

**SUPPORT DU COURS :**  
**METHODE DES ELEMENTS FINIS**

# COURS 1 :

## INTRODUCTION AUX ELEMENTS FINIS

### Introduction :

La méthode des éléments finis est une méthode de résolution approchée d'équations aux dérivées partielles. D'une manière plus simple il s'agit de remplacer un problème compliqué pour lequel a priori on ne connaît pas desolution, par un problème plus simple que l'on sait résoudre.

l'importance de la methode est d'exprimer les problemes physiques sous forme d'equations aux dérivées partielles soumises à des conditions aux limites particulieres .

Quelques exemples de problèmes mécaniques résolus de manière courante par éléments finis :

- Dimensionnement des structures pour des engins de transports ferroviaire, routier, naval ou aéronautique,
- Dimensionnement de pièces de sécurité en génie civil par exemple,
- Simulation numérique d'état ultime, tel le comportement de centrale nucléaire dans le cas de dysfonctionnement...

### 1. le maillage

Dans la méthode des éléments finis, l'étape du maillage est primordiale. Elle peut directement conditionner la précision des résultats obtenus. C'est pourquoi le choix du mailleur est très important.les types de maillage sont :

#### 1.1. des triangles

à 3 , 6 noeuds à bords droits ou curvilignes :

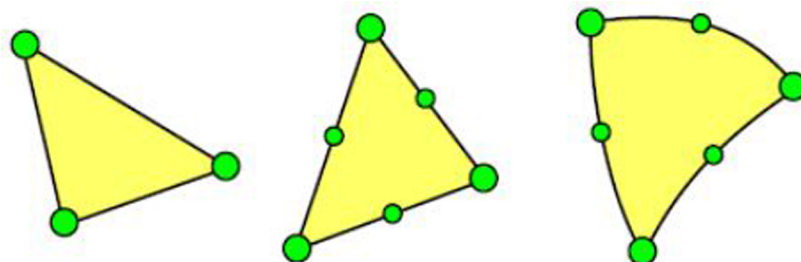


Figure.1:le maillage en triangles

## 1.2. des quadrangles

à 4, 8 ou 9 noeuds :

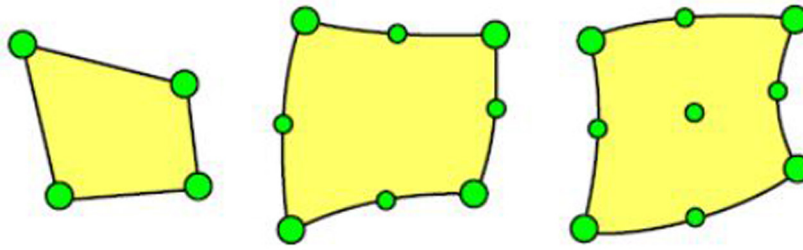


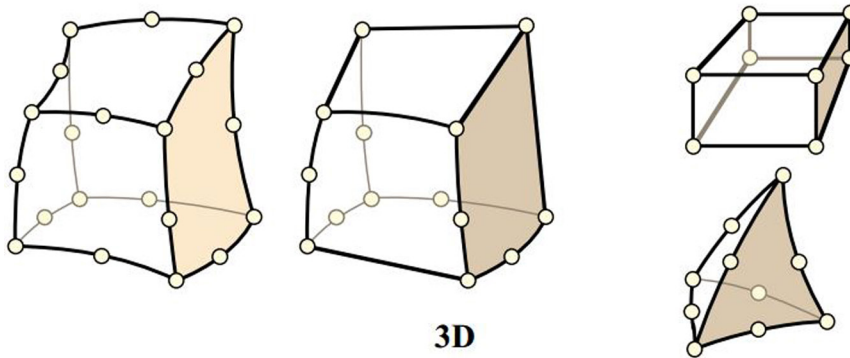
Figure.2:le maillage en quadrangles

il y a aussi d'autres éléments finis :

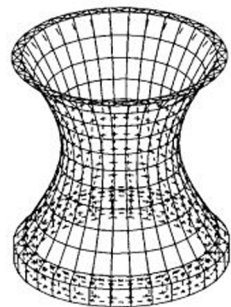
### barres



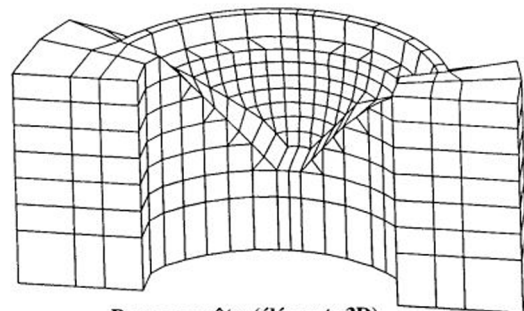
seul l'effort de traction / compression est transmis



Voilà des exemples de discrétisation en éléments finis :



Tour de refroidissement  
(coque 3D)



Barrage voûte (éléments 3D)

## 2. Concept d'analyse des rigidités

Le comportement de chaque élément est décrit par une équation algébrique.

Cette équation est décrite sous forme matricielle par :

$$\{F\} = [K] \cdot \{\delta\} \quad (1.1)$$

où :

$\{\delta\}$  = vecteur d'inconnues (valeurs de la quantité de champ dans les noeuds – ex : vecteur des déplacements) ;

$[K]$  = matrice des constantes (connue – ex : matrice de rigidité) ;

$\{F\}$  = vecteur des chargements (connu – ex : matrice des forces nodales).

