac{n}{2}\right) \qquad x \Rightarrow h(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}\ si\ n\ pair \\ -\frac{n+1}{2}\ \ si\ n\ impair \end{cases}$$

Où (x) désigne la partie entière de x.

1) préciser les applications fog et gof.

2) étudier l'injectivité , la surjectivité et la bijectivité de f et g.

3) montrer que h est bijective et donner l'application réciproque h^{-1}.

Exercice 6 :

Soient E,F,G trois ensembles , $f_1, f_2 : E \to F$ et $g: E \to F$.on suppose que , $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective. Montrer que $f_1 = f_2$.

Exercice 7 :

Soit l'application $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définis par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

2- Calculer $f(\{-1,0,1\})$. f est-elle injective ?

2- montrer que $\forall x \in \mathbb{R}: |f(x)| < 1$ en déduire l'ensemble $f(\mathbb{R})$. f est-elle surjective ?

3) Calculer $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ et $f([-1,0[)$.

Série de TD N° 3 (Groupe)

Exercice 1 :

On munit l'ensemble $G = \{a, b, c, d\}$ d'une loi de composition interne dont la table de PYTHAORE (ou table de CEYLEY) est :

$*$	a	b	c	d
a	c	a	c	a
b	a	d	c	b
c	c	c	c	c
d	a	b	c	d

La première ligne se lit : $a * a = c$, $* b = a$, $a * c = c$, $a * d = a$,...

1) cette loi possède-t-elle un élément neutre ?

2) cette loi est-elle commutative ?

3) cette loi est-elle associative ?

4) est-ce une loi de groupe ?

Exercice 2 :

On munit $G = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ de la loi de composition $\circledast$ définie par :

$\forall (a, b) \in G^2 : a \circledast b = 3ab + a + b$

1) montrer que $\circledast$ est une loi interne sur .

2) montrer que $(G, \circledast)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 :

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{n}{10^k} : n \in \mathbb{Z}\ et\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

montrer que $\mathbb{D}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 4 :

Démontrer que l'application f définit de $(\mathbb{Z}, +)$ au $(\mathbb{R}^*, \times)$ par :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{Z}: f(n) = (-1)^n$$

Est un morphisme de groupe. Déterminer le noyau et leur image.

est-elle injective, surjective est-ce est un isomorphisme ? .

Exercice 5 :

Soit $(G, \circ)$ un groupe dans lequel :

$\forall (x, y) \in G^2 : (x \circ y)^2 = x^2 \circ y^2$ ou $x^2 = x \circ x$.

Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe commutative.

السلسلة 3 (الزمرة)

التمرين 1 :

نزود المجموعة $G=\{a,b,c,d\}$ بالقانون الداخلي مبين بجدول بيتاقور أو جدول (CEYLEY) هو :

$*$	a	b	c	d
a	c	a	c	a
b	a	d	c	b
c	c	c	c	c
d	a	b	c	d

السطر الأول يقرأ : $a*a=c$ ، $a*b=a$ ، $a*c=c$ ، $a*d=a$ ، ...

1) هل يملك هذا القانون عنصر حيادي ؟

2) هل القانون تبديلي ؟

3) هل القانون تجميعي ؟

4) هل له بنية الزمرة ؟

التمرين 2 :

نزود المجموعة $G=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ بالقانون $\circledast$ المعرف بـ :

$$\forall(a,b)\in G^2 : a\circledast b=3ab+a+b$$

1) برهن أن $\circledast$ هو قانون تركيب داخلي على G.

2) برهن أن $(G,\circledast)$ هي زمرة تبديليه .

التمرين 3 :

نرمز بـ $\mathbb{D}$ لمجموعة الأعداد العشرية :

$$\mathbb{D}=\left\{\frac{n}{10^k} : n\in\mathbb{Z}\ et\ k\in\mathbb{N}\right\}$$

برهن أن زمرة جزئية من $(\mathbb{R},+)$.

التمرين 4 :

برهن أن التطبيق f المعرف من $(\mathbb{Z},+)$ في $(\mathbb{R}^*,\times)$ بـ :

$$\forall n\in\mathbb{Z} : f(n)=(-1)^n$$

هو تماثل زمري .

عين نواة و صورة التطبيق.هل هو متباين ؟ هل هو غامر ؟ هل هو تشاكل زمري؟

التمرين 5 :

لتكن $(G,\circ)$ زمرة بحيث :

$$\forall(x,y)\in G^2 : (x\circ y)^2=x^2\circ y^2 \quad \text{حيث } x^2=x\circ x.$$

برهن أن $(G,\circ)$ زمرة تبديليه .

Série de TD N° 4 (Anneaux et Corps)

Exercice 1 :

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de deux lois de composition interne :

$$\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \vartriangle b = a + b - 2 \ et \ a \odot b = a.b - 2a - 2b + 6$$

1) montrer que $(\mathbb{R},\vartriangle)$ est un groupe commutative.

2) montrer que $(\mathbb{R},\vartriangle,\odot)$ est un anneau commutative et unitaire.

