Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

Les suites et les séries jouent un rôle essentiel en analyse mathématique, avec la notion de convergence qui leur est étroitement liée. Plusieurs fonctions fondamentales sont obtenues comme limite de suites de fonctions ou comme somme d'une série de fonctions. L'étude de la continuité et de la dérivabilité de telles fonctions conduit nécessairement à la notion de convergence uniforme (voir $[7], [10-12]$).

3.1 Suites de fonctions

Définition 3.1.1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est un corps réel ou complexe.*
On appelle suite de fonctions sur I, toute application f telle que

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ n & \longmapsto & f(n) := f_n \end{array}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ telle que

$$\begin{array}{rcl} f_n : \ I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f_n(x). \end{array}$$

3.1.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 3.1.2 *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (en abrégé C.S) vers f sur I si et seulement si*

$$\forall x \in I, \ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ceci se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \ \exists \eta(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq \eta(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemples:

a) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Pour $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1.$$

- Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

b) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto f_n(x) = nxe^{-nx^2} + x.$$

Pour chaque x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 3.1.3 ***(Norme de convergence uniforme)***
On appelle norme de convergence uniforme sur I l'application notée par $\|.\|$ définie par:

$$\begin{array}{rcl} \|.\| : \mathcal{F}(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \|f\| = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|. \end{array}$$

Définition 3.1.4 ***(Convergence uniforme d'une suite de fonctions)***
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (en abrégé C.U) vers f sur I et on note:

$$f_n \rightrightarrows f \quad sur\ I \quad ou \quad f_n \overrightarrow{c.u} f \quad sur\ I,$$

si et seulement si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *indépendant de $x \in I$, tel que*

$$n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon,$$

ou

$$n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ou

$$n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemples:
Etudions la convergence simple et uniforme de $f_n(x) = x^n$ sur $I = [0, 1]$, $I = [0, a],\ 0 < a < 1$. En effet,
i) Sur $I = [0, 1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \le x < 1, \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

Calculons $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$, on a

- Si $0 \le x < 1$, on a $|f_n(x) - f(x)| = |x^n| = x^n$, donc

$$\sup_{0\le x<1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0\le x<1} x^n = 1.$$

- Si $x = 1$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

  Ainsi

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

  Par conséquent, f_n ne converge pas uniformement vers f sur $I = [0, 1]$.

On déduit que f_n ne converge pas uniformement vers f même si $I = [0, 1[$ car

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 1 \neq 0.$$

ii) Si $I = [0, a]$, avec $0 < a < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0.$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Par conséquent, f_n converge uniformement vers f sur $I = [0, a]$ avec $0 < a < 1$.

Proposition 3.1.1 *Si la suite f_n converge uniformement vers f sur I, alors elle converge simplement vers f sur I.*

3.1.3 Théorèmes fondamentaux sur les suites de fonctions

1) Critère de Cauchy

Théorème 3.1.1 *La suite f_n converge uniformement vers f sur I si et seulement si* $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq \eta(\varepsilon), m \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon.$$

Preuve

Montrons l'implication directe. On a f_n converge uniformement vers f sur I, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{tel que } n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon.$$

Soit $m \geq \eta(\varepsilon)$, On a

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \|f_n - f + f - f_m\| \\ &\leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Prouvons l'implication réciproque, le fait que la suite f_n est de Cauchy, alors elle est convergente. Posons

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x), \quad \forall x \in I.$$

C'est-à-dire, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} n \geq \eta(\varepsilon) &\Rightarrow \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \\ &\Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

2) Critère de Continuité

Théorème 3.1.2 *Soit $(f_n)_n$ une suite qui converge uniformément vers f sur I et $f_n(x)$ est continue au point $x = x_0$, avec $x_0 \in I$. Alors, $f(x)$ est continue au point $x = x_0$.*

Preuve

Par hypothèse, on a $f_n(x)$ est continue au point $x = x_0$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f_n(x_0),$$

c'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

et on a $(f_n)_n$ une suite qui converge uniformément vers f sur I, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Montrons que $f(x)$ continue au point $x = x_0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, tel que

$$\begin{aligned}
|x - x_0| < \alpha \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|, \\
&\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|, \\
&\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3}, \\
&\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.1.1 *Soit $(f_n)_n$ une suite qui converge uniformément vers f sur I et $f_n(x)$ continue sur I. Alors $f(x)$ est continue sur I.*

Remarque 3.1.1 *Si les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur I et $f(x)$ n'est pas continue sur I, alors f_n ne converge pas uniformément vers f sur I.*