## 3. Operation pour résoudre une structure

- la numérotation des noeuds et les barres .
- la formulation des matrices de rigidités des éléments  $[K_{\text{element}}]$  .
- l'assemblage des matrices de rigidités des éléments en matrice globale  $[K]$  .
- l'application des conditions aux limites .
- le calcul des déplacements et les réactions et par conséquent les efforts internes .
- la vérification de la condition de résistance .

## Bibliographie

- Chapitre 3 : la méthode des éléments finis , DSEA "M.S.C.P".
- Introduction aux éléments finis , Michel DYSLI , Ecole polytechnique fédérale de LAUSANNE .

## COURS 2

### ANALYSE LINEAIRE STATIQUE DES BARRES ARTICULEES ET DES POUTRES

#### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre sera présenté et expliqué le sens physique des matrices de rigidité pour les éléments de barre articulée et pour les éléments de poutre.

L'analyse statique néglige le temps comme variable indépendante et reste valable autant que les déflexions sont constantes ou varient peu. L'analyse linéaire statique sera exclue au delà de la limite d'écoulement (domaine plastique), où les déformations sont suffisamment grandes conduisant à une défaillance de la structure.

Après avoir fait une analyse préliminaire approximative, les principales étapes qu'il faut prendre en compte au cours d'une analyse par MEF sont les suivantes :

1. Préparation du modèle. En ce sens ci l'analyse doit contenir :
  - a) la discrétisation de la structure ou du milieu continu divisé en éléments finis ;
  - b) l'application du chargement ;
  - c) la prescription des supports.
2. Accomplissement des calculs. Le logiciel doit :
  - a) générer la matrice de rigidité  $[k_i]$  de chaque élément « i » ;
  - b) relier les éléments ensemble, ce qui veut dire rassembler les matrices  $[k_i]$  de chaque élément « i » pour obtenir la matrice globale  $[K]$  ;
  - c) rassembler les chargements dans un vecteur global de chargements  $\{F\}$  ;
  - d) imposer les conditions dans les supports ;
  - e) résoudre les équations  $\{F\} = [K] \cdot \{\delta\}$  pour le vecteur des inconnues  $\{\delta\}$  (déplacements nodaux).
3. Postproression de l'information contenue dans le vecteur  $\{\delta\}$ . Dans l'analyse des contraintes, cela est équivalent au calcul des contraintes et des déformations.

La première étape est la plus importante du fait que cela nécessite un bon jugement de l'analyste sur les types d'éléments finis qui doivent être utilisés dans l'analyse et combien de grossière ou raffinée doit être la discrétisation dans différentes régions du modèle. La deuxième étape est automatiquement réalisée par l'ordinateur. De façon similaire, le troisième pas est réalisé par l'ordinateur, où la carte en couleur des contraintes et des déformations résultantes sera fournie automatiquement.

#### 2.2 Dédution de la matrice de rigidité pour l'élément de barre articulée

##### a) Méthode directe.

On considère un élément de barre uniforme, prismatique et élastique, de longueur L, de module élastique E et d'aire de la section transversale A (fig. 2.1). Un noeud est localisé à chacune des extrémités de la barre. Les seuls déplacements qui sont permis sont ceux axiaux.

On déplace d'abord le premier noeud, ensuite le deuxième et, dans chaque cas, on calcule les forces qui doivent être appliquées dans les noeuds pour maintenir le même état de déplacement.

Ces forces sont faciles à déterminer à partir de la formule élémentaire de la Résistance des matériaux,  $\delta = \frac{FL}{EA}$ , d'où la force qui résultera sera :  $F = \frac{EA}{L} \cdot \delta$ .

On note avec  $F_{ij}$  la force au noeud « i » ( $i=1,2$ ) associée au déplacement du noeud « j » ( $j=1,2$ ).

Pour les deux cas, on aura :

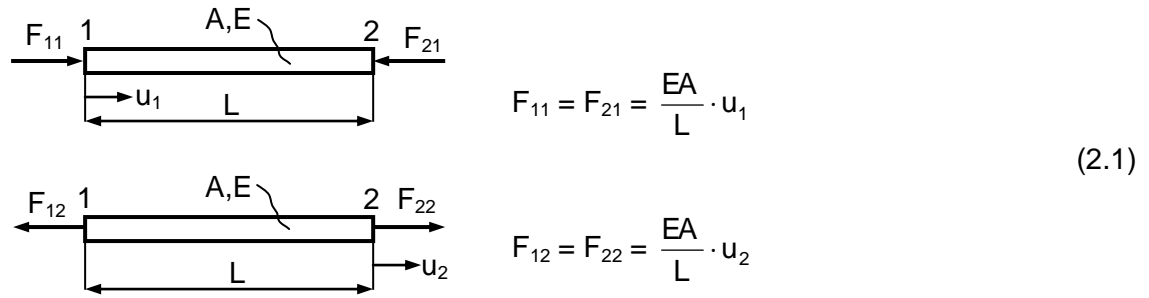


Fig.2.1 Forces nodales associées aux déplacements nodaux pour un élément de barre articulée

Si on écrit les relations (2.1) sous forme matricielle, on aura :

$$\begin{bmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Conformément à la convention de signes, on considère que les forces ainsi que les déplacements sont positifs dans la même direction (dans notre cas de gauche à droite). Si on remplace les forces par les expressions (2.1) on aura :

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L}u_1 & -\frac{EA}{L}u_2 \\ -\frac{EA}{L}u_1 & \frac{EA}{L}u_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

#### b) Procédure formelle

La méthode directe présentée ci-dessus ne peut fournir une expression de la matrice de rigidité que pour les cas très simples, là où les formules dérivées de la Résistance des matériaux fournissent des relations de calcul entre les déplacements nodaux et les forces nodales.

