1.1 Formule de quadrature

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Il est souvent difficile, voire même impossible, de déterminer une primitive de f et de calculer exactement $I(f)$, justifiant ainsi l'utilisation d'une approximation numérique. La méthode de base associée, appelée quadrature numérique, consiste en l'approximation de l'intégrale par une somme de la forme suivante

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, f(x_i).$$

La plupart des procédés que nous considérerons sont basés sur l'approximation d'une fonction par interpolation polynômiale introduite dans le chapitre précédent. Plus précisémment, on sélectionne $n+1$ points $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ dans $[a, b]$ et on considère

$$\Pi_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x),$$

le polynôme d'interpolation de f aux points $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$. Vu que

$$f(x) = \Pi_n f(x) + \underbrace{\tfrac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}_{E_n f(x)}, \qquad \zeta_x \in]a, b[$$

il vient que

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b \Pi_n(x)\,dx + \int_a^b E_n f(x)\,dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)\varphi_i(x)\,dx + \int_a^b E_n f(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b \varphi_i(x)\,dx}_{\alpha_i} + \int_a^b E_n f(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^n \alpha_i\, f(x_i) + \int_a^b E_n f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la formule de quadrature est donnée par

$$I(f) \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i\, f(x_i) \qquad \text{avec} \quad \alpha_i = \int_a^b \varphi_i(x)\,dx,$$

et l'erreur de quadrature est définie comme la différence

$$I(f) - \sum_{i=0}^n \alpha_i\, f(x_i).$$

Les points x_i et les constantes α_i sont, respectivement, les noeuds et les poids de la quadrature.

1.2 Formules d'intégration simples

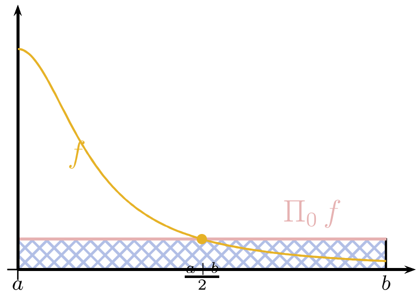
1.2.1 Règle du rectangle simple

Aussi appelée règle du point milieu. C'est une méthode d'approximation simple oùu on considère unn polynôme d'ordre 0, i.e. une constante, égal à la valeur de f au point milieu. Plus précisemment

$$n = 0, \qquad x_0 = \tfrac{a+b}{2} \qquad \text{e} \qquad \Pi_0(x) = f(x_0).$$

La formule de quadrature correspondante s'écrit alors

$$I_R(f) = \int_a^b \Pi_0(x)\,dx = (b-a) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right).$$



Exemple 1. Approcher

$$\int_0^5 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(5) \approx 1.373400766945016$$

Solution. Utilisant la règle du rectangle simple, on obtient

$$I_R(f) = (5-0)f\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{5}{1+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 0.6896551724137931$$

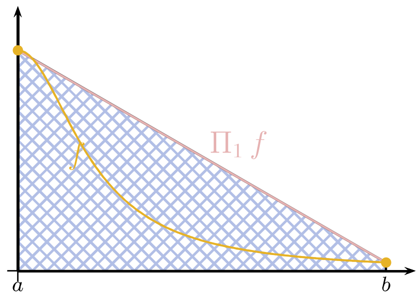
L'erreur correspondante est donnée par

$$|I(f) - I_R(f)| = 0.6837455945312227$$

1.2.2 Règle du trapèze simple

Elle est obtenue en considérant un polynôme d'interpolation de degré 1 aux noeuds $x_0 = a$ et $x_1 = b$. La forlmule de quadrature associée s'écrit

$$I_T(f) = \int_a^b \Pi_1(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$



Exemple 2. Considère l'intégrale de l'exemple 1. Utilisant la règle du trapèze simple, on obtient

$$I_T(f) = (5-0)\frac{f(5)+f(0)}{2} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{1+5^2}+1\right) = 2.596153846153846$$