Exemples:
Etudions la convergence uniforme de $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ sur
a)$I = [0, +\infty[$.
b)$I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$.
c)$I =]0, +\infty[$.
Solution:
a) Sur $I = [0, +\infty[$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ n'est pas continue au point $x = 0$. Donc elle n'est pas continue sur $[0, +\infty[$.
En plus, les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur $[0, +\infty[$. Ainsi, f_n ne converge pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.
b) Sur $I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) = 0.$$

Donc

$$\sup_{[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+an}.$$

Passant à la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+an} = 0.$$

Ainsi, f_n converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.
c) Sur $I =]0, +\infty[$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) = 0.$$

Donc,

$$\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} \frac{1}{1+nx} = 1 \not\to 0.$$

Par conséquent, f_n ne converge pas uniformément vers f sur $]0,+\infty[$.

3) Critère d'intégration

Théorème 3.1.3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ telle que $f_n \rightrightarrows f$ sur I. Alors*

i) *f est intégrable sur I.*

ii) $\forall \alpha,\beta\in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx.$

iii) $\forall \alpha\in I,\ F_n(x)=\int_\alpha^x f_n(t)dt$ *converge uniformément sur I vers* $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt.$

Preuve

i) Par Hypothèse, on a $f_n(x)$ est continue sur I et $f_n \rightrightarrows f$ sur I, alors d'aprés le théorème 3.1.2, f est continue sur I, donc f est intégrable sur I.

ii) Soient $\alpha,\beta\in I$, on a

$$\begin{aligned}0\le\Big|\int_\alpha^\beta f_n(x)dx-\int_\alpha^\beta f(x)dx\Big| &= \Big|\int_\alpha^\beta \Big(f_n(x)-f(x)\Big)dx\Big|\\ &\le \int_\alpha^\beta |f_n(x)-f(x)|dx\\ &\le \int_\alpha^\beta \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|dx\\ &\le \int_\alpha^\beta \|f_n-f\|dx\\ &\le (\beta-\alpha)\|f_n-f\|.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n-f\|=0.$

Donc, quand $n\to+\infty$, on trouve $\int_\alpha^\beta f_n(x)dx-\int_\alpha^\beta f(x)dx\to 0.$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

iii)

$$\begin{aligned}
\|F_n(x) - F(x)\| &= \sup_{x\in I} |F_n(x) - F(x)| \\
&= \sup_{x\in I} \Big| \int_\alpha^x f_n(t)dt - \int_\alpha^x f(t)dt \Big| \\
&\leq \sup_{x\in I} \int_\alpha^x |f_n(t) - f(t)|dt \\
&\leq \|f_n - f\| \sup_{x\in I} (x-\alpha) \\
&\leq (b-a)\|f_n - f\|.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|F_n - F\| = 0.$$

Remarque 3.1.2 *La compacité de l'intervalle I est nécéssaire pour le théorème précédent. Dans le cas contraire même si les autres conditions sont vérifiées le résultat n'est pas toujours vrai.*

Exemple:

Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x(n-x)}{n^3} \text{ si } 0 \leq x < n, \\ 0 \text{ si } x \geq n. \end{cases}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue sur $I = [0, +\infty[$, et $\forall x \in I$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x(n-x)}{n^3} = f(x) = 0.$$

Cherchons le $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$, en effet

$$f_n^{'}(x) = \frac{n-2x}{n^3}.$$

D'aprés le tableau de variation de $f_n(x)$, on trouve

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,n]} \frac{x(n-x)}{n^3} = \frac{1}{4n}.$$

Passant à la limite, quand $n \to +\infty$, on a

$$\|f_n - f\| \to 0.$$

Donc f_n converge uniformément sur I vers $f \equiv 0$.

D'un coté

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{x(n-x)}{n^3} dx = \frac{1}{6}.$$

D'autre coté

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

4) Critère de dérivation

Théorème 3.1.4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur $I = [a,b]$ telle que*

a) *La suite $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction g.*

b) *$\exists x_0 \in I$, tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = l$ avec l fini.*

Alors

i) *f_n converge uniformément sur I vers la foncion f définie par*

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

ii) *f est de classe C^1 sur I et l'on a $f^{'} = g$.*

Preuve

i) Posons $G_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n^{'}(t)dt = f_n(x) - f_n(x_0)$ et $G(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

On a

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{x\in I} |f_n(x) - l - G(x)| \\ &= \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - l - G(x)| \\ &= \sup_{x\in I} |G_n(x) - G(x) + f_n(x_0) - l| \\ &\leq \|G_n - G\| + |f_n(x_0) - l|. \end{aligned}$$