3) déterminer l'ensemble des éléments inversibles $\mathbb{R}^*$ en déduire que $(\mathbb{R},\vartriangle,\odot)$ est un corps commutative.

Exercice 2 :

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ de deux lois de composition interne :

$\forall(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\oplus(x',y') = (x + x', y + y')$ et

$$(x,y)\otimes(x',y') = (x.x', y.y')$$

1) montrer que $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ est un anneau commutative et unitaire. Est-il intègre ?

Exercice 3 :

Soit l'ensemble $A = \left\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z} \ et \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

≺ montrer que A est un sous anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.

≺≺ montrer que l'ensemble des éléments inversibles $A^* = \{\pm 2^k ; k \in \mathbb{Z}\}$.

≺≺≺ *A est-il un sous-corps ?*

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par :

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow n - m \ est \ un \ multiple \ de \ 5$$

Soit $G = \mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4}\}$ l'ensemble d'équivalence de $\mathcal{R}$ munit des deux lois $\dot{+}$ et $\dot{\times}$:

$\forall(\dot{x},\dot{y}) \in (\mathbb{Z}/\mathcal{R})^2$: $\dot{x}\dot{+}\dot{y} = \overset{\cdot}{\overbrace{x+y}}$ et $\dot{x} \dot{\times} \dot{y} = \overset{\cdot}{\overbrace{x \times y}}$

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$					
$\dot{1}$					
$\dot{2}$					
$\dot{3}$					
$\dot{4}$					

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$					
$\dot{1}$					
$\dot{2}$					
$\dot{3}$					
$\dot{4}$					

1) Remplirai les deux tableaux et vérifier que $(G,\dot{+})$ est un groupe commutative.

2) montrer que $(G,\dot{+},\dot{\times})$ est un anneau unitaire .est- il intègre ?

3) déterminer les éléments inversibles en déduire si $(G,\dot{+},\dot{\times})$ est corps commutative ?

Refaire la solution d'exercice pour : $n\mathcal{R}m \Leftrightarrow n - m \ est \ un \ multiple \ de \ 6$

السلسلة 4 (الحلقات و الحقول)

التمرين 1 :

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانوني التركيب الداخلي :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2: a\vartriangle b=a+b-2 \text{ و } a\odot b=a.b-2a-2b+6$$

1) برهن أن $(\mathbb{R},\vartriangle)$ زمرة تبديليه .

2) برهن أن $(\mathbb{R},\vartriangle,\odot)$ حلقة تبديليه واحدية .

3) عين مجموعة العناصر القابلة للقلب $\mathbb{R}^*$ و استنتج أن $(\mathbb{R},\vartriangle,\odot)$ حقل تبديلي .

التمرين 2 :

نزود المجموعة $\mathbb{R}^2$ بقانوني التركيب الداخلي :

$$\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2: (x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')$$
$$\text{و } (x,y)\otimes(x',y')=(x.x',y.y')$$

برهن أن $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ حلقة تبديليه واحديه . هل هي تامة؟

التمرين 3 :

لتكن المجموعة $A=\left\{\frac{m}{2^n}: m\in\mathbb{Z}\ et\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

➢برهن أن A حلقة جزئية من $(\mathbb{Q},+,\times)$. .

➢➢برهن أن مجموعة العناصر القابلة للقلب هي $A^*=\{\pm 2^k; k\in\mathbb{Z}\}$.

➢➢➢هل A حقل جزئي ؟

التمرين 4 :

نزود $\mathbb{Z}$ بعلاقة التكافؤ $\mathcal{R}$ المعرفة بـ :

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow \left[5 \text{ مضاعف للعدد } (n-m)\right]$$

لتكن $G=\mathbb{Z}/\mathcal{R}=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4}\}$ مجموعة اصناف التكافؤ العلاقة $\mathcal{R}$ مزودة بالقانوني $\dot{+}$ و $\dot{\times}$:

$$\forall(\dot{x},\dot{y})\in(\mathbb{Z}/\mathcal{R})^2: \dot{x}\dot{+}\dot{y}=\overset{\cdot}{\overbrace{x+y}} \quad et \quad \dot{x}\,\dot{\times}\,\dot{y}=\overset{\cdot}{\overbrace{x\times y}}$$

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$					
$\dot{1}$					
$\dot{2}$					
$\dot{3}$					
$\dot{4}$					

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$					
$\dot{1}$					
$\dot{2}$					
$\dot{3}$					
$\dot{4}$					

1) أملأ الجدولين و تأكد أن $(G,\dot{+})$ زمرة تبديليه .

2) برهن أن $(G,\dot{+},\dot{\times})$ حلقة تبديليه واحديه . هل هي تامة ؟

3) عين العناصر القابلة للقلب و استنتج أن كان $(G,\dot{+},\dot{\times})$ حقل تبديلي ؟

* اعد الاجابة على الأسئلة من اجل العلاقة $n\mathcal{R}m \Leftrightarrow \left[6 \text{ مضاعف للعدد } (n-m)\right]$