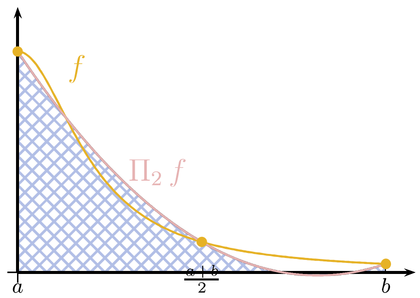
avec l'erreur donnée par

$$|I(f) - I_T(f)| = 1.22275307920883$$

1.2.3 Règle de Simpson simple

Elle est obtenue en considérant un polynôme d'interpolation de degré 2 aux noeuds $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$. La forlmule de quadrature associée s'écrit

$$I_S(f) = \int_a^b \Pi_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$



Exemple 3. Considère l'intégrale de l'exemple 1. Utilisant la règle de Simpson simple, on obtient

$$\begin{aligned} I_S(f) &= (5-0)\frac{f(5)+2f\left(\frac{5}{2}\right)+f(0)}{6} = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{1+5^2} + \frac{2}{1+\left(\frac{5}{2}\right)^2} + 1\right) \\ &= 1.09526967285588 \end{aligned}$$

avec l'erreur donnée par

$$|I(f) - I_S(f)| = 0.2781310940891359$$

1.3 Formules d'intégration composées

Considère une subdivision de $[a, b]$ en m sous-intervalles $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \cdots, m$, de même longueur $h = \frac{b-a}{m}$. L'idée est d'appliquer la méthode de quadrature simple sur chaque sous-intervalle, i.e. approcher $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx$ par $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} \Pi_n^k f(x)\, dx$, où $\Pi_n^k f$ est le polynôme d'interpolation de f dans le sous-intervalle $[x_{k-1}, x_k]$. Vu que

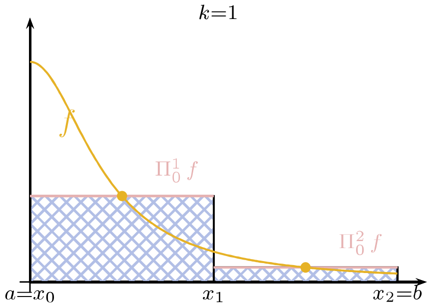
$$I(f) = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx,$$

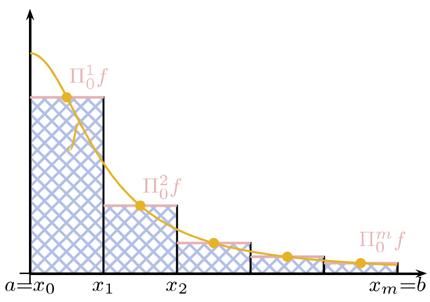
il vient que $I(f)$ est approché par $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Pi_n^k f(x)\, dx$.

1.3.1 Règle du rectangle composée

Elle est obtenue en appliquant la règle du rectangle simple sur chaque sous-intervalle $[x_{k-1}, x_k]$:

$$I_R^m(f) = h \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$$





Exemple 4. Considère l'intégrale de l'exemple 1. Utilisant la règle du rectangle composée avec $m = 2$, on obtient

$$I_R^2(f) = \frac{5}{2}\left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{15}{4}\right)\right) = 1.141584859832$$

L'erreur correspondante (en valeur absolue) est donnée par

$$\left|I(f) - I_R^2(f)\right| = 0.2318159071130159$$

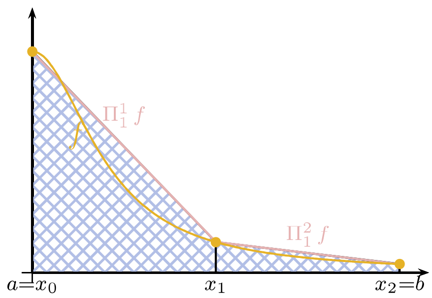
et elle est clairement inférieure à l'erreur obtenue avec la règle simple. Les résultats obtenus en augmentant le nombre de sous-intervalles sont résumés dans le tableau suivant

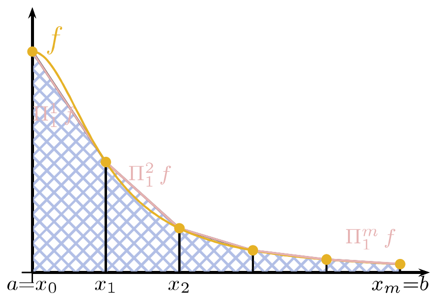
m	$I_R^m(f)$	$\lvert I(f) - I_R^m(f)\rvert$
4	1.353866933486058	0.01953383345895787
8	1.373505133232817	$1.04366287801 \times 10^{-4}$