En généralisant, on doit trouver une formule de la matrice de rigidité [K] valable pour n'importe quel type d'élément. Cette formule générale est :

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [E] \cdot [B] dV \quad (2.4)$$

où :

[B] = matrice déformation-déplacement

[E] = matrice des propriétés du matériau (matrice constitutive)

dV = incrément de l'élément de volume V.

L'équation (2.4) peut être déduite du point de vue énergétique, en affirmant que le travail  $L_{ext}$  réalisé par les forces nodales qui sont appliquées pour créer des déplacements nodaux est emmagasiné dans l'élément comme énergie de déformation élastique ( $L_{ext} = U_{def}$ ).

Pour obtenir la matrice [B] pour l'élément de barre articulée, on commence par écrire l'expression du déplacement axial « u » à un point arbitraire de la barre.

Comme on peut constater de la figure 2.2, suite à une interpolation du déplacement « u » entre les deux valeurs nodales connues,  $u_1$  et  $u_2$ , nous conduit à :

$$u = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.5)$$

ou bien :

$$\{u\} = [N] \cdot \{d\} \quad (2.6)$$

[N] = matrice des fonctions de forme  
 {d} = vecteur des déplacements nodaux

Chaque fonction de forme décrit comment varie « u » avec la distance x lorsque le degré de liberté correspondant  $u_i$  est égal à 1 tandis que l'autre est égal à 0, c'est-à-dire :

- pour  $x = 0$ ,  $\frac{L-x}{L} = 1$  et  $\frac{x}{L} = 0$  ;
- pour  $x = L$ ,  $\frac{L-x}{L} = 0$  et  $\frac{x}{L} = 1$ .

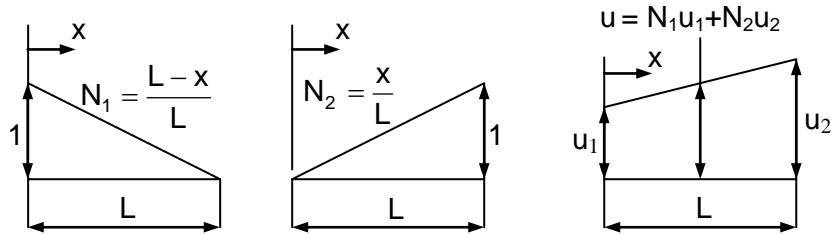


Fig.2.2 Les fonctions de forme pour un élément de barre à deux noeuds

$$\text{La déformation axiale } \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \left[ \frac{d}{dx} N \right] \cdot \{d\} = [B] \cdot \{d\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \{d\} \quad (2.7)$$

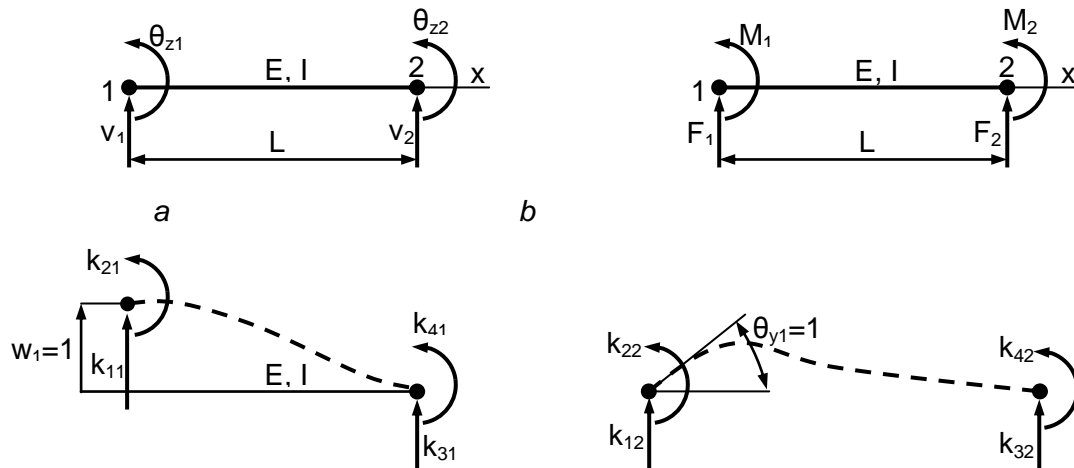
Donc, en appliquant la relation (2.4) on obtient :

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [E] \cdot [B] dV = \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot A dx = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

### 2.3 Déduction de la matrice de rigidité pour l'élément de poutre

#### a) Méthode directe

La figure 2.3 montre un élément de poutre dans le plan. L'élément est prismatique, ayant un module d'élasticité longitudinal E, de moment d'inertie I pour la section axiale. L'axe qui passe par les centres de chaque section a un déplacement latéral  $v = v(x)$ . Conformément à la théorie des poutres la fonction  $v = v(x)$  est un polynôme cubique en x pour une poutre uniforme prismatique chargée à ses extrémités.



