جامعة محمد الصديق بن يحي - جيجل

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم التعليم الأساسي

مقياس : الرياضيات 1 السنة الجامعية : 2023-2024

# حل السلسلة رقم 4 (الدوال الأصلية)

**التمرين 1 :** 1) حساب التكاملات :

$$I_1=\int(-4x^3+2x+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+x^{-4}+5)\ dx=-x^4+x^2+\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^{-3}+5x+c_1,\ \ ,\ c_1\in\mathbb{R}$$

بوضع $f(x)=x^2+1$ نجد التكامل من الشكل $\int\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx$ ومنه

$$I_2=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx=\sqrt{f(x)}+c_2=\sqrt{x^2+1}+c_2\quad ,\ c_2\in\mathbb{R}$$

بوضع $g(x)=x^2+5$ نجد التكامل من الشكل $\frac{3}{2}\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx$ ومنه

$$I_3=\int\frac{3x}{x^2+5}\ dx=\frac{3}{2}\ln|g(x)|+c_3=\frac{3}{2}\ln(x^2+5)+c_3,\quad c_3\in\mathbb{R}$$

بوضع $h(x)=x^2+2x$ نجد التكامل من الشكل $\frac{1}{2}\int h'(x)e^{h(x)}dx$ ومنه

$$I_4=\int(x+1)e^{x^2+2x}\ dx=\frac{1}{2}e^{h(x)}+c_4=\frac{1}{2}e^{x^2+2x}+c_4,\quad c_4\in\mathbb{R}$$

2) باستعمال تبديل المتغير :

$$J_1=\int\frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}dx=\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)+c_1,\quad c_1\in\mathbb{R}\ \ (t=\sqrt{x})$$

$$J_2=\int\frac{1}{x\ln^2 x}\ dx=\frac{-1}{\ln x}+c_2\in\mathbb{R}\quad (t=\ln x)$$

$$J_3=\int\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\ dx=\frac{-1}{1+e^x}+c_3,\ \ c_3\in\mathbb{R}\quad (t=e^x)$$

3) باستعمال التكامل بالتجزئة :

نذكر أن التكامل بالتجزئة يكون بالشكل :

$$\int u(x)v'(x)\ dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\ dx+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

$$K_1=\int x\ln x\ dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c_1,\quad c_1\in\mathbb{R}\qquad (u_1(x)=\ln x,\ \ v_1'(x)=x)$$

$$K_2=\int(x+2)e^{3x+1}\ dx=\frac{1}{3}(x+\frac{5}{3})e^{3x+1}+c_2,\ \ c_2\in\mathbb{R}\qquad (u_2(x)=x+2,\ \ v_2'(x)=e^{3x+1})$$

**التمرين 2 :** نعتبر التكامل $I_n$ المعرف بـ $I_n=\int_0^1 x^n e^x\ dx$

1) حساب $I_0$ و $I_1$

$$I_0 = \int_0^1 x^0 e^x \; dx = e - 1 \qquad I_1 = \int_0^1 x e^x \; dx = 1 \qquad \big(u(x) = x, \;\; v'(x) = e^x\big)$$

2) باستعمال البرهان بالتراجع برهان أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} = e - (n+1) I_n$$

نسمي $p(n)$ العلاقة $I_{n+1} = e - (n+1)I_n \;,\; \forall n \in \mathbb{N}$

نتحقق من صحة $p(0)$ أي صحة العلاقة من أجل: $n = 0$

لدينا : $I_1 = \int_0^1 x e^x \; dx = e - I_0 = e - (0+1)I_0$ ومنه: $p(0)$ محققة.

نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(n+1)$

لدينا :

$$\begin{aligned} I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^x \; dx &= x^{n+2} e^x |_0^1 - (n+2) \int_0^1 x^{n+1} e^x \; dx \\ &= e - (n+2) \int_0^1 x^{n+1} e^x \; dx = e - (n+2) I_{n+1} \end{aligned}$$

إذن $p(n+1)$ صحيحة ومنه $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} = e - (n+1) I_n$

3) حساب $I_2$ و $I_3$ باستعمال العبارة السابقة

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^x \; dx = e - (1+1) I_1 = e - 2 \quad , \quad I_3 = \int_0^1 x^3 e^x \; dx = e - (2+1) I_2 = -2e + 6$$

4) لدينا

$$I = \int_0^1 (2x^3 - 4x^2 - x + 3) e^x = 2I_3 - 4I2 - I_1 + 3I_0 = -5e + 16$$

**الأستاذة : سلامنية فتيحة**