1.3.2 Règle du trapèze composée

Elle est obtenue en appliquant la règle du trapèze simple sur chaque sous-intervalle $[x_{k-1}, x_k]$:

$$I_T^m(f) = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)$$





Exemple 5. Considère l'intégrale de l'exemple 1. Utilisant la règle du trapèze composée avec $m = 2$, on obtient

$$I_T^2(f) = \frac{5}{2}\left(f(0) + 2f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(5\right)\right) = 1.64290450928382$$

L'erreur correspondante (en valeur absolue) est donnée par

$$\left|I(f) - I_T^2(f)\right| = 0.269503742338804$$

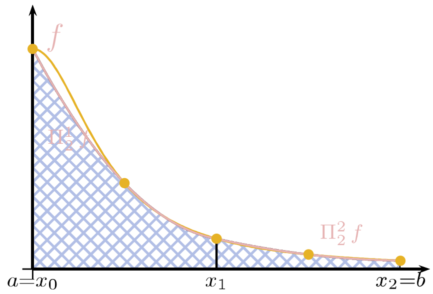
et elle est clairement inférieure à l'erreur obtenue avec la règle simple. Les résultats obtenus en augmentant le nombre de sous-intervalles sont résumés dans le tableau suivant

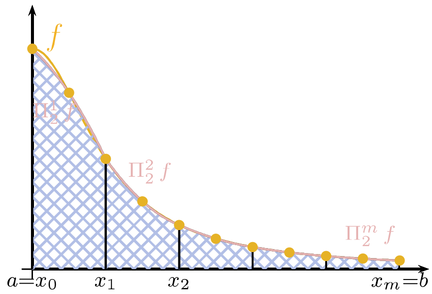
m	$I_T^m(f)$	$\lvert I(f) - I_T^m(f)\rvert$
4	1.39224468455791	0.0188439176128940 6
8	1.373055809021984	$3.44957923032 \times 10^{-4}$

1.3.3 Règle de Simpson composée

Elle est obtenue en appliquant la règle de Simpson simple sur chaque sous-intervalle $[x_{k-1}, x_k]$: $[x_{k-1}, x_k]$

$$I_S^m(f) = \frac{h}{6}\sum_{k=1}^{m}\left(f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + f(x_k)\right)$$





Exemple 6. Considère l'intégrale de l'exemple 1. Utilisant la règle de Simpson composée avec $m = 2$, on obtient

$$\begin{aligned} I_S^2(f) &= \frac{5}{12}\left(f(0) + 4f\left(\frac{5}{4}\right) + 2f\left(\frac{5}{2}\right) + 4f\left(\frac{15}{4}\right) + f(5)\right) \\ &= 1.308691409649274 \end{aligned}$$

L'erreur correspondante (en valeur absolue) est donnée par

$$\left|I(f) - I_S^2(f)\right| = 0.06470935729574179$$

et elle est clairement inférieure à l'erreur obtenue avec la règle simple. Les résultats obtenus en augmentant le nombre de sous-intervalles sont résumés dans le tableau suivant

m	$I_S^m(f)$	$\lvert I(f) - I_S^m(f)\rvert$
4	1.366659517176675	0.006741249768341
8	1.373355358495872	$4.5408449144e \times 10^{-5}$

1.4 Erreur de quadrature

1.4.1 Erreur de quadrature pour la règle du ractangle

Théorème 7. *Soit $f \in C^2[a,b]$ et soit $I_R(f)$ l'approximation de $I(f)$ par la règle du rectangle simple. L'erreur correspondante satisfait*

$$|I(f) - I_R(f)| \leq \frac{\mathrm{M}_2}{24}(b-a)^3$$

où $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f"(x)|$.

Démonstration. Utilisant la formule de Taylor au voisinage du point milieu $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{f"(\zeta_x)}{2}(x-\bar{x})^2, \qquad \zeta_x \in]a,b[,$$

et donc

$$\begin{aligned} |I(f) - I_R(f)| &= \left| \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(\bar{x}) \right| \\ &= \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(\bar{x})\,dx \right| \\ &= \left| \int_a^b (f(x) - f(\bar{x}))\,dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \left(f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{f"(\zeta_x)}{2}(x-\bar{x})^2 \right) dx \right|. \end{aligned}$$