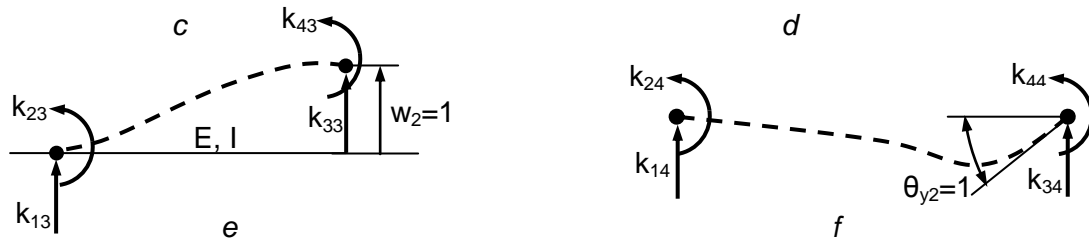


Fig. 2.3

- a) Élément de poutre et ses degrés de liberté  
 b) Chargements nodaux associés aux degrés de liberté  
 c) Formes déviées associées par l'activation de chaque degré de liberté

Les fonctions de forme associées par l'activation de l'un des quatre degrés de liberté sont présentées dans le Tableau 2.1.

Tableau 2.1

Activation du degré de liberté	Fonction de forme correspondante
Déplacement du noeud 1	$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$
Rotation du noeud 1	$N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$
Déplacement du noeud 2	$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$
Rotation du noeud 2	$N_4 = -\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^2}$

Les sens des déplacements sont considérés positifs de bas vers le haut tandis que les sens positifs des rotations correspondent au sens anti-horaire.

Pour trouver les composantes de la première colonne de la matrice de rigidité [K] correspondant à l'élément de poutre, respectivement  $[k_{11} \ k_{21} \ k_{31} \ k_{41}]^T$  on a utilisé les conditions suivantes :

- $w_1 = 1$  dans le noeud 1, ce qui conduit à :  $\frac{k_{11}L^3}{3EI} - \frac{k_{21}L^2}{2EI} = 1$  (2.9)

- $\theta_{z1} = 0$  dans le noeud 1, ce qui conduit à :  $-\frac{k_{11}L^2}{2EI} + \frac{k_{21}L}{EI} = 0$  (2.10)

A part ces deux équations, les équations d'équilibre de la statique seront ajoutées pour déterminer les deux autres composantes, respectivement  $k_{31}$  et  $k_{41}$  :

$$\begin{aligned} \sum F = 0 &\Rightarrow k_{11} + k_{31} = 0 \\ \sum M_{(2)} = 0 &\Rightarrow k_{21} + k_{41} - k_{11} \cdot L = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

De façon similaire, on aura pour chacun des trois états de déformation restés un set de quatre équations. En ce cas, chacun de ces trois états complètera les trois colonnes restées inachevées de la matrice de rigidité.



La matrice de rigidité [K] opère sur le vecteur des degrés de liberté associés à chaque noeud,  $[\delta] = [w_1 \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{y2}]^T$ .

Le résultat de ce processus sera donc :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

#### b) Procédure formelle

La forme spéciale de l'équation (2.4) sera dans ce cas :

$$[K] = \int_0^L [B]^T \cdot EI \cdot [B] dx \quad (2.13)$$

où [B] est maintenant la matrice qui donne l'expression de la courbure de l'élément de poutre à partir du produit  $[B] \cdot \{\delta\}$  :

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left[ \frac{d^2}{dx^2} N \right] \cdot \{\delta\} = [B] \cdot \{\delta\} \quad (2.14)$$

En terme de coordonnées généralisées  $\beta_i$  le déplacement latéral  $w = w(x)$  pour un élément de poutre sera sous la forme d'un polynôme cubique :

$$w = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 \quad (2.15)$$

Les termes  $\beta_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) peuvent être déterminés en fonction des degrés de liberté associés à chaque noeud. Par exemple :

- à  $x = 0$ ,  $w = w_1$  et  $\theta_y = \theta_{y1}$ , où  $\theta = \frac{dw}{dx}$
- à  $x = L$ ,  $w = w_2$  et  $\theta_y = \theta_{y2}$

$$\text{Dans ces conditions, } \{w\} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{\delta\} \quad (2.16)$$

Après avoir résolu le système, on obtient pour la matrice [B] la forme suivante :

$$[B] = \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad ; \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad ; \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad ; \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \quad (2.17)$$

Exemple :

$$k_{11} = \int_0^L \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad ; \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad ; \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad ; \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \cdot EI \cdot \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \cdot dx \Rightarrow$$

$$k_{11} = \int_0^L \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right)^2 + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right)^2 + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right)^2 + \left( -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right)^2 dx = \frac{12 EI}{L^3} \text{ etc.}$$

En ce qui concerne le calcul des contraintes, on sait du cours de Résistance des matériaux que dans le cas d'une poutre soumise à la flexion,

$$\sigma_x = \frac{M}{I} \cdot z \quad \text{où} \quad M = EI \frac{d^2w}{dx^2} = EI \cdot [B] \cdot \{\delta\} \quad (2.18)$$

Pour l'élément de poutre 2D (bidimensionnel), celui ci est la combinaison entre un élément de barre et un élément de poutre. Dans ce cas, la matrice de rigidité [K] sera :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

## 2.4 Systèmes de coordonnées globales et locaux

L'utilisateur définit la géométrie d'un modèle avec éléments finis dans un système de coordonnées global XYZ. Le logiciel génère typiquement une matrice de rigidité pour un élément quelconque dans un système local de coordonnées xyz et le convertit dans le système global pour réaliser l'assemblage des éléments. Le système global et local peuvent être parallèles ou coïncidents, cas dans lesquels les composantes des déplacements nodaux sont identiques dans les deux systèmes.

## 2.5 Propriétés de la matrice de rigidité

Les matrices de rigidité [k] (dans le système local) et [K] (dans le système global) sont symétriques. Cela reste toujours vrai pour tout élément de structure où il existe une relation linéaire entre les charges appliquées et les déformations résultantes.