D'une part, le fait que $f_n^{'} \rightrightarrows g$ sur I, alors d'aprés le théorème 3.1.3, on a $G_n(x)$ converge uniformément sur I vers G, c'est-à-dire, quand $n \to +\infty$, on a

$$\|G_n - G\| \to 0.$$

D'autre part, quand $n \to +\infty$, on a par hypothèse

$$|f_n(x_0) - l| \to 0.$$

Donc

$$f_n \rightrightarrows f, \quad \text{sur } I.$$

ii) On a

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt \Rightarrow f^{'}(x) = g(x).$$

Par hypothèse, $f_n^{'} \rightrightarrows g$ sur I et $f_n^{'}$ est continue, donc d'aprés le théorème 3.1.2, on trouve que $g = f^{'}$ est continue. Ainsi, f est de classe C^1 sur I.

Remarques 3.1.1 *1. Pour montrer qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, en général le calcul du $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ n'est pas toujours facile, alors il suffit de trouver une suite numérique $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que*

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon_n.$$

2. Si une suite ne converge pas uniformément vers $f \equiv 0$ sur I, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ telle que $f_n(x_n)$ ne converge pas vers 0.

Exemples:
Etudions la convergence uniforme de $f_n(x) = e^{-(x+1)n} \sin x$ avec $x \geq 0$ et $g_n(x) = \dfrac{\sin nx}{1 + n^2x^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
i) $\forall x \geq 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{-(x+1)n} \sin x = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= e^{-(x+1)n}|\sin x| \\ &\leq e^{-n} = \varepsilon_n, \end{aligned}$$

quand $n \to +\infty$, on a $\varepsilon_n = e^{-n}$ qui converge vers 0.
Ainsi,

$$f_n \rightrightarrows f, \text{ sur } I.$$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin nx}{1 + n^2x^2} = 0.$$

Soit $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$, on a $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ et quand $n \to +\infty$, on a

$$g_n(x_n) = g_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}} \not\to 0.$$

Ainsi,

$$f_n \not\rightrightarrows f \equiv 0, \text{ sur } I.$$

3.2 Séries de fonctions

3.2.1 Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 3.2.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. On pose*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x),$$

la somme partielle de rang n de la série $\sum_n f_n(x)$.

Si la suite $(S_n(x))_n$ converge simplement vers sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, on dit que la série $\sum_n f_n(x)$ converge simplement vers sa somme $S(x)$.

Définition 3.2.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. L'ensemble*

$$D = \{x \in I \ \ \textit{tel que} \ \sum_n f_n(x) \ \textit{converge}\},$$

s'appelle domaine de convergence de la série $\sum_n f_n(x)$.

Exemples:

Déterminons le domaine de convergence des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(x+2)^n}{n}$.

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente, donc $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolument sur $\mathbb{R}$. Ainsi, le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ est

$$D = \mathbb{R}.$$

ii) On a $f_n(x) = \frac{(x+2)^n}{n}$, appliquons la règle de Cauchy, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x+2)^n}{n}\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(x+2)}{n^{\frac{1}{n}}}\right| \\ &= |x+2|. \end{aligned}$$

- Si $|x+2| < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolument.
- Si $|x+2| > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est divergente.
- Si $|x+2| = 1$, on distingue deux cas

- Soit $x+2=1$, alors $f_n(x)=\dfrac{1}{n}$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est divergente.

- Soit $x+2=-1$, alors $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente.

Ainsi, le domaine de convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(x+2)^n}{n}$ est

$$D=[-3,-1[.$$

Lemme 3.2.1 *La série $\sum\limits_{n} f_n(x)$ converge simplement vers $S(x)$ si et seulement si $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ converge simplement vers* 0.

3.2.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 3.2.3 *On dit que la série $\sum\limits_{n} f_n(x)$ converge uniformément vers sa somme lorsque la suite $(S_n(x))_n$ des sommes partielles converge uniformément vers sa somme $S(x)$.*

Théorème 3.2.1 *La série $\sum\limits_{n} f_n(x)$ converge uniformément sur I si et seulement si $\forall\varepsilon>0, \exists\eta(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tel que*

$$n\geq\eta(\varepsilon)\Rightarrow\forall x\in I,\ |S_n(x)-S(x)|\leq\varepsilon,$$

ou bien

$$n\geq\eta(\varepsilon)\Rightarrow\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|\leq\varepsilon,$$

ou bien

$$n\geq\eta(\varepsilon)\Rightarrow\sup_{x\in I}|R_n(x)|\leq\varepsilon,$$

ou bien

$$n\geq\eta(\varepsilon)\Rightarrow\|R_n\|\leq\varepsilon.$$

Corollaire 3.2.1 *La série $\sum\limits_{n} f_n(x)$ converge uniformément sur I si et seulement si $R_n\rightrightarrows 0$ sur I.*