Vu que

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(\bar{x})(x-\bar{x})\,dx &= f'(\bar{x}) \int_a^b (x-\bar{x})\,dx \\ &= \frac{f'(\bar{x})}{2}\left[(x-\bar{x})^2\right]_a^b \\ &= \frac{f'(\bar{x})}{2}\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et que

$$|f"(\zeta_x)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f"(x)| = \mathbf{M}_2,$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned}
|I(f) - I_R(f)| &= \tfrac{1}{2}\left|\int_a^b f"(\zeta_x)(x-\bar{x})^2\,dx\right| \\
&\leq \tfrac{1}{2}\int_a^b |f"(\zeta_x)|\,(x-\bar{x})^2\,dx \\
&\leq \tfrac{1}{2}\int_a^b \mathbf{M}_2\,(x-\bar{x})^2\,dx \\
&= \tfrac{\mathbf{M}_2}{2}\left[\tfrac{(x-\bar{x})^3}{3}\right]_a^b = \tfrac{\mathbf{M}_2}{2}\,\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3}{3} \\
&= \tfrac{\mathbf{M}_2}{2}\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^3 = \tfrac{\mathbf{M}_2}{24}\,(b-a)^3\,.
\end{aligned}$$

Corrolaire 8. *Soit $f \in C^2[a,b]$ et soit $I_R^m(f)$ l'approximation de $I(f)$ par la règle du rectangle associée à m sous-intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{m}$. L'erreur correspondante satisfait*

$$|I(f) - I_R^m(f)| \leq \tfrac{\mathbf{M}_2(b-a)}{24}\,h^2,$$

où $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f"(x)|$.

Démonstration. Soit $\bar{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, $k = 1, \cdots, m$. On a

$$\begin{aligned}
|I(f) - I_R^m(f)| &= \left|\sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\bar{x}_k))\,dx\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^m \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\bar{x}_k))\,dx\right|.
\end{aligned}$$

Appliquant le théorème précédent à chaque sous-intervalle, on obtient

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\bar{x}_k))\;dx\right| \leq \frac{\max\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} |f"(x)|}{24}\,h^3 \leq \tfrac{\mathbf{M}_2}{24}\,h^3.$$

Combinant les deux inégalités, nous concluons que

$$|I(f) - I_R^m(f)| \leq \sum_{k=1}^m \tfrac{\mathbf{M}_2}{24}\,h^3 = \tfrac{\mathbf{M}_2}{24}\,mh^3 = \tfrac{\mathbf{M}_2}{24}\,(b-a)h^2.$$

1.4.2 Erreur de quadrature pour la règle du trapèze

Théorème 9. *Soit $f \in C^2[a,b]$ et soit $I_R^m(f)$ l'approximation de $I(f)$ par la règle du trapèze associée à m sous-intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{m}$. L'erreur correspondante satisfait*

$$|I(f) - I_T^m(f)| \leq \tfrac{\mathrm{M}_2(b-a)}{12}\, h^2$$

onde $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f"(x)|$.

Démonstration. Commençons par considérer le cas de la règle simple. Nous savons que l'erreur de quadrature est donnée par

$$\begin{aligned} I(f) - I_T(f) &= \int_a^b \left(f(x) - \Pi_1(x)\right)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int_a^b f"(\zeta_x)(x-a)(x-b)\, dx, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |I(f) - I_T^1(f)| &= \tfrac{1}{2} \left| \int_a^b f"(\zeta_x)(x-a)(x-b)\, dx \right| \\ &\leq \tfrac{1}{2} \int_a^b |f"(\zeta_x)(x-a)(x-b)|\, dx \\ &\leq \tfrac{1}{2} \max_{x\in[a,b]} |f"(x)| \int_a^b |(x-a)(x-b)|\, dx. \end{aligned}$$

Vu que $\omega_2(x) = (x-a)(x-b) < 0$ in $]a,b[$, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |I(f) - I_T^1(f)| &\leq \tfrac{1}{2} \max_{x\in[a,b]} |f"(x)| \int_a^b (x-a)(b-x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2} \max_{x\in[a,b]} |f"(x)|\, \tfrac{(b-a)^3}{6} \\ &= \max_{x\in[a,b]} |f"(x)|\, \tfrac{(b-a)^3}{12}. \end{aligned}$$

La combinaison de ce résultat et d'arguments similaires à ceux utilisés dans le corollaire précédent nous permet de généraliser la formule d'erreur au cas de la règle du trapèze composée.

