سلسلة الأعمال الموجهة رقم 4 – الجبر 1
الحلقات و الحقول

التمرين 1 :

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانوني التركيب الداخليين $\triangle$ و $\odot$ المعرفين بـ :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \triangle b = a + b - 2 \text{ و } a \odot b = a.b - 2a - 2b + 6$$

1) برهن أن $(\mathbb{R}, \triangle)$ زمرة تبديليه .

2) برهن أن $(\mathbb{R}, \triangle, \odot)$ حلقة تبديليه واحدية .

3) عين مجموعة العناصر القابلة للقلب $U(\mathbb{R})$ و استنتج أن $(\mathbb{R}, \triangle, \odot)$ حقل تبديلي .

التمرين 2 :

نزود المجموعة $\mathbb{R}^2$ بقانوني التركيب الداخلي :

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \oplus (x',y') = (x + x', y + y')$$
$$\text{و } (x,y) \otimes (x',y') = (x.x', y.y')$$

برهن أن $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ حلقة تبديليه واحديه . هل هي تامة؟ هل هي حقل؟

التمرين 3 :

لتكن المجموعة $B = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z} \; et \; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. برهن أن A حلقة جزئية من $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. برهن أن مجموعة العناصر القابلة للقلب هي $U(B) = \{\pm 2^k ; k \in \mathbb{Z}\}$.
3. هل A حقل جزئي؟

التمرين 4 يترك للطالب

نزود $\mathbb{Z}$ بعلاقة التكافؤ $\mathcal{R}$ المعرفة بـ :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow [(x-y) \text{ مضاعف للعدد } 5]$$

لتكن $G = \mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$ مجموعة اصناف التكافؤ بالعلاقة $\mathcal{R}$ مزودة بالقانوني $\dot{+}$ و $\dot{\times}$:

$$\forall (\dot{x}, \dot{y}) \in (\mathbb{Z}/\mathcal{R})^2 : \dot{x} \dot{+} \dot{y} = \dot{\overbrace{x+y}} \quad \text{و} \quad \dot{x} \dot{\times} \dot{y} = \dot{\overbrace{x \times y}}$$

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$					
$\dot{1}$					
$\dot{2}$					
$\dot{3}$					
$\dot{4}$					

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$					
$\dot{1}$					
$\dot{2}$					
$\dot{3}$					
$\dot{4}$					

1) أملأ الجدولين و تأكد أن $(G, \dot{+})$ زمرة تبديليه .

2) برهن أن $(G, \dot{+}, \dot{\times})$ حلقة تبديليه واحديه . هل هي تامة ؟

3) عين العناصر القابلة للقلب و استنتج أن كان $(G, \dot{+}, \dot{\times})$ حقل تبديلي ؟

* اعد الاجابة على الأسئلة من اجل العلاقة $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow [(x-y) \text{ مضاعف للعدد } 6]$