Théorème 3.2.2 ***(Critère de Cauchy)***
La série $\sum\limits_{n} f_n(x)$ converge uniformément sur I si et seulement si
$\forall\varepsilon>0, \exists\eta(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tel que

$$p\geq\eta(\varepsilon), q\geq\eta(\varepsilon)\Rightarrow\forall x\in I,\ |S_{p+q}(x)-S_p(x)|\leq\varepsilon,$$

ou bien

$$p \geq \eta(\varepsilon), q \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in I} |\sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x)| \leq \varepsilon,$$

ou bien

$$p \geq \eta(\varepsilon), q \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \| \sum_{k=p+1}^{p+q} f_k\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 3.2.3 *Si la série $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément sur I, alors la série $\sum_n f_n(x)$ converge simplement sur I. La réciproque est fausse.*

3.2.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 3.2.4 *On dit que la série $\sum_n f_n(x)$ converge normalement sur I si et seulement si $\sum_n \|f_n\|$ converge sur I.*

Exemples:
Etudions la convergence normale de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin nx}{n^2}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$, avec $x \geq a > 0$.
i) On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann qui converge. Donc, $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|$ converge.
ii) Le fait que $f_n(x) = e^{-nx}$ est une suite décroissante, donc

$$\|f_n\| = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = e^{-na} = (e^{-a})^n.$$

Or, $\sum_{n\geq 0}(e^{-a})^n$ est une série géométrique de raison $q = e^{-a} < 1$ qui converge, donc $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ converge.
Remarquons que si $x \geq 0$, on a

$$\|f_n\| = \sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} |e^{-nx}| = 1.$$

Donc, $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ ne converge pas.

Théorème 3.2.4 ***(Critère de Weierstrass)***
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I et $(v_n)_n$ une suite numérique réelle telle que

- *La série $\sum_n v_n$ est convergente.*

- $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq v_n$.

Alors, la série $\sum_n f_n(x)$ *converge normalement.*

Preuve

On a

$$\|f_n\| = \sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq v_n,$$

avec $\sum_n v_n$ converge. D'aprés le critère de comparaison on a $\sum_n \|f_n\|$ converge.

Exemple:

Montrons que la série de terme général $f_n(x) = \sin a^n x$ avec $0 < a < 1$ et $x \in I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ converge normalement. En effet,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |\sin a^n x| \\ &\leq a^n|x| \\ &\leq a^n \sup(|\alpha|, |\beta|) \\ &\leq K a^n = v_n \end{aligned}$$

Or, $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série géométrique convergente, donc $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge normalement sur I.

Théorème 3.2.5 *Si la série* $\sum_n f_n(x)$ *converge normalement sur* I*, alors la série* $\sum_n f_n(x)$ *converge uniformément sur* I*.*

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$, le fait que $\sum_n f_n(x)$ converge normalement sur I, alors $\exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq \eta(\varepsilon), q \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{p+q} \sup_{x\in I} |f_k(x)| \leq \varepsilon,$$

Donc, $\forall x \in I$, on a

$$\sup_{x\in I} \Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=p+1}^{p+q} \sup_{x\in I} |f_k(x)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, la série $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément sur I.

3.2.4 Règles d'Abel uniformes

Théorème 3.2.6 ***(Théorème d'Abel)***

Soient $(f_n(x))_n$ *et* $(g_n(x))_n$ *deux suites de fonctions sur* I *telle que*

i) $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \|S_n\| \leq M,$ *avec* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$

ii) *La série* $\sum_n \|g_{n+1} - g_n\|$ *est convergente et* $\lim_{n\to+\infty} \|g_n\| = 0.$

Alors la série $\sum_n f_n(x)g_n(x)$ *converge uniformément sur* I.