Chaque coefficient de la diagonale des matrices [k], respectivement [K] sont positifs. Imaginons qu'un certain degré de liberté  $\delta_i$  serait le seul degré de liberté non nul ; le chargement associé à ce degré est  $f_i = k_{11}\delta_i$ . Du fait que  $d_i$  et  $r_i$  sont positifs dans la même direction, une diagonale négative des coefficients  $k_{ii}$  voudrait dire qu'un chargement et son

déplacement correspondant seraient orientés de façon opposée, fait qui en réalité est déraisonnable.

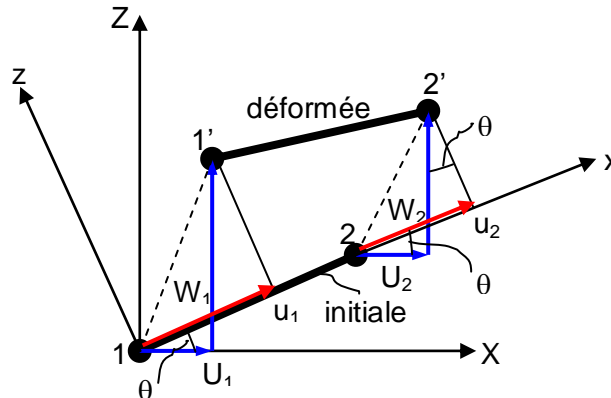
Une structure qui est soit sans supports soit avec des supports inadéquats a une matrice de rigidité  $[K]$  singulière et dans ce cas le logiciel d'éléments finis ne peut pas être capable de résoudre l'équation  $\{F\} = [K] \cdot \{\delta\}$ . Pour prévenir la singularité, les supports doivent être suffisamment nombreux pour prévenir tous les mouvements de corps rigide possibles.

## COURS 3

### DÉDUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ POUR LES BARRES ARTICULÉES

#### 3.1 Transformation des coordonnées du système local en système global

Dans la figure 3.1 est représenté un exemple typique de barre articulée ainsi que les deux repères de coordonnées, local  $xOz$  et global  $XOZ$ . Les déplacements dans le système local sont  $u_1$  et  $u_2$  et dans le système global  $U_1, W_1$  et  $U_2, W_2$ . L'angle  $\theta$  est considéré l'angle entre l'axe  $X$  et la direction positive de la barre articulée 1-2.



*Fig.3.1 Système local et global de coordonnées*

Les déplacements dans le système local  $xOy$  peut être exprimé en fonction des déplacements globaux.

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 \cos\theta + W_1 \sin\theta \\ u_2 &= U_2 \cos\theta + W_2 \sin\theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ W_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{u\} = [T] \cdot [U] \quad (3.2)$$

ou  $[T]$  s'appelle matrice de transformation du système local dans celui global et :

$$\cos\theta = \frac{X_2 - X_1}{L}, \quad \sin\theta = \frac{Z_2 - Z_1}{L} \quad \text{et} \quad L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2},$$

$L$  représentant la longueur de l'élément de barre articulée.

#### 3.2 Transformation des forces du système local en système global

On considère la barre articulée de la figure 3.2 soumise dans le système local par les forces  $f_1$  et  $f_2$  appliquées dans les noeuds 1 et 2 dans le système local d'axes de coordonnées. Les composantes de ces forces dans le système global seront :

$$\begin{aligned} F_{x1} &= f_1 \cos \theta ; F_{z1} = f_2 \cos \theta \\ F_{x2} &= f_1 \sin \theta ; F_{z2} = f_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

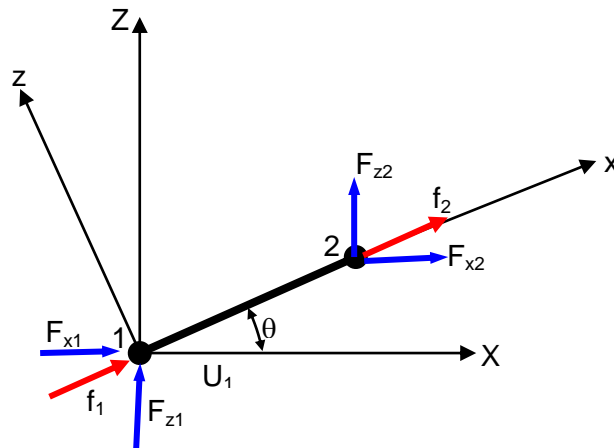


Fig.3.2 Forces nodales dans le système local et global d'axes de coordonnées

Sous forme matricielle, les relations 3.3 peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_e \quad (3.4)$$

ou bien :

$$\{F^e\} = [T^e]^T \cdot \{f^e\} \quad (3.5)$$

### 3.3 Dédution de la matrice de rigidité d'un élément de barre articulée dans le système global d'axes

En partant de l'équation (3.5) on aura, pour le système global d'axes :

$$\{F^e\} = [T^e]^T \cdot \{f^e\} = [T^e]^T \cdot [k^e] \cdot \{u^e\} = \underbrace{[T^e]^T \cdot [k^e] \cdot [T]}_{[K^e]} \cdot \{U^e\} = [K^e] \cdot \{U^e\} \quad (3.6)$$

où :

- $\{F^e\}$  = vecteur des forces nodales dans le système global d'axes ;
- $\{f^e\}$  = vecteur des forces nodales dans le système local d'axes ;
- $[K^e]$  = matrice de rigidité dans le système global d'axes ;
- $[k^e]$  = matrice de rigidité dans le système local d'axes ;
- $\{U^e\}$  = vecteur des déplacements nodaux dans le système global d'axes ;
- $\{u^e\}$  = vecteur des déplacements nodaux dans le système local d'axes.