1.4.3 Erreur de quadrature pour la règle de Simpson

Théorème 10. *Soit $f \in C^4[a,b]$ et soit $I_S^m(f)$ l'approximation de $I(f)$ par la règle de Simpson composée associée à m sous-intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{m}$. L'erreur correspondante satisfait*

$$|I(f) - I_S^m(f)| \leq \frac{\mathrm{M}_4(b-a)}{16}\,\frac{h^4}{180}$$

où $M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

1.5 Accélération de la convergence

1.5.1 Extrapolation de Richardson

L'extrapolation de Richardson est un procédé qui combine plusieurs approximations d'une quantité donnée, de mode à garantir une convergence d'ordre supérieur sans coût supplémantaire. Plus précisemment, soit A une quantité donnée et soit $(A_m)_m$une approximation de A tel que

$$A = A_m + C_1\,h_m^2 + C_2\,h_m^4 + \cdots + C_k\,h_m^{2k} + O\left(h_m^{2k+2}\right), \tag{1.1}$$

où

$$h_{m+1} = \tfrac{1}{2}\,h_m, \qquad m \geq 0,$$

et où C_1, C_2, $\cdots$, C_k sont des constantes positives indépendantes de m. Vu que

$$h_m = \tfrac{1}{2}\,h_{m-1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 h_{m-2} = \cdots = \left(\tfrac{1}{2}\right)^m h_0,$$

il vient que

$$\lim_{m\to+\infty} h_m = \lim_{m\to+\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^m h_0 = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{m\to+\infty} (A - A_m) = \lim_{m\to+\infty} \left(C_1\,h_m^2 + \cdots + C_k\,h_m^{2k} + O\left(h_m^{2k+2}\right)\right) = 0$$

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{A-A_m}{h_m^2} = \lim_{m\to+\infty} \left(C_1 + \cdots + C_k\,h_m^{2k-2} + O\left(h_m^{2k}\right)\right) = C_1,$$

ce qui implique que A_m est une approximation d'ordre 2 de A. De (1.1), nous déduisons que pour $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} A &= A_{m-1} + C_1\, h_{m-1}^2 + C_2\, h_{m-1}^4 + \cdots + C_k\, h_{m-1}^{2k} + \mathrm{O}\left(h_{m-1}^{2k+2}\right) \\ &= A_{m-1} + C_1\,(2h_m)^2 + C_2\,(2h_m)^4 + \cdots + C_k\,(2h_m)^{2k} + \mathrm{O}\left(h_m^{2k+2}\right) \\ &= A_{m-1} + 2^2\, C_1\, h_m^2 + 2^4\, C_2\, h_m^4 + \cdots + 2^{2k}\, C_k\, h_m^{2k} + \mathrm{O}\left(h_m^{2k+2}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Multipliant (1.1) par 4 et soustrayant (1.2), on obtient

$$\begin{aligned} (4-1)\, A &= 4\, A_m - A_{m-1} + (4-2^4)\, C_2\, h_m^4 \\ &\quad + \cdots + \left(4-2^k\right) C_k\, h_m^{2k} + \mathrm{O}\left(h_m^{2k+2}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{4\,A_m - A_{m-1}}{4-1} + \tfrac{\left(4-2^4\right)C_2}{2^2-1}\, h_m^4 + \cdots + \tfrac{\left(4-2^k\right)C_k}{2^2-1}\, h_m^{2k} + \mathrm{O}\left(h_m^{2k+2}\right) \\ &= B_{m,1} + \widetilde{C}_2\, h_m^4 + \cdots + \widetilde{C}_k\, h_m^{2k} + \mathrm{O}\left(h_m^{2k+2}\right) \end{aligned}\ . \tag{1.3}$$

En d'autres termes

$$B_{m,1} = \tfrac{4\,A_m - A_{m-1}}{4-1}, \qquad m \geq 1$$

est une aproximation de A d'ordre 4.

Utilisant (1.3) et répétant le procédé, on obtient

$$\begin{aligned} A &= B_{m-1,1} + \widetilde{C}_2\, h_{m-1}^4 + \cdots + \widetilde{C}_k\, h_{m-1}^{2k} + \mathrm{O}\left(h_{m-1}^{2k+2}\right) \\ &= B_{m-1,1} + \widetilde{C}_2\,(2h_m)^4 + \cdots + \widetilde{C}_k\,(2h_m)^{2k} + \mathrm{O}\left(h_m^{2k+2}\right) \\ &= B_{m-1,1} + 2^4\,\widetilde{C}_2\, h_m^4 + \cdots + 2^{2k}\, C_k\, h_m^{2k} + \mathrm{O}\left(h_m^{2k+2}\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Multipliant (1.3) par $2^4 = 4^2$ et soustrayant (1.4), il vient que