Preuve

En utilisant le critère de convergence uniforme de Cauchy, Soit $\varepsilon > 0$, $\forall x \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x)g_k(x)\Big| &= \Big|\sum_{k=p+1}^{p+q}\Big(S_k(x) - S_{k-1}(x)\Big)g_k(x)\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k(x)g_k(x) - \sum_{k=p+1}^{p+q} S_{k-1}(x)g_k(x)\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k(x)g_k(x) - \sum_{k=p}^{p+q-1} S_k(x)g_{k+1}(x)\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k(x)\Big(g_k(x) - g_{k+1}(x)\Big) + S_{p+q}(x)g_{p+q}(x) - S_p(x)g_{p+1}(x)\Big| \\
&\leq \sum_{k=p+1}^{p+q} |S_k(x)||g_k(x) - g_{k+1}(x)| + |S_{p+q}(x)||g_{p+q}(x)| + |S_p(x)||g_{p+1}(x)| \\
&\leq M\Big(\sum_{k=p+1}^{p+q} \|g_k(x) - g_{k+1}(x)\| + \|g_{p+q}\| + \|g_{p+1}\|\Big).
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (ii), on trouve

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x)g_k(x)\Big| \leq \varepsilon.$$

Donc, quand $n \to +\infty$, on a

$$\sup_{x\in I}\Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x)g_k(x)\Big| \longrightarrow 0.$$

Alors, $\sum_n f_n(x)g_n(x)$ converge uniformément sur I.

Exemple:

Déterminons la nature de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-nx}}{n+1}$ avec $x \geq a > 0$.

On pose $g_n(x) = \frac{1}{n+1}$, donc, quand $n \to +\infty$, on a

$$\|g_n\| = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

En plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\Big\|g_{n+1}-g_n\Big\| &= \sum_{n\geq 0}\Big|\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\Big| \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\sim \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Or, $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann qui converge. Donc, la série $\sum\limits_{n\geq 0}\|g_{n+1}-g_n\|$ converge.
Prenons $f_n(x)=e^{-nx}$, calculons la somme partielle

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(e^{-x})^k \\
&= \frac{1-e^{-x(n+1)}}{1-e^{-x}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|S_n\| &= \sup_{x\in[a,+\infty[}\Big|\frac{1-e^{-x(n+1)}}{1-e^{-x}}\Big| \\
&\leq \frac{1}{1-e^{-a}} = M,
\end{aligned}$$

avec $M>0$. Ainsi d'aprés le théorème d'Abel la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{e^{-nx}}{n+1}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Théorème 3.2.7 *Soient $(f_n(x))_n$ et $(g_n(x))_n$ deux suites de fonctions sur I telle que*

i) $\exists M>0, \forall n\in\mathbb{N},\ \|S_n\|\leq M,$ *avec* $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$.

ii) $\forall x\in I$, $(g_n(x))_n$ *est monotone et* $g_n \rightrightarrows 0$ *sur* I.

Alors la série $\sum\limits_{n} f_n(x)g_n(x)$ *converge uniformément sur* I.

Exemple:
Etudions la nature de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n}$, avec $|x|\leq R<1$, en effet

Posons $g_n(x)=\dfrac{1}{n}$, cette suite est décroissante et elle converge uniformément vers 0 sur $I=[-R,R]$.

Prenons $f_n(x) = x^n$, on a

$$\begin{array}{rcl} |S_n(x)| & = & \Big|\sum_{k=1}^{n} x^k\Big| \\ & = & \Big|\dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}\Big| \\ & \leq & \dfrac{|x| + |x|^{n+1}}{|1-x|} \\ & \leq & \dfrac{2}{1-R} = M, \end{array}$$

avec $M > 0$. Ainsi d'aprés le théorème 3.2.7 la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge uniformément sur I.

3.2.5 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes

1) Critère de Continuité

Théorème 3.2.8 *Soit $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions uniformément convergente vers sa somme sur I et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ est continue en $x_0 \in I$, alors sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue en x_0.*

Corollaire 3.2.2 *Soit $\sum_n f_n(x)$ une suite de fonctions uniformément convergente vers sa somme sur I et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ est continue sur I, alors sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur I.*

2) Critère d'intégration

Théorème 3.2.9 *Soit $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions continues qui converge uniformément vers sa somme S sur I, alors*

- *S est intégrable sur I.*
- *La série de terme général $u_n = \int_\alpha^\beta f_n(t)dt$ est convergente et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(t)dt = \int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt = \int_\alpha^\beta S(t)dt.$$

- *Si* $F_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ *alors* $\sum\limits_n F_n(x)$ *converge uniformément sur* I *vers sa somme* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ *et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt.$$

3) Critère de dérivation

Théorème 3.2.10 *Soit* $\sum\limits_n f_n(x)$ *une série de fonctions dérivables telles que*

- $\forall n, f_n^{'}$ *est définie et continue sur* I.
- *La série* $\sum\limits_n f_n^{'}(x)$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de* I.
- $\exists x_0 \in I$, *tel que la série* $\sum\limits_n f_n(x_0)$ *converge.*

Alors

i) *La série* $\sum\limits_n f_n(x)$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de* I.