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

(3.7)

où  $c = \cos\theta$  et  $s = \sin\theta$ .

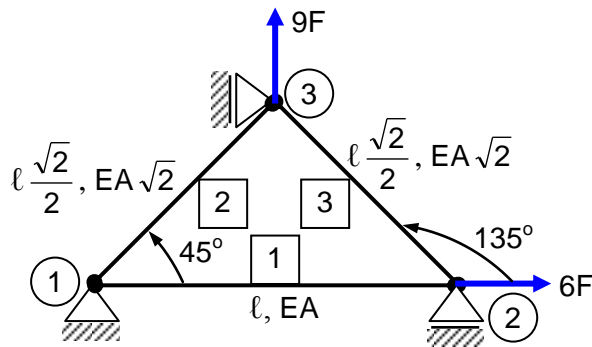
La matrice de rigidité dans le système global d'axes est symétrique, singulière et, comme on peut facilement remarquer, les éléments de la diagonale principale sont positifs.

### 3.4 Application

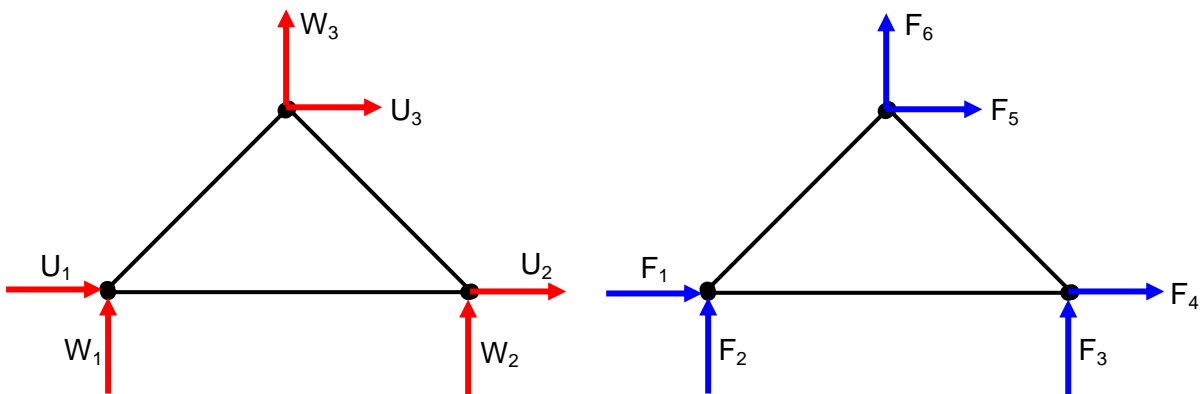
Pour le système de barres articulées de la figure ci-dessous déterminez :

- les efforts et les contraintes dans chaque barre ;
- les déplacements nodaux.

On considère connues  $E$ ,  $F$ ,  $\ell$  et  $A$ . Application numérique :  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $A = 200$  mm<sup>2</sup>,  $\ell = 1$  m et  $F = 10$  kN.



- Premier pas : numérotation des noeuds et des éléments
- Deuxième pas : application des forces nodales et des déplacements nodaux.



- Troisième pas : complètement du tableau

Barre	Noeuds		$\theta_e$ [°]	$\cos \theta_e$	$\sin \theta_e$	$c^2$	$s^2$	cs	$l_e$	$EA_e$	$\frac{EA_e}{l_e}$
	i	j									
1	1	2	0	1	0	1	0	0	$\ell$	EA	$\frac{EA}{\ell}$

2	1	3	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$l \frac{\sqrt{2}}{2}$	$EA\sqrt{2}$	$\frac{2EA}{l}$
3	2	3	135	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$l \frac{\sqrt{2}}{2}$	$EA\sqrt{2}$	$\frac{2EA}{l}$

- Quatrième pas : écriture de la matrice de rigidité pour chaque élément de barre séparément

$$[K^1] = \frac{EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [K^2] = \frac{2EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} ;$$

$$[K^3] = \frac{2EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

- Cinquième pas : Emplacement des trois matrices dans une matrice globale [K] (6 lignes x 6 colonnes).

$$[K^1] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [K^2] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

- Sixième pas : Assamblage des matrices de rigidité  $[K^i]$  dans la matrice globale de rigidité

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & 0 & \frac{2EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} & 0 \\ \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{2EA}{l} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Septième pas : écriture de la relation fondamentale de la MEF,  $\{F\} = [K] \cdot \{\delta\}$  et détermination des déplacements nodaux et des forces nodales :

$$\begin{cases} F_1 = ? \\ F_2 = ? \\ F_3 = 6F \\ F_4 = ? \\ F_5 = ? \\ F_6 = 9F \end{cases} = \frac{EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} U_1 = 0 \\ W_1 = 0 \\ U_2 = ? \\ W_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ W_3 = ? \end{cases}$$

On peut facilement remarquer que là où on connaît les forces nodales on ne connaît pas les déplacements nodaux et inversement, là où on connaît les déplacements nodaux, les forces nodales sont inconnues. En choisissant les lignes 3 et 6 on peut facilement calculer les déplacements nodaux :

$$\begin{cases} 2\frac{EA}{l}U_2 + \frac{EA}{l}W_3 = 6F \\ \frac{EA}{l}U_2 + 2\frac{EA}{l}W_3 = 9F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_2 = \frac{Fl}{EA} = \frac{10^4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} = 0,25 \text{ mm} \\ W_3 = \frac{4Fl}{EA} = \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} = 1 \text{ mm} \end{cases}$$

En ce qui concerne les forces nodales on prend comme équations les lignes 1, 2, 4 et 5. On aura dans ce cas :

$$\begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{cases} = \frac{EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} U_2 \\ W_3 \end{cases} = \begin{cases} -5F \\ -4F \\ -5F \\ -F \end{cases}$$

L'allongement  $\Delta l$  pour un élément quelconque  $i - j$  se calcule avec la formule :

$$\Delta l_{ij} = (U_j - U_i) \cos\theta - (W_j - W_i) \sin\theta \quad (3.8)$$

- Huitième pas : calcul des efforts dans chaque élément de barre.