$$\begin{aligned} (4^2-1)\, A &= 4^2\, B_{m,1} - B_{m-1,1} + (2^4-2^6)\, \widetilde{C}_3\, h_m^6 \\ &\quad + \cdots + \left(2^4-2^k\right) \widetilde{C}_k\, h_m^{2k} + \mathrm{O}\left(h_m^{2k+2}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{4^2\, B_{m,1} - B_{m-1,1}}{4^2-1} + \tfrac{\left(2^4-2^6\right)\widetilde{C}_3}{2^4-1}\, h_m^6 + \cdots + \tfrac{\left(2^4-2^k\right)\widetilde{C}_k}{2^4-1}\, h_m^{2k} + \mathrm{O}\left(h_m^{2k+2}\right) \\ &= B_{m,2} + \widehat{C}_3\, h_m^6 + \cdots + \widehat{C}_k\, h_m^{2k} + \mathrm{O}\left(h_m^{2k+2}\right) \end{aligned}.$$

En d'autres termes

$$B_{m,2} = \tfrac{4^2\, B_{m,1} - B_{m-1,1}}{4^2-1}, \qquad m \geq 2$$

est une aproximation de A d'ordre 6.

Le même procédé permet de construire par récurrence une suite $B_{m,n}$ définie par

$$\begin{cases} B_{m,0} = A_m & m = 0, \cdots, k \\ B_{m,n} = \tfrac{4^n\, B_{m,n-1} - B_{m-1,n-1}}{4^n-1} & n = 1, \cdots, k-1 \\ & m = n, \cdots, k \end{cases}$$

et qui est une qpproximation de A d'ordre $2(n+1)$.

1.5.2 Méthode de Romberg

Proposition 11. ($Formule de Euler-MacLaurin$) *Soit* $f \in C^{2k+2}[a,b]$ *et soit* $h_m = \frac{b-a}{2^m}$ *(*$m \geq 0$*). Soit* $I_T^m(f)$ *l'approximation de l'intégrale* $I(f)$ *obtenue par application de la règle du trapèze avec* 2^m *sous-intervales. On a alors*

$$I(f) = I_T^m(f) + C_1 h_m^2 + C_2 h_m^4 + \cdots + C_k h_m^{2k} + C_{k+1} f^{(2k+2)}(\zeta_m)\, h_m^{2k+2}$$

où C_1, C_2, $\cdots$, C_k, C_{k+1} *sont des constantes positives indépendentes de* m *et où* $\zeta_m \in]a,b[$.

Appliquant la méthode d'extrapolation de Richardson, on construit une suite $R(m,n)$

$$\begin{cases} R(m,0) = I_T^m & m = 0, \cdots, k \\ R(m,n) = \tfrac{4^n\, R(m,n-1) - R(m-1,n-1)}{4^n-1} & n = 1, \cdots, k \\ & m = n, \cdots, k \end{cases}$$

dont la convergence vers $I(f)$ est d'ordre $2(k+1)$.

Algorithme de Romberg. La suite ainsi construite peut-être organisée de la forme suivante

$R(0,0)$				
$R(1,0)$	$R(1,1)$			
$R(2,0)$	$R(2,1)$	$R(2,2)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$R(k,0)$	$R(k,1)$	$R(k,2)$	$\cdots$	$R(k,k)$

Exemple 12. Appliquant la méthode du trapèze pour approcher l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

on obtient les résultats suivants

m	$I_T^m(f)$	$\lvert I(f) - I_T^m(f)\rvert$
0	0	2
1	1.570796326794897	0.429203673205103
2	1.896118897937040	0.103881102062960
3	1.974231601945551	0.025768398054449
4	1.993570343772340	0.006429656227660
5	1.998393360970145	0.001606639029855

Apliquant alors la méthode de Romberg, on obtient

m	$R(m,0)$	$R(m,1)$	$R(m,2)$	$R(m,3)$	$R(m,4)$	$R(m,5)$
0	0					
1	1.57079633	2.09439510				
2	1.89611890	2.00455975	1.99857073			
3	1.97423160	2.00026917	1.99998313	2.0000055		
4	1.99357034	2.00001659	1.99999975	2.0000001	1.9999999	
5	1.99839336	2.00000103	2.0000000	2.0000000	2.0000000	2.0000000

ce qui est clairement plus précis.