ii) $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *est continuement dérivable sur* I *et l'on a*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\Big)^{'} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{'}(x).$$

Exemple:
Montrons que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$, avec $x \in [-R, R]$, $0 < R < 1$, converge uniformément sur I et calculons sa somme. En effet
On a $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq R^n$, $\forall x \in I$ et $\sum\limits_{n\geq 1} R^n$ est une série géométrique qui converge. Donc d'aprés le théorème de Weierstrass, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge normalement sur I. Ainsi elle converge uniformément sur I.
Calculons sa somme, $\forall n \geq 1$, on a $f_n^{'}(x) = x^{n-1}$ qui est définie et continue sur I.
En plus, $\sum\limits_{n\geq 1} x^{n-1}$ est une série qui converge uniformément sur I.

Donc, d'aprés le théorème 3.2.10 on a

$$\begin{aligned} S'(x) &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Big)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}x^{n} \\ &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Nous intégrons, on trouve

$$\begin{aligned} S(x)-S(0) &= \int_0^x \frac{1}{1-t}dt \\ &= -\ln(1-x) \end{aligned}$$

Le fait que $S(0)=0$, alors

$$S(x) = -\ln(1-x).$$

3.3 Exercices résolus

Exercice1:

Etudier la nature de convergence de chaque suite de fonctions suivantes

1)$f_n(x) = \dfrac{1}{1+n(nx-1)^2}$, pour $x \in I = [0,1]$.

2)$f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 1-x & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

3)$f_n(x) = e^{-nx}\cos x^2$, pour $x > 0$.

Solution:

1) $\forall x \in I = [0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

Donc f_n converge simplement vers 0. Cherchons le $\sup_{x\in I}|f_n(x)|$, en effet

$$f_n'(x) = \frac{-2n^3x+2n^2}{(1+n(nx-1)^2)^2}.$$

Etudions le signe de $f_n'(x)$, on a

- $f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{n}$,
- $f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{n}$.

D'aprés le tableau de variation de la fonction $f_n(x)$, nous trouvons que

$$\sup_{x\in I} |f_n(x)| = 1.$$

Donc f_n ne converge pas uniformément vers 0 sur I.
2) Appliquons le critère de continuité, montrons que $f_n(x)$ est continue sur $I = [0, 1]$. on a

$$\lim_{x \to < \frac{1}{n}} f_n(x) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{x \to > \frac{1}{n}} f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Donc $\forall n,\ f_n(x)$ est continue sur I.
En plus

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } x = 0, \\ 1 - x \ \text{ si } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Donc f n'est pas continue au point 0. D'aprés le théorème 3.1.2, f_n ne converge pas uniformément vers 0 sur I.
3) On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

Soit $x_n = \dfrac{1}{n}$, on a $(x_n)_n \subset]0, +\infty[$ et quand $n \to +\infty$, on a

$$f_n(x_n) = e^{-1} \cos\frac{1}{n^2} \to \frac{1}{e} \not\to 0.$$

Ainsi, f_n ne converge pas uniformément vers 0 sur I.
Exercice2:
On considère la suite de fonction $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$x \mapsto f_n(x) = e^{-nx^2} \sin nx + \sqrt{1 - x^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que la suite de fonctions f_n converge simplement sur $I = [-1, 1]$ vers une fonction f, que l'on déterminera.
2) Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $[\omega, 1], \omega$ étant une constante positive.
3) Montrer que f_n ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.
Solution:
1) Pour chaque x fixé, quand $n \to +\infty$, on a $e^{-nx^2} \sin nx \to 0$
(puisque $|\sin nx|e^{-nx^2} \leq e^{-nx^2}$ pour $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$), donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} \text{ pour } \ x \neq 0, \\ 0 \qquad \text{pour } \ x = 0. \end{cases}$$

2) Pour $x \in [\omega, 1]$, on a

$$\begin{array}{rcl} |f_n(x) - f(x)| & = & e^{-nx^2}|\sin nx| \\ & \leq & e^{-nx^2} \\ & \leq & e^{-n\omega^2} \end{array}$$

Donc

$$\sup_{x\in[\omega,1]} |f_n(x) - f(x)| = e^{-n\omega^2},$$

Passant à la limite, quand $n \to +\infty$, on a

$$\|f_n - f\| \to 0.$$

Ainsi, f_n converge uniformément vers $f = \sqrt{1-x^2}$ sur $I = [\omega, 1]$.