Les efforts dans un élément de barre articulée  $i - j$  se calculent avec la formule :

$$N_{ij}^e = \frac{EA^e}{\ell^e} \cdot \Delta \ell_{ij}^e = \frac{EA^e}{\ell^e} \cdot \begin{Bmatrix} -c & -s & c & s \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \end{Bmatrix}_e \quad (3.9)$$

En appliquant la relation (3.9) on aura donc les efforts dans les barres 1-2, 1-3 et 2-3

$$N_{12}^1 = \frac{EA}{\ell} \cdot \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F\ell \\ EA \\ 0 \end{Bmatrix} = F = 10000 \text{ [N]}$$

$$N_{13}^2 = \frac{EA\sqrt{2}}{\ell \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4F\ell \\ EA \end{Bmatrix} = 4\sqrt{2}F = 56568,54 \text{ [N]}$$

$$N_{23}^3 = \frac{EA\sqrt{2}}{\ell \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F\ell \\ EA \\ 0 \\ 0 \\ 4F\ell \\ EA \end{Bmatrix} = 5\sqrt{2}F = 70710,67 \text{ [N]}$$

Les contraintes dans chaque élément de barre se calculent avec la formule :  $\sigma_{ij}^e = \frac{N_{ij}^e}{A_e}$ , donc :

$$\sigma_{12}^1 = \frac{N_{12}^1}{A_1} = \frac{10000}{200} = 50 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{13}^2 = \frac{N_{13}^2}{A_2} = \frac{56568,54}{200\sqrt{2}} = 200 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{23}^3 = \frac{N_{23}^3}{A_3} = \frac{70710,67}{200\sqrt{2}} = 250 \text{ [MPa]}$$

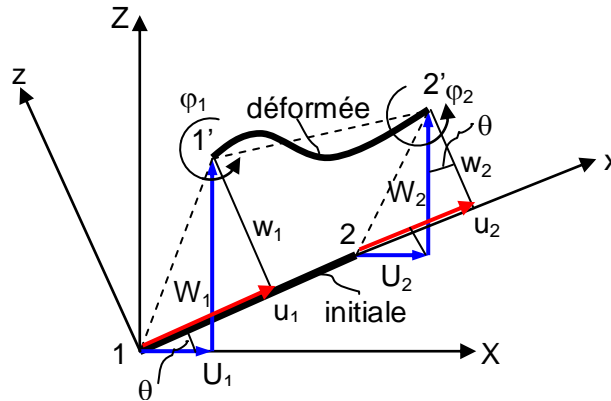


## COURS 4

### DÉDUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ POUR LES POUTRES

#### 4.1 Transformation des coordonnées du système local en système global

Dans la figure 4.1 est représenté un exemple typique de poutre ainsi que les deux repères de coordonnées, local xOz et global XOZ. Les déplacements dans le système local sont  $u_1$  et  $u_2$  et dans le système global  $U_1$ ,  $W_1$  et  $U_2$ ,  $W_2$ . Les rotations  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont les mêmes dans les deux systèmes de coordonnées. L'angle  $\theta$  est considéré l'angle entre l'axe X et la direction positive de la poutre 1-2.



*Fig.4.1 Système local et global de coordonnées*

Les déplacements dans le système local xOy peut être exprimé en fonction des déplacements globaux.

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 \cos\theta + W_1 \sin\theta \\ u_2 &= -U_2 \sin\theta + W_2 \cos\theta \end{aligned} \quad (4.1)$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ W_1 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

pour le noeud 1.

De façon similaire, pour le noeud 2 on aura :

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ W_2 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Sachant que :

$$\{u^e\} = [T^e] \cdot \{U^e\} \quad (4.4)$$

il en résulte :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ \varphi_1 \\ U_2 \\ W_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

La relation (4.5) représente la transformation des déplacements du système local en celui global, par l'intermédiaire de la matrice de transformation  $[T^e]$ .

#### 4.2 Dédution de la matrice de rigidité et de celle des forces nodales pour un élément de poutre dans le système global d'axes

L'expression de la matrice de rigidité attachée à un élément de poutre  $[K^e]$  dans le système global d'axes aura la forme :

$$[K^e] = [T^e]^T \cdot [k^e] \cdot [T^e] \quad (4.6)$$

Les forces nodales seront données par l'expression :

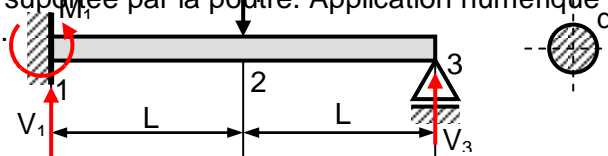
$$\{F^e\} = [T^e]^T \cdot \{f^e\} = [T^e]^T \cdot [k^e] \cdot \{u^e\} = \underbrace{[T^e]^T \cdot [k^e] \cdot [T^e]}_{[K^e]} \cdot \{U^e\} = [K^e] \cdot \{U^e\} \quad (4.7)$$

où :

- $\{F^e\}$  = vecteur des forces nodales dans le système global d'axes ;
- $\{f^e\}$  = vecteur des forces nodales dans le système local d'axes ;
- $[K^e]$  = matrice de rigidité dans le système global d'axes ;
- $[k^e]$  = matrice de rigidité dans le système local d'axes ;
- $\{U^e\}$  = vecteur des déplacements nodaux dans le système global d'axes ;
- $\{u^e\}$  = vecteur des déplacements nodaux dans le système local d'axes.