3) Supposons que l'on ait la convergence uniforme sur $[0, 1]$. Alors, on a aussi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que } n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $x = \dfrac{1}{n}$, on a

$$\left| f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n}) \right| = e^{-\frac{1}{n}} \sin 1 \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq \eta(\varepsilon).$$

Ceci ètant impossible, on ne pourra donc avoir la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice3:

Déterminer le domaine de convergence D de chaque série

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos nx}{n!}$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(z-n)^2}$.

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left| \sin \frac{x^2}{n} - \tan \frac{x^2}{n} \right|^{\frac{1}{2}}$.

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!(x-3)^{2n}}{n^{n+1}}$.

Solution:

1) Nous avons

$$\left| \frac{\cos nx}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est convergente, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos nx}{n!}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Ainsi $D = \mathbb{R}$.

2) On a $f_n(z) = \dfrac{1}{(z-n)^2}$. Le domaine de définition de cette suite est

$$D_f = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z \neq n, \ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{C} \setminus \{n\}.$$

Maintenant, déterminons le domaine de convergence, on a

$$|f_n(z)| = \frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{(x-n)^2+y^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ converge absolument sur D_f. Ainsi $D = D_f$.

3) On a $f_n(x) = \left|\sin\frac{x^2}{n} - \tan\frac{x^2}{n}\right|^{\frac{1}{2}}$, étudions les développements limités de

$$\sin\frac{x^2}{n} = \frac{x^2}{n} - \frac{1}{3!}(\frac{x^6}{n^3}) + \circ(\frac{x^6}{n^3}).$$

$$\tan\frac{x^2}{n} = \frac{x^2}{n} + \frac{x^6}{3n^3} + \circ(\frac{x^6}{n^3}).$$

Donc

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left|\frac{-1}{2}\frac{x^6}{n^3} + \circ(\frac{x^6}{n^3})\right|^{\frac{1}{2}} \\ &\sim \left|\frac{1}{2}\frac{x^6}{n^3}\right|^{\frac{1}{2}} = \frac{|x|^3}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Or, $\sum_{n\geq 1}\frac{|x|^3}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann qui converge $\forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$. D'où $D = \mathbb{R}$.

4) On a $f_n(x) = \frac{n!(x-3)^{2n}}{n^{n+1}}$, nous appliquons le critère de d'Alembert pour $x \neq 3$, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} &= \lim_{n\to+\infty}(x-3)^2\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Big)^n\Big(\frac{n}{n+1}\Big) \\ &= \frac{(x-3)^2}{e}. \end{aligned}$$

Nous distinguons trois cas

- Si $\frac{(x-3)^2}{e} < 1$, alors $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge pour $x \in]3-\sqrt{e}, 3+\sqrt{e}[$.
- Si $\frac{(x-3)^2}{e} > 1$, alors $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge pour $x \in]-\infty, 3-\sqrt{e}[\cup]3+\sqrt{e}, +\infty[$.
- Si $\frac{(x-3)^2}{e} = 1$, alors $f_n(x) = \frac{n!e^n}{n^{n+1}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$ (formule de Stirling).

  Or, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente. Ainsi $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge.

Pour $x = 3$, on a $f_n(3) = 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(3)$ converge.

Le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est $D =]3-\sqrt{e}, 3+\sqrt{e}[$.

Exercice4:
On considère la série de fonctions suivante
$$\frac{\sin x}{x^2+1} + \frac{\sin 2x}{x^2+2^2} + ... + \frac{\sin nx}{x^2+n^2} + ...$$
Déterminer le domaine de convergence D et étudier la convergence uniforme sur D.
Solution:
Nous avons
$$\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann qui converge. D'où la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}$ converge normalement sur $D = \mathbb{R}$ et par suite cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
Exercice5:
On considère la série de fonctions de terme général
$$\begin{aligned} f_n(x) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\longmapsto f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{nx+x}{1+n^2x^2+2n^2x+x^2}. \end{aligned}$$
1) Déterminer le domaine de convergence D.

2) Calculer la somme de la série.

3) Quelle est la nature de convergence de cette série sur D.

4) Déterminer la nature de convergence de cette série sur $I =]0, +\infty[$ et $I = [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Solution:
1) La somme partielle $S_n(x)$ de cette série est donnée par
$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k(x) - a_{k+1}(x) \\ &= a_1(x) - a_{n+1}(x) \\ &= \frac{x}{1+x^2} - \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}, \end{aligned}$$
avec $a_k(x) = \dfrac{kx}{1+k^2x^2}$.
Donc
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Ainsi, le domaine de convergence de cette série est $D = \mathbb{R}$.

2) La somme de cette série est
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

3) Le reste $R_n(x)$ d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est donné par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}.$$

Déterminons le $\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)|$. on a

$$R_n^{'}(x) = \frac{(n+1)[1-(n+1)^2x^2]}{1+(n+1)^2x^2}.$$

D'aprés le tableau de variation de la fonction $R_n(x)$, nous trouvons

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| = \frac{1}{2} \not\to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Donc

$$R_n \not\rightrightarrows 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

4) Pour $x \in I_1 =]0, +\infty[$, d'aprés le tableau de variation de $R_n(x)$, on trouve

$$\sup_{x\in I_1} |R_n(x)| = \frac{1}{2} \not\to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Pour $x \in I_2 = [a, +\infty[$, quand $n \to +\infty$, on a

$$\sup_{x\in I_2} |R_n(x)| = \frac{(n+1)a}{1+(n+1)^2a^2} \to 0.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice6: On considère la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = (\sin x)^\alpha (\cos x)^n.$$

1) Déterminer la somme et le domaine de convergence de cette série.

2) Montrer que l'on a convergence uniforme sur tout compact $[a, b]$ inclu dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Solution:

1) La somme partielle S_n est donnée par

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} (\sin x)^\alpha (\cos x)^i \\ &= (\sin x)^\alpha (1 + \cos x + (\cos x)^2 + ... + (\cos x)^n) \\ &= (\sin x)^\alpha \frac{1-(\cos x)^{n+1}}{1-\cos x}, \end{aligned}$$

avec $x \neq 2k\pi$. Donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} (\sin x)^\alpha \frac{1-(\cos x)^{n+1}}{1-\cos x} \\ &= \frac{(\sin x)^\alpha}{1-\cos x}.\end{aligned}$$

Pour $x = 2k\pi$, on a

$$S_n(2k\pi) = (n+1)(\sin 2k\pi)^\alpha = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(2k\pi) = 0.$$

Ainsi

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sin x)^\alpha}{1-\cos x} & \text{pour } x \neq 2k\pi \\ 0 & \text{pour } x = 2k\pi. \end{cases}$$

Le domaine de convergence de cette série $D = \mathbb{R}$.
2) Soit $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, le reste $R_n(x)$ d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est donné par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0 \\ \dfrac{(\sin x)^\alpha (\cos x)^{n+1}}{1-\cos x} & \text{pour } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Donc d'aprés les graphes des fonctions circulaires $\cos x$ et $\sin x$, on a

$$\sup_{x\in[a,b]} R_n(x) \leq \frac{(\sin b)^\alpha}{1-\cos a}(\cos a)^{n+1}, \quad \forall x \in [a,b] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Passant à la limite, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sin b)^\alpha}{1-\cos a}(\cos a)^{n+1} = 0.$$

Ainsi, R_n converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[a,b] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.4 Exercices non résolus

Exercice1:

1) Montrer que la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{nx} + 1 & \text{pour } x \neq 0, \\ 1 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

converge uniformément vers $f : x \mapsto f(x) = 1$ sur tout compact de $\mathbb{R}$.
2) A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice2:

On considère la suite de fonctions $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$x \mapsto f_n(x) = nxe^{-nx} + \sin(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Quel est le domaine de convergence D de la suite de fonctions $(f_n)_n$?

2) Quelle est la nature de la convergence sur les intervalles I inclus dans D?

Exercice3:

On considère la suite de fonctions $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$, définie par

$$x \mapsto f_n(x) = n^2x(1-x)^n + \arcsin(x-1), \quad n \text{ entier positif.}$$

1) Quel est le domaine de convergence D de la suite de fonctions $(f_n)_n$?

2) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[\alpha, 2-\alpha]$ (α constante positive) vers sa fonction limite f.

3) Évaluer $\int\limits_0^1 [f_n(x) - f(x)]dx$ et en déduire que l'on ne peut avoir convergence uniforme sur $[0,1]$.

Exercice4:

On considère la série de fonctions de terme général f_n,

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}, \quad f_0(x) = 1.$$

1) Déterminer le domaine de convergence D.

2) Montrer que la série converge uniformément sur D.

Exercice5:

1) a) Quel est le domaine de définition D de la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}?$$

b) Montrer que f est continue sur D.

2) c) Quel est le domaine de définition D_1 de la fonction

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}?$$

d) Montrer que g est de class C^1 sur D_1.

Exercice6:

On considère la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1) Pour quelles valeurs de x cette série est-elle convergente; absolument convergente?

2) Soit $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^x}$ et $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}$ lorsque la série est convergente. Montrer que l'on a

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{(n+1)^x},$$

et en déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformément sur $[x_0, +\infty[$ (x_0 étant une constante positive).

En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$.