#### 4.3 Application 1

Pour la poutre de section circulaire de diamètre  $d$  (fig.4.2), calculez le déplacement transversal du noeud 2 ainsi que les réactions  $V_1$ ,  $M_1$  et  $V_3$ . Tracez les diagrammes T et M et déterminez la contrainte maximale supportée par la poutre. Application numérique :  $L = 0,8$  m,  $E = 21 \cdot 10^4$  MPa,  $F = 4$  kN,  $d = 60$  mm.



On part de l'expression de la matrice de rigidité pour un élément de poutre dans un système local d'axes de coordonnées :

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

On particularise cette expression pour chacune des deux régions 1-2 respectivement 2-3, en négligeant les lignes et les colonnes 1 et 4, à cause de l'absence des forces axiales :

$$[K^I] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_I = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 & -6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_I$$

$$[K^{II}] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{II} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{II}$$

Donc,  $\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2^I \\ M_2^I \end{Bmatrix}_I = [K^I] \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ \varphi_1 \\ W_2^I \\ \varphi_2^I \end{Bmatrix}_I$  et  $\begin{Bmatrix} V_2^{II} \\ M_2^{II} \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}_{II} = [K^{II}] \cdot \begin{Bmatrix} W_2^{II} \\ \varphi_2^{II} \\ W_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}_{II}$

En assemblant les deux matrices de rigidité, on aura :

$$[K] = [K^I] + [K^{II}] = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

En écrivant l'équation fondamentale de la MEF, on aura :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2^I \\ M_2^I \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 & -6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ \varphi_1 \\ W_2 \\ \varphi_2 \\ W_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} \text{ et,}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2^{II} \\ M_2^{II} \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ \varphi_1 \\ W_2 \\ \varphi_2 \\ W_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

Par l'addition des deux relations, il en résulte :

$$\begin{cases} V_1 \\ M_1 \\ V_2 = -F \\ M_2 = 0 \\ V_3 \\ M_3 = 0 \end{cases} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{cases} W_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ W_2 \\ \varphi_2 \\ W_3 = 0 \\ \varphi_3 \end{cases}$$

En choisissant les lignes et les colonnes 3, 4 et 6, on obtiendra :

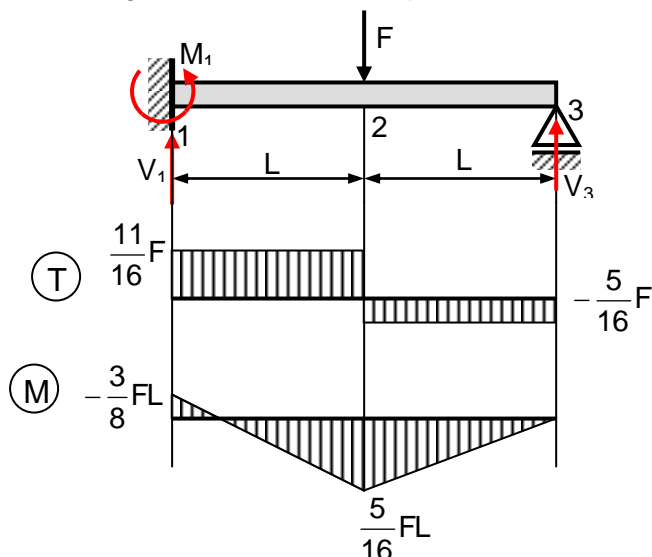
$$\begin{cases} -F \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} W_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{cases}, \text{ d'où il en résulte : } W_2 = -\frac{7 FL^3}{96 EI}, \varphi_2 = -\frac{3 FL^2}{96 EI} \text{ et}$$

$\varphi_3 = \frac{12 FL^2}{96 EI}$ . En remplaçant ces trois valeurs dans le système matriciel, écrit pour les lignes et les colonnes 1, 2 et 5, on obtiendra :

$$\begin{cases} V_1 \\ M_1 \\ V_3 \end{cases} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} -12 & 6L & 0 \\ -6L & 2L^2 & 0 \\ -12 & -6L & -6L \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} -\frac{7 FL^3}{96 EI} \\ \frac{3 FL^2}{96 EI} \\ \frac{12 FL^2}{96 EI} \end{cases}, \text{ d'où il en résulte : } V_1 = \frac{11}{16}F, V_3 = \frac{5}{16}F \text{ et}$$

$$M_1 = -\frac{3}{8}FL.$$

Les diagrammes T et M sont présentés ci-dessous :



En ce qui concerne la contrainte maximale, en appliquant la relation de Navier, on obtiendra :

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_y} = \frac{3FL}{8 \cdot \frac{\pi d^3}{32}} = \frac{3 \cdot 4000 \cdot 800 \cdot 32}{8 \cdot \pi \cdot 60^3} = 56,58 \text{ MPa}.$$